ACADEMIA ROMÂNĂ

Școala de studii avansate a Academiei Române

Institutul de Matematică "Simion Stoilow"

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Spectrul operatorilor diferențiali geometrici pe varietăți Riemanniene

Conducător de doctorat:

C.S.I. Dr. Sergiu Moroianu

Doctorand:

Cipriana Anghel

București, 2023

Rezumat

Primul obiectiv al acestei teze este să studiem comportamentul spectrului operatorului Dirac în procesul de degenerare al unei suprafețe riemanniene, atunci când lungimea unei geodezice simple închise descrește către zero. Vom lucra în ipoteza că structura spin de-a lungul geodezicii pe care o strângem este non-trivială. Este bine-cunoscut faptul că spectrul unui operator diferențial eliptic pe o varietate compactă variază continuu la perturbații netede ale metricii. Dificultatea problemei noastre provine din necompacitatea suprafeței limită, care este de arie finită cu două cuspuri. Ideea principală pentru această investigație este construirea unui calcul pseudodiferențial adaptat (în spiritul celebrei b-algebre a lui Melrose) care include atât familia de operatori Dirac pe familia de suprafețe compacte, cât și operatorul Dirac de pe suprafața limită (necompactă), împreună cu rezolventele lor.

Al doilea obiectiv al acestei lucrări este să investigăm dezvoltări asimptotice ale nucleelor căldurii pentru puteri reale de Laplacieni generalizați. Fixăm mai întâi un Laplacian generalizat Δ (cu anumite ipoteze) care acționează pe funcțiile netede ale unei varietăți închise M. Studiem mai întâi dezvoltarea asimptotică a nucleului căldurii h_t corespunzător lui Δ^r, $r \in (0,1)$, de-a lungul diagonalei lui $M \times M$. Apoi studiem dezvoltarea asimptotică a lui h_t către un compact disjunct de diagonală. În plus, demonstrăm non-trivialitatea coeficienților obținuți și non-localitatea unora dintre aceștia. În cazul special $r = 1/2$, obținem o *descriere uniformă* a tranziției dintre comportamentul lui h_t pe diagonală și cel din afara diagonalei, demonstrând că nucleul căldurii lui $\Delta^{1/2}$ este o funcție poliomogen conormală pe un anumit spațiu blow-up.

Cuprins

Chapter 1

Introducere

Scopul tezei de față este să studiem comportamentul anumitor operatori eliptici și al spectrelor lor în probleme de degenerare. În plus, vom investiga dezvoltări asimptotice ale nucleului căldurii pentru puteri reale de Laplacieni generalizați. Punctul comun al acestor două subiecte este analiza funcțiilor care au dezvoltări asimptotice conținând termeni logaritmici și folosirea blow-upurilor de varietăți cu colțuri.

O motivație filozofică pentru a studia astfel de probleme apare din fizică. Pe de o parte, o particulă în mecanica clasică este privită ca un punct în $T\mathbb{R}^3$ (spațiul tangent al lui $\mathbb{R}^3$): un punct în $\mathbb{R}^3$ și un vector care reprezintă viteza sa. Traiectoriile acestor particule sunt geodezice ale spațiului. Pe de altă parte, în mecanica cuantică o particulă este o funcție L^2. Viteza sa este codificată în transformata Fourier și evoluează sub ecuația Schrödinger:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = i\Delta_x f.$$

Stările periodice ale acestor particule sunt date de funcțiile proprii ale Laplacianului, iar frecvențele sunt legate de valorile proprii.

Așa cum a remarcat L. Schwartz [59], operatorii diferențiali pot fi văzuți ca operatori *integrali* definiți prin nuclee distribuționale. Teoria operatorilor pseudodiferențiali pe varietăți Riemanniene compacte a fost dezvoltată printre alții de Hörmander [36]. Această teorie furnizează un cadru potrivit pentru studiul operatorilor geometrici diferențiali eliptici (cum ar fi operatorul Laplace sau operatorul Dirac) și a soluțiilor acestora. Se demonstrează că algebra operatorilor pseudodiferențiali conține atât parametrixuri, cât și familia de rezolvente a acestor operatori. Ca o consecință, funcțiile proprii normalizate ale operatorului Laplace formează o bază Hilbert pentru spațiul funcțiilor L^2 pe o varietate Riemanniană compactă (vezi, de exemplu, [17]).

Calculul pseudodiferențial clasic este strâns legat de rezultatele din teoria indicelui, cum ar fi teorema Atiyah-Patodi-Singer (vezi, de exemplu, [5]-[7]). Această formulă calculează indexul unui operator diferențial eliptic pe o varietate orientată compactă cu frontieră în termeni ai unor date topologice ale varietății și ale unor date spectrale ale frontierei, mai precis așa-numitul invariant eta al operatorului Dirac indus pe frontieră.

