ACADEMIA ROMÂNĂ
Școala de Studii Avansate a Academiei Române
Institutul de Matematică al Academiei Române ”Simion Stoilow”

INTEGRARE STOCASTICĂ PE VARIETĂȚI RIEMANN DIN PERSPECTIVA ANALIZEI FUNCȚIONALE

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Doctorand : Alexandru Mustățea

Conducător de doctorat : CS1 Dr. Radu Purice

București, 2022

CUPRINS

INTRODUCERE ȘI MOTIVAȚII

Textul de față își propune să dea un răspuns întrebării: putem integra o 1-formă netedă de-a lungul unei curbe continue? Când curba este diferențiabilă, răspunsul este afirmativ și oferit de conceptul de integrală curbilinie. Când însă curba nu mai este diferențiabilă, răspunsurile sunt mai multe: integrare Young, integrare în sensul teoriei "rough paths", integrare stocastică; aceasta din urmă va fi subiectul de interes al acestei teze.

Integrarea stocastică nu este o noutate: după tatonări ale mai multor matematicieni în zona proceselor Wiener, Kiyoshi Itô a obținut în 1944 prima construcție coerentă în $\mathbb{R}^n$ a unui nou (la acel moment) tip de integrală "curbilinie", denumit ulterior "integrală Itô". O alternativă la integrala Itô, primită cu reticență la început de comunitatea probabilistă, a fost dezvoltată de Ruslan Stratonovici în URSS, în anii '60, și numită ulterior "integrală Stratonovici". Istoria emergenței și clarificării graduale a acestor concepte este, desigur, mult mai bogată, dar nu face obiectul acestei teze; o prezentare cronologică detaliată a acesteia poate fi găsită în [JP04].

Dacă integrarea stocastică nu este o noutate, abordarea acesteia pe care o propunem în acest text este. În mod tradițional, conceptul este prezentat în $\mathbb{R}^n$, ca un capitol al analizei stocastice - deci folosind limbajul și tehnicile teoriei probabilităților. Puținele texte care se aventurează pe varietăți Riemann nu se abat de la acest limbaj. Mai mult, deși problema, așa cum am enunțat-o în primul paragraf, este una intrinsecă geometric, construcția integrării stocastice pe varietăți Riemann se face adesea recurgând la metode extrinsece, folosind de obicei teorema lui Whitney pentru a scufunda varietatea într-un spațiu euclidian unde pot fi folosite proprietățile uzuale ale mișcării browniene. Textul de față își propune o abordare complet nouă: pe de o parte, integrarea stocastică va fi obținută folosind tehnici de analiză funcțională și geometrie riemanniană; pe de altă parte, toate demonstrațiile vor fi intrinseci, această prezentare a conceptului studiat având avantajul de a îi scoate în evidență substratul geometric, ce are tendința de a rămâne în umbră și neexplorat în abordările pur probabiliste. Mai mult, construcția propusă va arăta că integralele Itô și Stratonovici sunt doar două dintr-o familie infinită de posibile integrale stocastice, această familie fiind însă foarte precis clasificată și oricare două integrale ce îi aparțin fiind legate printr-o relație explicită foarte simplă (putând astfel spune că, în esență, există o singură integrală stocastică, toate celelalte fiind variații simple ale acesteia). În particular, vom vedea că integrala Stratonovici este integrala stocastică cu cele mai convenabile proprietăți geometrice (dintre toate integralele stocastice ea având cele mai multe proprietăți în comun cu integrala curbilinie uzuală), în timp ce integrala Itô are cele mai convenabile proprietăți analitice. Pentru ușurința navigării prin text, vom oferi în cele ce urmează o prezentare rapidă a capitolelor acestei teze.

