

Raport stiintific

privind implementarea proiectului in perioada noiembrie 2011–octombrie 2013

1. CERCETĂRI REALIZATE

1.1. Spații de tip VH și teoreme de dilatare. În articolul publicat [9] se obțin rezultate de dilatare pentru nuclee de tip semipozitiv definite cu valori operatori pe un spațiu VH, care sunt invariante la acțiuni ale unor $*$ -semigrupuri, și care produc reprezentări ale $*$ -semigrupurilor pe spațiile de dilatare. Dilatățile produse de aceste nuclee sunt fie de tip liniarizări (descompuneri Kolmogorov), fie pe spații cu nuclee reproducătoare. În plus, aceste teoreme conțin drept cazuri particulare, unificându-le, atât teoreme de dilatare de tip Stinespring pentru B^* -algebre, cât și pe cele de tip Sz.-Nagy pentru $*$ -semigrupuri, care au fost mult timp considerate ca reprezentând aspecte liniare și respectiv neliniare.

1.2. Generalizări ale tripletelor de spații Hilbert. S-a introdus în lucrarea [8] un concept general de triplet de spații Hilbert, în care scufundările sunt numai închise (nu neapărat continue). Construcția pornește de la un operator pozitiv autoadjunct H , numit Hamiltonianul sistemului, al cărui invers poate fi și nemărginit. Se demonstrează diferite proprietăți ale modelului abstract, și se arată că el include la o diversitate mare de probleme referitoare la spații Sobolev, spații Hilbert de funcții olomorfe și spații L^2 ponderate. Se obține și o aplicație la problema Dirichlet asociată unei clase de ecuații cu derivate parțiale eliptice degenerate.

1.3. Aplicații complet pozitive pe algebre de matrici. În lucrarea [2] s-au obținut criterii de existență și parametrizări pentru aplicațiile complet pozitive care duc un număr finit de matrici date în alte matrici prescrise. Abordarea folosește matrici de densitate asociate funcționalelor liniare pe spații de matrici, inspirate de funcționala lineară Smith–Ward și teorema de tip Hahn–Banach a lui Arveson. Se dau condiții necesare și suficiente pentru existența soluțiilor și se parametrizează soluțiile printr-o mulțime convexă închisă dintr-un spațiu afin. Se obțin aplicații pentru canale cuantice.

1.4. Probleme de momente în mai multe variabile. Rezultatele principale obținute se referă la problema trunchiată a momentelor în mai multe variabile reale și au fost concretizate în lucrarea publicată [1]. Se obțin criterii precise pentru existența unei măsuri de reprezentare absolut continue. Dincolo de rezultatele obținute, originalitatea abordării constă în folosirea metodelor variaționale ori de convexitate, urmărindu-se maximizarea entropiei Boltzmann–Shannon. Rezultatele sunt mai precise în cazul în care suportul măsurii este compact. Se cercetează și existența soluțiilor Lebesgue integrabile.

1.5. Funcții necomutative. În domeniul matricilor aleatoare, s-au obținut în lucrările [10] și [11] rezultate privind proprietăți de fluctuație ale unor clase importante de matrici aleatoare. Există o literatură bogată dedicată comportamentului asimptotic al fluctuațiilor pentru matrici mari unitar invariante. În [10] se arată că comportamentul asimptotic al fluctuațiilor matricilor aleatoare ortogonal invariante este sensibil diferit, implicând transpusele unor matrici, și nu poate fi modelat, ca în cazul unitar, într-un cadru comutativ de tipul calculului funcțional pentru operatori normali. În lucrarea [13], se obține descrierea momentelor de fluctuație pentru matrici aleatoare cu intrări într-o algebra necomutativă.

Tehnicile obținute în [10] sunt aplicate în [11] la studiul matricilor unitar invariante. Merită menționat că, deși în ultimele 3 decenii studiul relațiilor de independență liberă asimptotică pentru diferite clase de matrici aleatoare a făcut obiectul multor lucrări, [10] prezintă, printre alte rezultate, o relație nouă de independență liberă, anume dintre un unitar Haar și transpusul său.

O altă direcție de cercetare e reprezentată de investigarea proprietăților de convergență a seriilor de puteri necomutative și integrare pe grupuri unitare, urmărindu-se analogiile și diferențele față de cazul comutativ. În acest cadru, în lucrarea [12] sunt discutate aspecte al spațiilor Hardy de funcții necomutative în polidiscul unitate necomutativ.