Există modalități de generalizare a teoriei operatorilor pseudodiferențiali pentru varietăți ne-compacte. De exemplu, b-calculul introdus de Melrose [45] reprezintă un cadru pentru tratarea anumitor operatori diferențiali pe varietăți compacte *cu frontieră*. O consecință frumoasă a acestui calculul este că furnizează o demonstrație pentru o generalizare a teoremei de index Atiyah-Patodi-Singer în contextul varietăților compacte cu frontieră, dotate cu metrici complete cu capete asimptotic cilindrice (metrici b-exacte).

Una dintre ideile centrale în mașinăria lui Melrose este aceea de a descrie nucleele distribuționale ale operatorilor pseudodiferențiali ca *distribuții poliomogen conormale* pe varietăți cu colțuri obținute prin iterații de blow-upuri. Această idee prolifică a condus la dezvoltarea multor altor calcule pseudodiferențiale: calculul ϕ [49], calculul zero [50], calculul edge [41], calculul scattering (vezi, de exemplu, [35]), calculul de chirurgie b [42] și calculul de chirurgie φ [2], printre altele. Toate aceste calcule pseudodiferențiale s-au dovedit a fi instrumente puternice în rezolvarea unei game largi de probleme analitice pe varietăți necompacte.

Studiul spectrului operatorului Dirac pe suprafețe care degenerează

Context și Motivare

Fie X o suprafață netedă compactă și orientată de gen $g \geq 2$. Notăm cu $\mathcal{M}_{-1}(X)$ mulțimea metricilor hiperbolice pe X. Folosind clasica Teoremă de Uniformizare Poincaré-Koebe a suprafețelor Riemann (vezi, de exemplu, [4]), $\mathcal{M}_{-1}(X)$ este într-o corespondență bijectivă cu mulțimea structurilor complexe pe X. Spațiul Teichmüller $\mathcal{T}_g$ este definit prin factorizarea mulțimii $\mathcal{M}_{-1}(X)$ prin componenta conexă a identității în grupul de difeomorfisme care acționează pe X. Se știe că $\mathcal{T}_g$ este o varietate complexă de dimensiune $3g-3$, dotată cu metrica incompletă Weil-Peterson și, în plus, este o varietate Kähler. Mai jos, descriem un proces pentru a considera un drum în $\mathcal{T}_g$ către frontiera sa.

Fie $\gamma \subset X$ o geodezică simplă închisă pe X. Considerăm o familie netedă de metrici $(g_t)_{t\geq 0}$ pe $X \setminus \gamma$ astfel încât local, lângă γ,

$$g_t = \frac{dx^2}{x^2+t^2} + \left(x^2+t^2\right) dy^2.$$

Menționăm că metrica g_t nu trebuie să fie hiperbolică peste tot, ci doar local, în apropierea geodezicei γ pe care o strângem. Pentru $t > 0$, (X, g_t) este o suprafață compactă, în timp ce $(X \setminus \gamma, g_0)$ este o suprafață necompactă cu două cuspuri. Numim acest proces un *proces de strângere* de-a lungul geodezicei γ.

Dacă alegem familia de metrici $(g_t)_{t\geq 0}$ din mulțimea $\mathcal{M}_{-1}(X)$, procesul de strângere descris mai sus corespunde unui drum către frontiera spațiului Teichmüller. Astfel de fenomene de degenerare au fost studiate de Ji [39], Bär [8], Schulze [58], și recent de Stan [61].

Este bine cunoscut faptul că spectrul unui operator geometric diferențial eliptic (precum Laplacianul sau operatorul Dirac), variază continuu în urma perturbațiilor netede ale metricii. Scopul nostru este să studiem continuitatea spectrului operatorului Dirac în timpul unui proces de strângere. Dificultatea problemei apare din cauza necompacității suprafeței limită.

Punct cheie

Există contexte în care Laplacianul are spectru discret în limita procesului de degenerare, de exemplu Laplacianul care acționează asupra formelor [28], și Laplacianul magnetic [27]. Deși spectrul Laplacianului scalar devine continuu în limita unui proces de strângere, Bär [8] a demonstrat că în anumite condiții de invertibilitate pentru fiecare cusp, spectrul operatorului Dirac rămâne discret la limită. Mai precis, dacă lipim un cerc la "capătul" fiecărui cusp, cerem ca structura spin să fie ne-trivială de-a lungul acestui cerc. Acest lucru este echivalent cu faptul că operatorul Dirac corespunzător structurii spin induse pe cerc este inversabil. Mai târziu, Moroianu [54] a generalizat acest rezultat pentru varietăți de dimensiuni mai mari și pentru o clasă mai largă de metrici. De asemenea, a dedus o lege Weyl pentru varietatea limită ne-compactă.