Capitolul 1 este dedicat înțelegerii în profunzime a operatorului Laplace pe o varietate Riemann (M, g) (în acest text M va fi mereu conexă) și conține rezultate clasice, de bază: este definit operatorul Laplace-Beltrami Δ apoi, pentru a se putea folosi rezultate de analiză funcțională, se construiește extensia Friedrichs L a lui $-\Delta$ și se studiază spectrul său și o condiție necesară pentru autoadjuncția esențială. Un obiect esențial ce se prezintă în continuare este nucleul căldurii, înțeles ca soluție fundamentală pozitivă minimală a ecuației căldurii: construcția sa pe varietăți Riemann arbitrare fiind cunoscută, ea este doar schițată aici (detaliile putând fi găsite în referințele citate), în detaliu fiind efectuată doar construcția pe varietăți Riemann compacte. Cum nucleul căldurii pe varietăți nu are, în general, o formulă explicită, capitolul se încheie cu enunțarea și demonstrarea unor estimări gaussiene (superioare și inferioare) ale acestuia.

Capitolul al 2-lea este dedicat în întregime construcției măsurii Wiener pe spații de curbe în varietăți Riemann. La fel ca în cazul integralelor stocastice, ea este construită în literatură folosind procedee probabiliste. Până în 2011, însă, construcții pur geometrice, intrinsece, nu erau cunoscute; în 2011, însă, Christian Bär și Frank Pfäffle au prezentat o asemenea abordare, pe care o adoptăm în acest text. Astfel, vom obține rapid măsura Wiener pe spațiul traiectoriilor (arbitrare, nu neapărat continue) în varietate folosind teorema de extensie a lui Kolmogorov, tot efortul constând în a arăta apoi că această măsură este concentrată pe traiectoriile continue (de fapt, chiar continue Hölder). Acest rezultat este garantat de satisfacerea condiției de continuitate a lui Kolmogorov. Aceasta însă este o condiție integrală care, din păcate, nu se verifică pe varietăți Riemann arbitrare, așa încât vom fi obligați să recurgem la o abordare indirectă: mai întâi o vom verifica pe varietăți compacte, apoi pe domenii relativ compacte cu frontieră netedă (folosind conceptul de "dublu riemannian" pentru a ne reduce la cazul anterior) - ceea ce ne va permite să construim măsura Wiener asociată intrinsec spațiului traiectoriilor conținute în asemenea domenii. În final, vom considera o exhaustiune cu astfel de domenii și vom defini măsura Wiener asociată întregii varietăți ca limită a măsurilor Wiener asociate domeniilor din exhaustiune. Capitolul se încheie cu o aplicație clasică, și anume formula Feynman-Kac, care prezintă într-o formă integrală în raport cu măsura Wiener soluțiile ecuației căldurii cu condiții inițiale date.

Capitolul al 3-lea prezintă primul rezultat original al lucrării. Cum L este un operator autoadjunct în $L^2(M)$, va genera un semigrup de operatori $(\mathrm{e}^{-tL})_{t\geq 0}$ numit "semigrupul căldurii"; se poate arăta că nucleul căldurii construit în capitolul 1 este nucleul integral corespunzător semigrupului căldurii. Este rezonabil atunci să extindem contextul în care vorbim despre nucleul căldurii în felul următor: considerăm un fibrat hermitic E peste o varietate Riemann M, înzestrat cu o conexiune hermitică ∇ din care se obține imediat operatorul $\nabla^*\nabla$, a cărui extensie Friedrichs generează la rândul său un semigrup "al căldurii" în E. Ne punem întrebarea: admite acest semigrup, la rândul său, un nucleu integral în sens fibrat, cu bune proprietăți de integrabilitate? Când M este compactă rezultatul este cunoscut și construcția este analoagă celei din capitolul 1. Pentru varietăți arbitrare, însă, o construcție pur analitic-funcțională a acestui nucleu a fost oferită abia recent, în 2015, de Batu Güneysu, în ipoteze foarte generale. Acest capitol oferă o construcție alternativă, complet diferită de cea a lui Güneysu, în ipoteze puțin mai restrictive (anume, acceptăm existența nucleului căldurii construit în capitolul 1) dar având avantajul de a fi mai intuitivă și de a prezenta și un șir de aproximații concrete ale acestui nucleu. Dacă instrumentul central al lui Güneysu este teorema de diferențiabilitate a lui Lebesgue, instrumentul central în construcția noastră propusă în acest capitol este teorema lui Chernoff de aproximare în topologia tare a semigrupurilor de operatori în spații Banach. Capitolul se încheie cu studiul câtorva proprietăți de regularitate ale nucleului căldurii în fibrați astfel construit.