1.6. Procese stochastice Γ -corelate. În lucrarea [17] se extinde o teoremă de tip Gladyshev pentru procese periodice cu parametru continuu la cazul operatorial, prin intermediul unei acțiuni complet corelate. Pentru procese Γ -corelate cu parametru continuu sunt analizate diferite condiții de continuitate operatorială, în scopul studiului proceselor slab-armonizabile și tare-armonizabile. Sunt stabilite legăturile dintre procesele periodic corelate cu parametru continuu și cele de tip armonizabil, sub diverse

condiții de continuitate și armonizabilitate, stabilindu-se o anumită ordine de incluziune, diferită de cea uzuală din cazul parametrului discret. De asemenea se obține o reprezentare integrală pentru procese Γ -corelate cu parametru continuu, care permite un studiu de tip staționar pentru procese nestaționare periodic Γ -corelate tare armonizabile.

În lucrarea [18] sunt prezentate câteva rezultate care au condus la generalizarea problemelor de predicție matematică de la cazul multidimensional finit, la cazul infinit dimensional. În mare parte lucrarea prezintă o sinteză a unor rezultate obținute anterior asupra proceselor staționare, dar și mai recent, asupra unor procese nestaționare, în special procese periodic corelate.

1.7. Funcții analitice și operatori pe spații de funcții. În lucrarea [4], care a fost deja publicată, se obține o teoremă de factorizare pentru funcții analitice care aplică semiplanul superior în el însuși. Teorema generalizează rezultate clasice privitoare la funcțiile meromorfe, și permite rezolvarea unor probleme de interpolare cu funcții analitice pe frontiera semiplanului sau a discului. Ideile folosite în această lucrare sunt aplicate în [5] pentru a rezolva o problemă deschisă referitoare la operatori de compoziție pe semiplanul superior.

În lucrarea [6], submisă pentru publicare, se investighează imaginea numerică a unor contracții complet neunitare. Se dă un răspuns definitiv unei conjecturi mai vechi a lui Halmos pentru cazul acestui tip de contracții, arătându-se că imaginea numerică se poate obține nu numai ca intersecția imaginilor numerice ale tuturor dilatărilor unitare (lucru stabilit în 2001 de Choi și Li), ci folosind numai dilatări unitare de tip minimal. În cazul spațiilor de defect de dimensiune 1 se obțin relații precise între structura geometrică a imaginii numerice și proprietățile modelului funcțional asociat contracției.

1.8. Teoreme de tip Beurling pentru spații cu nucleu reproducător. În lucrarea [3], submisă pentru publicare, se obține caracterizarea subspațiilor contractiv incluse în spații cu nucleu reproducător de tip Nevanlinna–Pick care sunt invariante la multiplicări, obținându-se astfel un analog al teoremei lui Beurling din cazul clasic al spațiilor Hardy. De asemenea, se dă o caracterizare subspațiilor complementare acestui tip de spații. Rezultatele le generalizează pe cele cunoscute în cazul spațiului Drury–Arveson.

1.9. Operatorii Toeplitz trunchiați. Operatorii Toeplitz trunchiați pe spații model reprezintă un domeniu nou de studiu, ce oferă posibilități interesante pentru extensii multidimensionale. Lucrarea [7] studiază proprietățile de comutare ale acestor operatori. În particular, se obțin caracterizări ale operatorilor Toeplitz trunchiați normali, unitari, izometrice sau coizometrice.

1.10. Semigrupuri topologice și probleme conexe. În lucrarea [14] se demonstrează o teoremă generală privind existența limitei uniforme pentru iteratele unui operator Markov cu proprietatea Feller acționând pe un spațiu de funcții măsurabile. Cazul mai general al semigrupurilor topologice înzestrate cu o măsură de probabilitate este studiat în [15], unde se arată existența unei reprezentări a spațiului funcțiilor continue la stânga armonice în sens generalizat pe acest semigrup ca un spațiu de funcții continue pe un spațiu topologic compact. În fine, în [16] se dă o demonstrație simplă extinderii unei teoreme Choquet–Deny obținută de Szekely și Zeng.