Ideea de rezolvare

Principalul instrument pentru investigarea continuității spectrului operatorului Dirac în timpul unui proces de strângere este *construirea* unui calcul pseudodiferențial adaptat (în spiritul celebrului b-calculus al lui Melrose) care include atât familia de operatori Dirac $\not{D}_t$ pe familia de suprafețe compacte $(X, g_t)_{t>0}$, cât și operatorul Dirac $\not{D}_0$ de pe suprafața limită ne-compactă $(X \setminus \gamma, g_0)$. Acest calcul pseudodiferențial adaptat este strâns legat de calculul cusp [51] (un caz particular al calculului φ [49]). Mai precis, este calculul cusp cu un parametru temporal, și îl denumim $\Psi_{\mathrm{cp}}^{*,*,*}(X)$.

Albin, Rochon și Sher [2] au introdus calculul φ cu parametru pentru a studia spectrul Laplacianului Hodge cu coeficienți într-un fibrat plat pe o varietate compactă care degenerează către o varietate cu cuspuri fibrate. Calculul nostru de chirurgie cu cusp este un caz particular al calculului lor de chirurgie φ. Acest lucru se întâmplă deoarece ei tratează cazul mai complicat când frontiera fibrează peste o altă varietate închisă. Considerăm că este justificat să furnizăm în Capitolul 3 toate detaliile construcției, deoarece investigația noastră se referă la operatori diferențiali complet eliptici, conducând la demonstrații diferite și mult simplificate față de [2].

Intuitiv, vom descrie operatorii pseudodiferențiali de chirurgie cu cusp din $\Psi_{\text{cp}}^{*,*,*}(X)$ ca fiind distribuții pe o anumită varietate blow-up cu colțuri X^2_{cp}, conormale la închiderea mulțimii $(0,\infty)\times \mathrm{Diag}$, unde Diag este diagonala din $X\times X$ (vezi Fig. 3.6). În plus, vom impune anumite comportamente pentru aceste distribuții către fețele de frontieră ale lui X^2_{cp}.

Un rezultat dificil, dar crucial în construcția acestui calcul, este ceea ce se numește Teorema de Compoziție. Aceasta stabilește că compunerea a doi operatori care aparțin calculului se află, de asemenea, în calcul. La fel ca în cazul altor calcule pseudodiferențiale à la Melrose, vom demonstra acest rezultat prin utilizarea unui spațiu triplu, împreună cu înmulțirea distribuțiilor conormale și teoremele de imagine inversă și imagine directă (Pull-back si Push-forward) pentru distribuțiile conormale (vezi, de exemplu, [44], [31]).

Fiecărui operator pseudodiferențial de chirurgie cu cusp $A\in\Psi_{\text{cp}}^{*,*,*}(X)$ îi vom asocia trei simboluri principale: $\sigma_{\text{cp}}(A)$, $\mathcal{N}(A)$ și $\mathcal{T}(A)$. Mai precis, simbolul cusp cu parametru $\sigma_{\text{cp}}(A)$ este termenul principal din simbolul distribuției conormale k_A. Operatorul normal $\mathcal{N}(A)$ este o normalizare a restricției lui A la fața frontală cusp ff_c. În cele din urmă, operatorul temporal $\mathcal{T}(A)$ este restricția normalizată a lui A la tb, fața obținută prin ridicarea frontierei temporale $\{t=0\}\times X\times X\subset[0,\infty)\times X\times X$ la X^2_{cp} (vezi Fig. 3.3).

Un rezultat de natură algebrică ne asigură că dacă un operator $A\in\Psi_{\text{cp}}^{*,*,*}(X)$ are toate cele trei simboluri inversabile, putem construi un parametrix modulo operatori reziduali din spatiul $\Psi_{\text{cp}}^{-\infty,-\infty,-\infty}(X)$.

Rezultate principale

Vom reuși să unim familia de operatori Dirac $\left(\not{D}_t\right)_{t>0}$ de pe suprafețele Riemanniene (X,g_t), împreună cu operatorul Dirac $\not{D}_0$ de pe suprafața limită (necompactă) $(X\setminus\gamma,g_0)$, pentru a obține un operator diferențial de chirurgie cu cusp:

$$\not{D}\in\Psi_{\text{cp}}^{1,1,0}(X).$$

Un pas crucial în Capitolul 3 este să demonstrăm că operatorul normal $\mathcal{N}(\not{D})$ al lui $\not{D}$ este inversabil. Aici folosim ipoteza despre netrivialitatea structurii de spin de-a lungul geodezicei γ. Apoi vom arăta că dacă λ_0 nu este o valoare proprie a lui $\not{D}_0$, atunci familia rezolventelor $(\not{D} - \lambda)^{-1}$ pentru timp t suficient de mic se află în calcul.