Capitolul al 4-lea prezintă cel de-al doilea rezultat original al acestei teze, cel principal de fapt, și anume construcția integralelor stocastice folosind doar tehnici de analiză funcțională și geometrie riemanniană, și clasificarea acestor integrale. Folosind existența nucleului căldurii în fibrați obținută în capitolul precedent, începem prin a obține o funcție esențial mărginită pe spațiul traiectoriilor continue în M, care vom arăta ulterior printr-un raționament tehnic, bazat pe aceeași teoremă a lui Chernoff utilizată mai sus, că are valoarea absolută 1. Mai mult, vom arăta că această funcție este chiar un grup unitar tare continuu cu un parametru, de unde, folosind teorema lui Stone, vom deduce că are un generator autoadjunct, ce se va demonstra apoi a fi o funcție măsurabilă. Această funcție se va arăta mai târziu a fi integrala Stratonovici. Pe de altă parte, plecând de la probabilități P Borel, regulate, pe intervalul $[0, 1]$, vom construi niște sume asemănătoare sumelor Riemann asociate unei integrale curbilinii, și vom arăta că acestea au limite în măsură. Dacă P este măsura Dirac δ_0, atunci limita obținută va fi chiar integrala Itô, iar dacă P este măsura Lebesgue pe $[0, 1]$ atunci limita corespunzătoare va fi integrala Stratonovici. Aceasta ne motivează să numim integrală stocastică orice limită a unei astfel de sume Riemann asociate unei asemenea probabilități P. Deși, în aparență, există tot atâtea integrale stocastice câte probabilități Borel, regulate, P există, vom vedea că în realitate orice două asemenea probabilități cu același moment de ordinul 1 produc aceeași integrală stocastică, așadar integralele stocastice înțelese în sensul de mai sus sunt clasificate de momentele de ordinul 1 ale probabilităților Borel, regulate, pe $[0, 1]$. Mai mult, orice două asemenea integrale stocastice diferă printr-un termen simplu pe care îl vom putea scrie explicit, așadar abundența aparent infinită a integralelor stocastice se reduce, în esență, la una singură dintre ele (oricare), toate celelalte fiind translații ale acesteia cu un termen foarte precis. Vom obține, în plus, câteva rezultate clasice de analiză stocastică, de exemplu lema lui Itô (care în acest cadru teoretic va avea o demonstrație extrem de scurtă și de simplă), și o generalizare a formulei Feynman-Kac corespunzând situației în care propagarea căldurii are loc în prezența unui câmp magnetic (codificat matematic de o 1-formă netedă, a cărei integrală Stratonovici va apărea în mod natural).

Capitolul al 5-lea îmbunătățește câteva rezultate din cel precedent, în ipoteza puțin mai restrictivă că 1-formele pe care le integrăm stocastic au suportul compact. Cu această condiție suplimentară vom arăta că integralele stocastice sunt de pătrat integrabil în raport cu măsura Wiener. De asemenea, vom obține un analog al izometriei lui Itô, care ne va permite să extindem integralele stocastice de la spațiul 1-formelor netede cu suport compact la spații mult mai mari de 1-forme.

Ultimul capitol, al 6-lea, se desfășoară după o structură conceptuală și tehnică asemănătoare celei din capitolul al 4-lea. Scopul său este de a arăta cum poate fi înțeles transportul paralel stocastic în fibrați hermitici peste varietăți riemanniene dintr-un punct de vedere pur analitic-funcțional și geometric, fără a recurge la conceptele specifice teoriei probabilităților. Vom arăta că transportul paralel stocastic poate fi înțeles în mod natural ca secțiune de pătrat integrabil (de fapt, chiar esențial mărginită) într-un anumit fibrat pull-back, și că el este limita unui șir de aproximații concrete în topologia normei hilbertiene pe acest spațiu de secțiuni. Formula Feynman-Kac se poate formula și în acest context (iar formularea pe care o vom da pare să fie semnificativ mai generală decât cele existente în acest moment în literatură), și ea va face să apară în mod natural transportul paralel stocastic. Dacă fibratul considerat este trivial de rangul 1, regăsim rezultatele din capitolul 4 legate de integrala stocastică Stratonovici.