2. CERCETĂRI ÎN CURS

Sunt în curs de desfășurare mai multe direcții de cercetare, lucrările urmând a fi finalizate în anul următor:

- (1) Studiul nucleelor hermitice cu valori în spații admisibile, liniarizări ale acestora, reprezentări care se obțin din invarianța unor astfel de nuclee la acțiuni ale unor $*$ -semigrupuri, precum și generalizări ale acestor rezultate la nuclee complet mărginite.
- (2) Teoreme de dilatare legate de nuclee măsurabile de tip semipozitiv definite și conexiunile lor cu reprezentări pe integrale directe de spații Hilbert. Diverse probleme de interpolare pentru operatori/aplicații pozitive(e)
- (3) Frontiere Poisson asociate semigrupurilor Markov pe spații comutative și ne-comutative (algebre de operatori). În cazul comutativ, în care aceste frontiere permit reprezentări integrale pentru funcțiile armonice mărginite asociate semigrupului respectiv, s-a obținut deja o metoda directă de construcție a frontierei. În cazul ne-comutativ, studiul frontierelor Poisson se dezvoltă în special în conexiune cu grupurile cuantice și teoria cuantică a informației; se studiază posibile versiuni continue pentru diversele descrieri ale acestor frontiere.
- (4) Aplicarea metodelor variaționale la problema trunchiată a momentelor în cazul suportului măsurii nemărginit.

- (5) Teoria dilatarii pentru familii comutative de operatori pe spații Hilbert.
- (6) Studiul spațiilor Hardy de funcții necomutative în legătură cu structuri de spații de operatori pe un spațiu Hilbert finit dimensional. Aplicații ale teoriei distribuțiilor necomutative în cazul când codomeniu este o algebră de matrici, situație prezentată în Teoria Cuantică a Informației.
- (7) Conexiuni dintre funcția maximală atașată unei contracții și sistemele liniare având ca operator principal contractia respectivă. Investigarea cazului hipercontracțiilor.

3. LUCRĂRI REALIZATE

Conform bibliografiei de mai jos, în cadrul proiectului de cercetare în perioada noiembrie 2011–octombrie 2013 au fost elaborate 19 lucrări, dintre care:

- 5 lucrări publicate.
- 4 lucrări acceptate la publicare.
- 8 preprinturi.
- 1 lucrare în curs de finalizare.

4. DISEMINAREA REZULTATELOR

Au avut loc mai multe participări la conferințe internaționale, unde au fost prezentate rezultatele obținute în cadrul proiectului și s-au purtat discuții cu matematicieni străini pe teme legate de proiect.

2012.

- A 24-a Conferință Internațională de Teoria Operatorilor, Timișoara, 26–30 iulie. Tema conferinței este strâns legată de tematica proiectului, iar membri ai grupului de cercetare au participat și prezentat la conferință comunicări legate de proiect (Ambrozie, Gheondea, Valușescu). În afară de aceasta, au mai fost invitați cinci matematicieni străini (Albrecht, Fialkow, Kirchberg, Queffelec, Wick), suportați din proiect, pentru a prezenta expuneri legate de tematica proiectului și a purta discuții cu membrii colectivului pe marginea tematicii.
- 9th Advanced Course on Operator Theory and Complex Analysis, Sevilla (Spania), 12–14 iunie. A ținut o expunere D. Timotin.

- Al 13-lea Seminar Româno-Finlandez, Ploiești, 26–30 iunie. Au ținut expuneri Ambrozie, Gheondea, Prunaru, Timotin.
- Workshop on Operator Theory, Complex Analysis, and Applications, Lisabona (Portugalia) 11–13 iulie. A ținut o expunere D. Timotin.
- Conference on Spectral Theory and Differential Operators, Graz (Austria), 27–31 august. A ținut o expunere A. Gheondea.
- Conferința Internațională de Analiză Funcțională, Timișoara, 12–14 octombrie. A ținut o expunere I. Valușescu.
- Conferința de Vară a Canadian mathematical Society, Regina (Canada), 2–4 iunie. A ținut o expunere Mihai Popa.
- Matrices and Operators, Bangalore (India), 27–30 decembrie. A ținut o expunere D. Timotin.

În afara acestor participări la conferințe, în perioada 9–17 iulie Aurelian Gheondea a efectuat o deplasare la Cracovia. În cadrul vizitei la Universitatea AGH de Știință și tehnologie a avut discuții cu prof. P. Cojuhari pe teme legate de tematica proiectului și a inițiat o colaborare pe tema proiectului.

2013.