Theorem 1.1. *Fie X o suprafață compactă orientată, și fie $\gamma \subset X$ o geodezică simplă închisă. Considerăm o familie netedă de metrici $(g_t)_{t\geq 0}$ pe $X \setminus \gamma$ care, în apropierea lui γ, sunt date de:*

$$g_t = \frac{dx^2}{(x^2+t^2)^2} + \left(x^2 + t^2\right) dy^2.$$

În plus, considerăm $(\not{D}_t)_{t\geq 0}$ familia de operatori Dirac corespunzători metricilor $(g_t)_{t\geq 0}$ și unei structuri de spin $\mathrm{P}_{\mathrm{Spin}(2)} X$ netriviale față de γ. Dacă $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \operatorname{spec} \not{D}_0$, atunci există $t_0(\lambda) > 0$ astfel încât operatorul $(\not{D}_t - \lambda)$ este inversabil pentru fiecare $t \leq t_0(\lambda)$, iar rezolventa este un operator de chirurgie cu cusp:

$$(\not{D} - \lambda)^{-1} \in \Psi_{\mathrm{cp}}^{-1,-1,0}(X).$$

Demonstrăm de asemenea convergența proiectorilor spectrali în procesul de degenerare.

Theorem 1.2. *Presupunem că suntem în ipoteza Teoremei 1.1, și fie λ_0 o valoare proprie pentru operatorul limită $\not{D}_0$. Considerăm $\epsilon > 0$ astfel încât*

$$[\lambda_0 - \epsilon, \lambda_0 + \epsilon] \cap \operatorname{spec} \not{D}_0 = \{\lambda_0\}.$$

Atunci proiectorul spectral $\mathrm{P}_{[\lambda_0-\epsilon,\lambda_0+\epsilon]}$ aparține lui $\Psi_{\mathrm{cp}}^{-\infty,-\infty,0}(X)$. Mai precis, nucleul său Schwartz este neted pe $[0,\infty) \times X \times X$ și, în plus, se anulează rapid la $\{t = 0\} \times \gamma$.

Dacă $A \in \Psi_{\mathrm{cp}}^{m,\alpha,\beta}(X)$ este un operator de chirurgie cu cusp care admite urmă, atunci aceasta este o funcție ${}^{\mathrm{cp}}\operatorname{Tr}(A) : [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{C}$ care asociază fiecărui timp t integrala peste "felia" de timp t din planul diagonal $\Delta \subset \mathrm{X}^2_{\mathrm{cp}}$ (vezi Fig. 3.6). De exemplu, pentru $t > 0$, urma de chirurgie cusp asociază lui A urma L^2 a operatorului A_t care acționează pe (X, g_t).

Theorem 1.3. *Fie $A \in \Psi_{\mathrm{cp}}^{m,\alpha,\beta}(X)$ un operator cu urmă, i.e., un operator ale cărui ordinele verifică inegalitățile:*

$$m < -2, \quad \alpha < -1, \quad \beta \leq 0. \tag{1.1}$$

i) Dacă $\alpha - \beta \notin \mathbb{Z}$, atunci

$${}^{\mathrm{cp}}\operatorname{Tr} A \in t^{-\alpha}\mathcal{C}^\infty[0,\infty) + t^{-\beta}\mathcal{C}^\infty[0,\infty).$$

ii) Dacă $\alpha - \beta \in \mathbb{Z}$, atunci

$$^{\mathrm{cp}}\operatorname{Tr} A \in t^{\min(-\alpha,-\beta)}\mathcal{C}^{\infty}[0,\infty) + t^{\max(-\alpha,-\beta)}\log t \cdot \mathcal{C}^{\infty}[0,\infty).$$

Relevanța rezultatului de mai sus constă în faptul că putem descrie comportamentul urmei de chirurgie cusp către $t = 0$. Mai precis, urma de chirurgie cusp este de clasă $\mathcal{C}^1$, în particular, este continuă la $\{t = 0\}$. Mai departe, studiem urma de chirurgie cusp a rezolventei operatorului Dirac.

Theorem 1.4. *Presupunem că suntem în ipotezele Teoremei 1.1. Considerăm un număr întreg $k \geq 3$, și fie $\lambda \in \mathbb{R}$ în complementul spectrului lui $\not{D}_0$. Notăm cu*

$$\mathrm{R}(\lambda) = (\not{D} - \lambda)^{-1}$$

rezolventa operatorului Dirac. Atunci puterea k a rezolventei este un operator cu urmă, iar urma de chirurgie cusp $^{\mathrm{cp}}\operatorname{Tr}\left(\mathrm{R}(\lambda)^k\right)$ este de clasă Hölder $\mathcal{C}^{k-1,\alpha}$ în $t \in [0, t_0)$, pentru orice $\alpha \in (0,1)$.

Subliniem că funcția $^{\mathrm{cp}}\operatorname{Tr}\left(\mathrm{R}(\lambda)^k\right)$ este evident netedă pentru $t > 0$. Teorema anterioară ne spune cum se comportă această funcție la $t = 0$. Mai departe, putem investiga urma rezolventei relative a pătratului operatorului Dirac.