1. LAPLACIANUL, NUCLEUL CĂLDURII ȘI FUNCȚIA DISTANȚĂ PE VARIETĂȚI RIEMANN

Acest capitol își propune să prezinte dintre multele proprietăți ale funcției distanță pe o varietate Riemann câteva dintre cele care se manifestă în relație cu operatorul laplacian și cu ecuația căldurii. De asemenea, este prezentată în detaliu construcția Minakshisundaram-Pleijel a nucleului căldurii pe o varietate Riemann compactă.

1.1 Laplacianul pe varietăți Riemann

Fie (M, g) o varietate riemanniană conexă (deci separabilă) cu $\dim M = n$. Fie $C(M)$ și $C_0(M)$ algebrele funcțiilor continue, respectiv continue cu suport compact, pe M. Fie Δ laplacianul acționând pe funcții netede, dat în coordonate de

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j} \partial_i (\sqrt{\det g}\, g^{ij} \partial_j) \ .$$

Forma de volum este forma dată în coordonate de $\mathrm{vol} = \sqrt{\det g}\, \mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$. Fie μ_M măsura asociată formei de volum, obținută prin aplicarea teoremei Riesz funcționalei pozitive $C_0(M) \ni f \mapsto \int_M f \,\mathrm{vol} \in \mathbb{R}$. Fie $d(x, y) = \inf_c \int_a^b \|c'(t)\| \,\mathrm{d}t$ distanța asociată structurii riemanniene, unde c parcurge mulțimea curbelor netede cu $c(a) = x$ și $c(b) = y$. Pentru $x \in M$ și $r > 0$ vom nota $B(x, r) = \{y \in M \mid d(x, y) < r\}$. Dacă f este o funcție continuă vom nota $f_+ = \max(f, 0)$.

Vom considera operatorul Laplace-Beltrami Δ dens definit pe $L^2(M)$ (în general, când vom considera un operator diferențial ca acționând în $L^2(M)$ îi vom asocia ca domeniu de definiție subspațiul dens $C_0^\infty(M)$). Acesta nu este autoadjunct, deoarece în general $\mathrm{Dom}\,\Delta^* \neq \mathrm{Dom}\,\Delta$. De exemplu, dacă $M = (0, 1)$ cu structura riemanniană uzuală, cum

$$\mathrm{Dom}\,\Delta^* = \left\{ f \in L^2(M) \mid \sup_{u \in C_0^\infty(M)} |\langle \Delta u, f\rangle| < \infty \right\},$$

este clar că $1 \in \mathrm{Dom}\,\Delta^*$, deși $1 \notin \mathrm{Dom}\,\Delta$.

În aceste condiții, cum foarte multe din teoremele de analiză funcțională pe care le vom utiliza necesită operatori autoadjuncți, va trebui să înlocuim în considerațiile ulterioare Δ cu o extensie a sa autoadjunctă; nu este însă clar dacă asemenea extensii există, iar dacă sunt mai multe nu este clar cum să alegem una anume dintre ele. Din fericire, următorul rezultat arată că asemenea extensii există și, mai mult, printre ele există una maximală într-un sens pe care îl vom prciza imediat (și deci unică).

Teorema 1.1. *Orice operator $A : \mathrm{Dom}\, A \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ simetric, mărginit inferior și dens-definit admite o extensie autoadjunctă $\hat{A}$ cu aceeași margine inferioară (numită extensia Friedrichs). Dacă A' este o altă extensie simetrică a lui A cu $\mathrm{Dom}\, A' \subseteq \widehat{\mathrm{Dom}\, A}$, atunci $\hat{A}|_{\mathrm{Dom}\, A'} = A'$.*

1.2 Completitudinea metrică și autoadjuncția esențială a laplacianului

Teorema 1.2. *Dacă M este completă, atunci operatorul $-\Delta : C_0^\infty(M) \subset L^2(M) \to L^2(M)$ este esențial autoadjunct în $L^2(M)$.*

1.3 Funcția distanță și spectrul laplacianului

Scopul acestei secțiuni este estimarea infimumului spectrului extensiei Friedrichs $\lambda(M)$ a opusului operatorului Laplace-Beltrami folosind funcția distanță.