- Recent advances in Operator Theory and Operator Algebras, Bangalore (India), 7–11 ianuarie. A ținut o expunere D. Timotin.
- Conferința Aniversară a Facultății de Științe din București - 150 ani, 29 august–1 septembrie. A ținut o expunere A. Gheondea.
- Spectral Problems for Operators and Matrices, Zagreb (Croatia), 16–20 septembrie. A ținut o expunere A. Gheondea.
- 23 februarie–2 martie. Structured Function Systems and Applications week, Oberwolfach, Germania. A ținut o expunere C. Ambrozie.
- Focus Program on Noncommutative Distributions in Free Probability Theory, Toronto (Canada), 22–26 iulie. A ținut o expunere Mihai Popa.
- A.M.S. National Meeting, San Diego (USA), 10–13 ianuarie. A ținut o expunere Mihai Popa.
- Sz.-Nagy Centennial Conference, Szeged (Ungaria), 24–28 iunie. A ținut o expunere Dan Timotin.

- Joint International Meeting of the American Mathematical Society and the Romanian Mathematical Society, Alba Iulia, 27–30 iunie. Dan Timotin a fost unul dintre cei șase vorbitori în ședință plenară. C. Ambrozie a ținut o expunere.
- Joint International Meeting of the American Mathematical Society and the Romanian Mathematical Society, Montreal (Canada), 26–30 august. A ținut o expunere D. Timotin.
- Conference on Applied and Industrial Mathematics, București, 19–22 septembrie. A ținut o expunere I. Valușescu.
- Conference on Applied and Industrial Mathematics, București, 19–22 septembrie. A ținut o expunere I. Valușescu.
- Classical and Functional Analysis, Azuga, 28–29 octombrie. A ținut o expunere I. Valușescu.

În afara acestor participări la conferințe, în perioada 3–17 iulie 2013 Aurelian Gheondea a efectuat o deplasare la Cracovia. În cadrul vizitei la Universitatea AGH de Știință și tehnologie a continuat colaborarea cu prof. P. Cojuhari pe teme legate de tematica proiectului.

În perioada 17 martie– 4 aprilie 2013 C.-G. Ambrozie a efectuat o deplasare la Universitatea Bilkent, unde a colaborat cu A. Gheondea.

BIBLIOGRAFIE

- [1] Ambrozie, C.-G., Multivariate truncated moments problems and maximum entropy, *Ann. Math. Phys.* **3** (2013), 145–161. .
- [2] Ambrozie, C.-G., Gheondea, A., An interpolation problem for completely positive maps on matrix algebras: solvability and parametrization.
- [3] Benhida, Ch., Timotin, D., Contractively included subspaces of Pick spaces, arXiv:1305.6743.
- [4] Bercovici, H., Timotin, D., Factorizations of analytic self-maps of the upper half-plane, *Ann. Acad. Sci. Fenn. (Math.)* **37** 2012, 649–660.
- [5] Bercovici, H., Timotin, D., A note on composition operators in a half-plane, *Arch. Math.*, publicat online pe 22.11.2012.
- [6] Bercovici, H., Timotin, D., The numerical range of a contraction with finite defect numbers, arXiv:1205.2025.
- [7] Chalendar, I., Timotin, D., Commutation relations for truncated Toeplitz operators, va apare în *Oper. and Matrices*.
- [8] Cojuhari, P., Gheondea, A., Triplets of closely embedded Hilbert spaces, preprint arXiv:1309.0176v1.
- [9] Gheondea, Aurelian, Dilations of some VH-spaces operator valued invariant kernels, *Integral Eq. Operator Theory*, publicat online pe 9.11.2012.
- [10] Mingo, James; Popa, Mihai; Redelmeier, C. Emily I., Real Second Order Freeness and Haar Orthogonal Matrices, arXiv:1210.6097, va apare în *J. Math. Physics*.
- [11] Mingo, James; Popa, Mihai, On the Relation between Complex and Real Second Order Free Independence, preprint.

- [12] Popa, Mihai; Vinnikov, Victor, H^2 -Spaces of Non-Commutative Functions, în curs de finalizare.
- [13] Popa, Mihai; Jiao, Yong, On fluctuations of traces of large matrices over a non-commutative algebra, preprint.
- [14] Prunaru, B., Asymptotic stability for a class of Markov semigroups, va apare în *Mathematical Reports*.
- [15] Prunaru, B., A construction of Poisson spaces for topological semigroups, preprint.
- [16] Prunaru, B., A short proof of a Choquet–Deny theorem for abelian topological semigroups.
- [17] Valușescu I., Notes on continuous parameter periodically Γ -correlated processes, *An. Univ. Timișoara* **50** (2012), 115–125.
- [18] Valușescu I., Some remarks on the infinite-variate prediction, va apare în *Proceedings of the conference Classical and Functional Analysis*, Azuga, 28-29 sept. 2013.

Director proiect

Dan Grigore Timotin