Theorem 1.5. *Fie $\lambda, \lambda_0 \in \mathbb{R}$ astfel încât operatorii diferențiali cusp $\not{D}_0^2 - \lambda$ și $\not{D}_0^2 - \lambda_0$ sunt inversabili. Notăm rezolventele operatorului Dirac ridicat la pătrat cu*

$$\widetilde{\mathrm{R}}(\lambda) := \left(\not{D}^2 - \lambda\right)^{-1}, \qquad \widetilde{\mathrm{R}}(\lambda_0) := \left(\not{D}^2 - \lambda_0\right)^{-1}.$$

Atunci rezolventa relativă $\widetilde{\mathrm{R}}(\lambda) - \widetilde{\mathrm{R}}(\lambda_0)$ este operator cu urmă, iar urma de chirurgie cusp se comportă ca funcție de t în felul următor:

$$^{\mathrm{cp}}\operatorname{Tr}\left(\mathrm{R}(\lambda) - \mathrm{R}(\lambda_0)\right) \in \mathcal{C}^{\infty}[0,\infty) + t^2 \log t\, \mathcal{C}^{\infty}[0,\infty).$$

Într-o lucrare viitoare, intenționăm să aplicăm această teoremă pentru a îmbunătăți rezultatul lui Stan [61] privind comportamentul asimptotic al funcției zeta Selberg definită relativ la structura spin aleasă.

Dezvoltări asimptotice ale nucleelor căldurii pentru puteri reale de Laplacieni generalizați

Fie $\mathcal{E}$ un fibrat vectorial hermitic peste o varietate Riemanniană închisă și orientată M de dimensiune n. Considerăm un Laplacian generalizat auto-adjunct non-negativ Δ care acționează asupra secțiunilor fibratului $\mathcal{E}$. De exemplu, dacă $\not{D}$ este un operator Dirac corespunzător unei varietăți Riemanniene închise și spin, atunci $\not{D}^*\not{D}$ este un astfel de Laplacian generalizat care acționează asupra secțiunilor fibratului spinorial.

Istoric

Un rezultat clasic datorat lui Minakshisundaram-Pleijel [43] afirmă că nucleul căldurii p_t al lui Δ (adică nucleul Schwartz al operatorului $e^{-t\Delta}$) are o dezvoltare asimptotică la timp mic în apropierea diagonalei:

$$p_t(x,y) \overset{t\searrow 0}{\sim} t^{-n/2} e^{-\frac{d(x,y)^2}{4t}} \sum_{j=0}^{\infty} t^j a_j(x,y), \tag{1.2}$$

unde $d(x,y)$ este distanța geodezică dintre x și y. Mai mult, a_j sunt definiți recursiv ca soluții ale anumitor EDO-uri de-a lungul geodezicelor (vezi, de exemplu, [12], [14]). Folosind acest rezultat, se poate demonstra legea lui Weyl privind numărul de valori proprii ale unui Laplacian (vezi, de exemplu, [12]). În plus, dacă $\not{D}$ este un operator Dirac twistat, atunci dezvoltarea asimptotică (1.2) aplicată Laplacianului generalizat $\Delta = \not{D}^*\not{D}$ joacă un rol principal în demonstrarea teoremei de index Atiyah-Singer locală (vezi, de exemplu, [13], [15], [23]).

Dezvoltări asimptotice la timp mic pentru nucleul căldurii corespunzător lui Δ^r, $r \in (0,1)$

Obiectul central de studiu în Capitolul 4 (care constă din articolul deja publicat [3]) este nucleul Schwartz h_t al operatorului $e^{-t\Delta^r}$, unde $r \in (0,1)$. Mai precis, investigăm dezvoltarea asimptotică la timp mic a lui h_t în $[0,\infty) \times \mathrm{Diag}$, și în spațiul $[0,\infty) \times K$, unde $K \subset M \times M$ este un compact care nu se intersectează cu diagonala. Ideea utilizată în această investigație este aceea de a corela operatorul de căldură $e^{-t\Delta}$ și operatorul $e^{-t\Delta^r}$ cu familia de operatori pseudodiferențiali Δ^s, $s \in \mathbb{C}$. Aceste conexiuni pot fi obținute prin intermediul formulelor de tip Mellin.

Nucleul Schwartz h_t al operatorului $e^{-t\Delta^r}$ este $\mathcal{C}^\infty$ pe $[0,\infty) \times (M \times M \setminus \mathrm{Diag})$ și se anulează cel puțin la ordinul 1 la $t = 0$. Dăm o descriere precisă a coeficienților Taylor ai lui h_t atunci când $t \searrow 0$, în funcție de nucleele Schwartz q_s ale puterilor complexe Δ^s, $s \in \mathbb{C}$.

Dezvoltarea asimptotică pe diagonală a lui h_t este mai complicată decât cea a nucleului clasic de căldură p_t din (1.2). Ea depinde de paritatea lui n (așa cum se întâmplă și în [9]) și de raționalitatea lui r. Cazul cel mai interesant apare atunci când observăm termeni logaritmici. Acest lucru se întâmplă doar dacă n este impar, $r = \frac{\alpha}{\beta}$ este rațional, iar numitorul β este par.