Teorema 1.3. *Dacă există o funcție Lipschitz $f : M \to \mathbb{R}$ de constantă Lipschitz 1, și o constantă $c \geq 0$ astfel încât $\Delta f \geq c$ în sens distribuțional, atunci $\lambda(M) \geq \frac{c^2}{4}$.*

Teorema 1.4. *Dacă există o funcție Lipschitz $f : M \to \mathbb{R}$ de constantă Lipschitz 1, și o constantă $c > 0$, astfel încât $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ și $\mathrm{e}^{-cf} \in L^1(M)$, atunci $\lambda(M) \leq \frac{c^2}{4}$.*

1.4 Nucleul căldurii pe varietăți Riemann

În această secțiune ne propunem să construim nucleul căldurii pe varietăți Riemann (în particular, vom prezenta în detaliu construcția acestuia pe varietăți compacte) și să îi obținem margini inferioare și superioare gaussiene.

Definiția 1.5. *Vom numi **nucleul căldurii** pe M unica soluție netedă, pozitivă, $h : (0,\infty) \times M \times M \to [0,\infty)$, minimală în raport cu inegalitatea între funcții, a ecuației căldurii $(\partial_t - \Delta)u = 0$, cu condiția inițială $\lim_{t\to 0_+} \int_M h(t,x,y)f(x)\,\mathrm{d}x = f(y)$ pentru orice $f \in C_b(M)$ și orice $y \in M$.*

1.4.1 Construcția nucleului căldurii pe varietăți Riemann compacte

În această secțiune se construiește, cu toate detaliile, nucleul căldurii pe varietăți Riemann compacte, metoda urmată fiind cea clasică concepută de Minakshisundaram și Pleijel, nucleul căldurii fiind obținut ca limită a unui șir de parametrice ale ecuației căldurii. Prezentarea urmează în esență [Rosenberg97] și [BGM71]; mai multe convenții și notații din prezentul text diferă de cele corespunzătoare din referințe.

1.4.2 Nucleul căldurii pe varietăți Riemann necompacte

Până acum am construit, cu toate detaliile, nucleul căldurii pe varietăți compacte. În continuare vom schița construcția lui pe varietăți necompacte, oferind cititorului referințele bibliografice necesare pentru studierea detaliilor. Strategia va fi de a îl construi pe domenii relativ compacte cu frontiera netedă, și apoi de a folosi o exhaustiune cu asemenea domenii și un proces de trecere la limită pentru a obține nucleul căldurii pe întreaga varietate. (Vom folosi aceeași abordare în capitolul următor pentru construirea măsurii Wiener.)

Dacă U este un domeniu relativ compact cu frontiera netedă, metoda Minakshisundaram - Pleijel poate fi adaptată pentru a produce nucleul căldurii pe U, adică unica soluție elementară a ecuației căldurii pe U, continuă pe $\overline{U}$ și care se anulează pe frontiera ∂U (nucleul rezultat se va numi "nucleul căldurii Dirichlet pe U"). Deosebirea față de metoda descrisă până acum pentru varietăți compacte constă în complicația suplimentară pur tehnică de a asigura continuitatea și anularea la frontieră, însă ideea este aceeași. Detalii pot fi găsite, oarecum succint, în cap. VII din [Chavel84], însă o demonstrație completă și chiar mai generală (în care se construiește nucleul căldurii pe forme diferențiale de orice grad) este dată în secțiunea 5 [RaySi71].

Alegând acum o exhaustiune cu domenii relativ compacte cu frontieră regulată $M = \bigcup_{i\geq 0} U_i$, și notând cu h_{U_i} nucleul căldurii Dirichlet pe U_i, se definește $h = lim_{i\to\infty} h_{U_i}$ ca limită punctuală. Se arată că această limită există și că nu depinde de exhaustiunea aleasă, precum și că satisface definiția nucleului căldurii pe M. Detalii pot fi găsite în cap. VIII din [Chavel84] și în [Dodziuk83].