Theorem 1.6. *Fie Δ un Laplacian generalizat auto-adjunct non-negativ Δ care acționează asupra secțiunilor unui fibrat vectorial hermitic $\mathcal{E}$ peste o varietate închisă M de dimensiune n. Fie $a_j(x,x)$ coeficienții diagonali ai nucleului căldurii p_t corespunzător lui Δ din (1.2). Dacă n este impar, $r = \frac{\alpha}{\beta}$ este rațional și numitorul său β este par, atunci dezvoltarea asimptotică a nucleului Schwartz h_t al operatorului $e^{-t\Delta^r}$, $r \in (0,1)$, pe diagonală atunci când $t \searrow 0$ este următoarea:*

$$\begin{aligned} h_{t|_{\mathrm{Diag}}} \overset{t\searrow 0}{\sim} & \sum_{j=0}^{(n-1)/2} t^{-\frac{n-2j}{2r}} \cdot A_{-\frac{n-2j}{2r}} + \sum_{\substack{j=1 \\ \alpha\nmid 2j+1}}^{\infty} t^{\frac{2j+1}{2r}} \cdot A_{\frac{2j+1}{2r}} + \sum_{\substack{j=1 \\ \frac{\beta}{2}\nmid j}}^{\infty} t^j \cdot A_j \\ & + \sum_{\substack{l=1 \\ l \text{ odd}}}^{\infty} t^{l\frac{\beta}{2}} \cdot A_{l\frac{\beta}{2}} + \sum_{\substack{l=1 \\ l \text{ odd}}}^{\infty} t^{l\frac{\beta}{2}} \log t \cdot B_{l\frac{\beta}{2}}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Mai mult,

$$A_j(x) = \frac{(-1)^j}{j!} \cdot q_{rj}(x,x).$$

Demonstrăm dezvoltări similare în toate celelalte cazuri și dăm formule explicite pentru toți coeficienții care apar în (1.3).

Motivație pentru a studia puteri de Laplacieni

Dacă P este un operator pseudodiferențial scalar auto-adjunct eliptic pozitiv de ordin întreg, atunci dezvoltarea asimptotică a nucleului căldurii al lui e^{-tP} a fost studiată de Duistermaat și Guillemin [20]. Rezultatul lor a fost generalizat apoi de Grubb [33, Teorema 4.2.2] în contextul fibraților vectoriali când ordinul lui P este pozitiv, nu neapărat întreg. Mai târziu, Bär și Moroianu [9] au studiat comportamentul asimptotic la timp mic al nucleului căldurii al lui $\Delta^{1/m}$, $m \in \mathbb{N}^*$, pentru un Laplacian generalizat Δ strict pozitiv și auto-adjunct. În Teorema **??**, obținem anularea unor termeni care apar în [33, Corolarul 4.2.7] pentru cazul nostru particular când $P = \Delta^r$ este o putere reală a unui Laplacian generalizat pozitiv și auto-adjunct Δ, $r \in (0,1)$. Mai mult, demonstrăm că, generic, termenii rămași nu se anulează.

Non-localitatea anumitor coeficienți

Este bine cunoscut faptul că coeficienții căldurii unui Laplacian generalizat pot fi calculați local în funcție de curbura conexiunii lui $\mathcal{E}$, de metrica riemanniană a lui M și de derivatele acestora (vezi, de exemplu, [12]). Acest lucru nu mai este valabil pentru coeficienții puterilor naturale ale lui t din Teorema 1.6.

Theorem 1.7. *Dacă r este irațional, atunci coeficienții căldurii A_j pentru $j \in \mathbb{N}$, $j \geq 1$ din Teorema 1.6 nu pot fi calculați local. Dacă $r = \frac{\alpha}{\beta}$ este rațional, atunci A_j nu pot fi calculați local pentru $j \in \mathbb{N} \setminus l\beta : l \in \mathbb{N}$. Mai mult, toți ceilalți coeficienți pot fi exprimați în funcție de coeficienții de căldură ai lui $e^{-t\,\Delta}$, astfel că aceștia* pot *fi calculați local.*

Nucleul căldurii ca o secțiune conormală

Nucleul căldurii clasic p_t poate fi privit ca o funcție poliomogen conormală pe un anumit spațiu blow-up. Melrose a introdus spațiul de căldură M^2_H prin efectuarea unui blow-up parabolic al diagonalei din $M \times M$ la timpul $t = 0$. Noul spațiu M^2_H este o varietate cu colțuri, cu hipersuprafețele de frontieră date de funcțiile care definesc frontiera ρ și ω_0. A demonstrat apoi că nucleul clasic al căldurii p_t aparține spațiului $\rho^{-n}\mathcal{C}^\infty(M^2_H)$ și, mai mult, se anulează rapid la fața de frontieră $\omega_0 = 0$ (vezi [45, Teorema 7.12]).

În cazul special $r = 1/2$, vom descrie *uniform* tranziția dintre comportamentul lui h_t la diagonală și în afara diagonalei pe măsură ce $t \searrow 0$. În acest caz, putem înțelege mai bine operatorul de căldură $e^{-t\,\Delta^{1/2}}$ pe un anumit spațiu blow-up *omogen* (în loc de parabolic) obținut prin blow-upul standard al lui $\{0\} \times \mathrm{Diag}$ în $[0, \infty) \times M \times M$.

Theorem 1.8. *Dacă n este par, atunci nucleul Schwartz h_t al operatorului $e^{-t\,\Delta^{1/2}}$ aparține $\rho^{-n}\omega_0 \cdot \mathcal{C}^\infty(\mathrm{M_{heat}})$. Dacă n este impar, atunci $h_t \in \rho^{-n}\omega_0 \cdot \mathcal{C}^\infty(\mathrm{M_{heat}}) + \rho \log \rho \cdot \omega_0 \cdot \mathcal{C}^\infty(\mathrm{M_{heat}})$.*

Chapter 5

Bibliografie

[1] M.S. Agronovič, *Some asymptotic formulas for elliptic pseudodifferential operators*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **21** (1987), 63-65.

[2] P. Albin, F. Rochon, D. Sher, *Resolvent, heat kernel and torsion under degeneration to fibered cusps*, Mem. Amer. Math. Soc. **269** (2021), no. 1314.

[3] C. Anghel, *Heat kernel asymptotics for real powers of Laplacians*, published online in Canad. J. Math (2023).

[4] C. Anghel, R. Stan, *Uniformization of Riemann surfaces revisited*, Ann. Global Anal. Geom. **62** (2022), no. 3, 603–615.

[5] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **77** (1975), 43–69.

[6] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975), 405–432.

[7] M.F. Atiyah, V.K. Patodi, I.M. Singer, *Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **79** (1976), 71–99.

[8] C. Bär, *The Dirac operator on hyperbolic manifolds of finite volume*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 3, 439–488.

[9] C. Bär, S. Moroianu, *Heat Kernel Asymptotics for Roots of Generalized Laplacians*, Int. J. Math. **14** (2003), 397-412.

[10] R. Bellman, *A brief introduction to theta functions*, Athena Series: Selected Topics in Mathematics Holt, Rinehart and Winston, New York (1961).

[11] O. Benabida, *PhD Thesis*, Work in progress.

[12] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer Verlag, (2004).

[13] N. Berline, M. Vergne, *A computation of the equivariant index of the Dirac operator*, Bull. Soc. Math France **113** (1985), 305-345.

[14] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *Le spectre d'une variété riemannienne*, Lecture Notes in Mathematics **194**, Springer, Berlin New York (1971).

[15] J.M. Bismut, *The Atiyah-Singer theorems: a probabilistic approach*, J. Funct. Anal. **57** (1984), 329-348.

[16] J. Bourguignon, P. Gauduchon, *Spineurs, opérateurs de Dirac et variations de métriques*, Comm. Math. Phys. **144** (1992), 581–599.

[17] J. Bourguignon, O. Hijazi, J. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu, *A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry*, European Mathematical Society, (2015).

[18] K. Chandrasekharan, R. Narasimhan, *Hecke's functional equation and arithmetical identities*, Ann. of Math. (2) **74** (1961), 1–23.

[19] E. D'Hoker, D. H. Phong, *On determinants of Laplacians on Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. **104** (1986), no. 4, 537–545.

[20] J.J. Duistermaat, V.W. Guillemin, *The spectrum of positive elliptic operators and periodic bicharacteristics*, Invent Math. **29** (1975), 39-79.

[21] C.L. Epstein, R.B. Melrose, G A. Mendoza, *Resolvent of the Laplacian on strictly pseudo-convex domains*, Acta Math. **167** (1991), no. 1-2, 1–106.

[22] M.A. Fahrenwaldt, *Off-diagonal heat kernel asymptotics of pseudodifferential operators on closed manifolds and subordinate Brownian motion*, Integral Equations Operator Theory **87** (2017), 327-347.

[23] E. Getzler, *Pseudodifferential operators on supermanifolds and the index theorem*, Comm. Math. Phys. **92** (1983), 163-178.

[24] P.B. Gilkey, *Invariance theory, the heat equation, and the Atiyah-Singer index theorem*, Second edition, Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, (1995).

[25] P.B. Gilkey, G. Grubb, *Logarithmic terms in asymptotic expansions of heat operator traces*, Comm. Partial Differential Equations **23** (1998), no. 5-6, 777-792.

[26] N. Ginoux, *The Dirac spectrum*, Springer, (2009).

[27] S. Golénia, S. Moroianu, *Spectral analysis of magnetic Laplacians on conformally cusp manifolds*, Ann. Henri Poincaré **9** (2008), $131 - 179$.

[28] S. Golénia, S. Moroianu, *The spectrum of Schrödinger operators and Hodge Laplacians on conformally cusp manifolds*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), $1-29$.

[29] D. Grieser, *Polyhomogeneous functions, regularized integrals, Push-Forward Theorem*, online lecture notes.

[30] D. Grieser, *Course on Singular Analysis*, online lecture notes.

[31] D. Grieser, *Basics of the b-calculus*, Approaches to Singular Analysis, Advances in Partial Differential Equations, pages 30-84, Basel, 2001, Birkhöuser.

[32] D. Grieser, M. Gruber, *Singular Asymptotics Lemma and Push-Forward Theorem*, Approaches to singular analysis (Berlin, 1999), 117–130.

[33] G. Grubb, *Functional calculus of pseudo-differential boundary problems*, Progress in Math. 65, Birkhäuser, Boston, 1986.

[34] A. Hassell, R. Mazzeo, R. Melrose, *Analytic surgery and the accumulation of eigenvalues*, Comm. Anal. Geom. **3** (1995), no. 1–2, 115–222.

[35] A. Hassell, A. Vasy, *The resolvent for Laplace-type operators on asymptotically conic spaces*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **51** (2001), no. 5, 1299–1346.

[36] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III*, Springer, Berlin, (1985).

[37] P. Loya, S. Moroianu, R. Ponge, *On the singularities of the zeta and eta functions of an elliptic operator*, Internat. J. Math. **23** (2012), no. 6, 1250020, 26pp.

[38] R. Lauter, S. Moroianu, *The Index of Cusp Operators on Manifolds with Corners*, Ann. Global Anal. Geom. **21** (2002), 31–49.

[39] L. Ji, *Spectral degeneration of hyperbolic Riemann surfaces*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 2, 263–313.

[40] K. Matsuzaki, *An extension of the collar lemma*, Perspectives of Hyperbolic Spaces, (2023).

[41] R.R. Mazzeo, *Elliptic theory of differential edge operators. I.*, Comm. Partial Differential Equations **16** (1991), no. 10, 1615–1664.

[42] P. McDonald, *The Laplacian on spaces with cone-like singularities*, MIT thesis, 1990.

[43] S. Minakshisundaram, A. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds*, Can. J. Math. **1** (1949), 242-256.

[44] R.B. Melrose, *Calculus of conormal distributions on manifolds with corners*, Internat. Math. Res. Notices 1992, no. 3, 51–61.

[45] R.B. Melrose, *The Atiyah-Patodi-Singer Index Theorem*, Research Notes in Mathematics, 4. A K Peters, Ltd., Wellesley, MA, (1993).

[46] R.B. Melrose, *Introduction to Microlocal Analysis*, online lecture notes.

[47] R.B. Melrose, *Differential analysis on manifolds with corners*, online book.

[48] R.B. Melrose, R.R. Mazzeo, *Analytic surgery and the eta invariant*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 1, 14-75.

[49] R.B. Melrose, R.R. Mazzeo, *Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries*, Asian. J. Math **2** (1998), no. 4, 833–866.

[50] R.B. Melrose, R.R. Mazzeo, *Meromorphic extension of the resolvent on complete spaces with asymptotically constant negative curvature*, J. Funct. Anal. **75** (1987), no. 2, 260–310.

[51] R.B. Melrose, V. Nistor, *Homology of pseudodifferential operators I. Manifolds with boundary*, arXiv:funct-an/9606005.

[52] L. Monk, R. Stan, *Spectral convergence of the Dirac operator on typical hyperbolic surfaces of high genus*, arXiv:2307.01074.

[53] S. Moroianu, *K-Theory of Suspended Pseudo-Differential Operators*, K-Theory **28** (2003), 167–181.

[54] S. Moroianu, *Weyl laws on open manifolds*, Math. Ann. **340** (2008), no. 1, 1–21.

[55] R.B. Paris, D. Kaminski, *Asymptotics and Mellin-Barnes Integrals*, Cambridge University Press, (2001).

[56] F. Pfäffle, *Eigenvalues of Dirac operators for hyperbolic degenerations*, Manuscr. Math. **116** (2005), no. 1, 1–29.

[57] P. Sarnak, *Determinants of Laplacians*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), no. 1, 113–120.

[58] M. Schulze, *On the resolvent of the Laplacian on functions for degenerating surfaces of finite geometry*, J. Funct. Anal. **236** (2006), no. 1, 120–160.

[59] L. Schwartz, *Généralisation de la notion de fonction et de dérivation. Théorie des distributions*, Ann. Télécommun. **3** (1948), 135–140.

[60] M. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Second Edition, Springer, (2001).

[61] R. Stan, *The Selberg trace formula for spin Dirac operators on degenerating hyperbolic surfaces*, arXiv: 2212.11793.

[62] R. Stan, *Conormal distributions and pseudodifferential operators*, online notes.

[63] E.T. Whittaker, G.N. Watson, *A Course of Modern Analysis*, Cambridge University Press, (1965).