Teorema 1.6. *Nucleul căldurii $h : (0,\infty) \times M \times M \to [0,\infty)$ are următoarele proprietăți:*

1. *$h > 0$;*
2. *h este neted;*
3. *$h(\cdot,-,y)$ satisface ecuația căldurii (omogenă) pentru orice $y \in M$;*
4. *$\lim_{t\to 0} \int_M h(t,x,y)\,f(y)\,\mathrm{d}y = f(x)$ pentru orice $x \in M$ și orice $f \in C_b(M)$;*
5. *h este minimal în mulțimea soluțiilor fundamentale netede pozitive ale ecuației căldurii;*
6. *h este unic cu proprietățile de mai sus;*

7. $h(t,x,y) = h(t,y,x)$ pentru orice t,x,y;

8. nucleul căldurii se bucură de proprietatea "de convoluție"

$$\int_M h(u,y,p)\, h(v,p,z)\, \mathrm{d}p = h(u+v,y,z) \ ;$$

9. $h(t,x,\cdot) \in L^2(M)$ pentru orice $t>0$ și $x \in M$; din simetrie, rezultă că $h(t,\cdot,y) \in L^2(M)$ pentru orice $t>0$ și $y \in M$;

10. $\int_M h(t,x,y)\, \mathrm{d}y \le 1$; dacă M este completă, cu curbura Ricci mărginită inferior, atunci $\int_M h(t,x,y)\, \mathrm{d}y = 1$;

11. $h(t,\cdot,-)$ este nucleul integral al lui $\mathrm{e}^{-tH} : L^2(M) \to L^2(M)$ pentru orice $t>0$, H fiind extensia Friedrichs a laplacianului $-\Delta$, adică $(\mathrm{e}^{-tH} f)(x) = \int_M h(t,x,y)\, f(y)\, \mathrm{d}y$ pentru orice $f \in L^2(M)$ și aproape orice $x \in M$.

1.5 Margini superioare gaussiene ale nucleului căldurii

Teorema 1.7. *Există o funcție continuă și mărginită $r : M \to (0,\infty)$ și $C>0$ astfel încât dacă $x,y \in M$ și $t \ge t_0 > 0$ atunci*

$$h(t,x,y) \le \frac{C}{[\min(2t_0, r(x)^2) \min(2t_0, r(y)^2)]^{\frac{n}{4}}} \left[1 + \frac{d(x,y)^2}{t}\right]^{\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{d(x,y)^2}{4t} - \lambda(M)(t-t_0)\right] \ .$$

1.6 Margini inferioare gaussiene pentru nucleul căldurii

În încheiere, vom obține margini gaussiene inferioare pentru nucleul căldurii bazându-ne pe inegalitatea parabolică a lui Harnack pe care o vom demonstra în continuare. Vom presupune că M este compactă, deci există $K>0$ astfel încât $\mathrm{Ric} \ge -K$, unde Ric este curbura Ricci a lui M.

Teorema 1.8. *Dacă $T>0$ este fixat, M este compactă, iar $x,y \in M$ și $0<t<T$, atunci*

$$h(t,x,y) \ge t^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{d(x,y)^2}{4t}\left(1 + \frac{2KT}{3}\right) - \frac{nKt}{2}\right].$$

2. O CONSTRUCȚIE GEOMETRICĂ A MĂSURII WIENER ASOCIATE UNEI VARIETĂȚI RIEMANN

Scopul acestui capitol este să construim măsura Wiener pe spațiul curbelor continue într-o varietate riemanniană, folosind doar metode geometrice și teorema de extensie a lui Kolmogorov. Aceasta din dorința de a evidenția dimensiunea riemanniană a problemei, evitând astfel construcțiile probabilistice existente în literatură, bazate pe ecuații diferențiale stocastice sau pe aplicația desfășurătoare a lui Cartan. Deși a fost conceput independent, acest text este foarte asemănător cu cel din [BP11] care folosește aproape aceleași idei și tehnici; textul citat uneori oferă soluții mai simple (de exemplu, nu folosește estimări gaussiene ale nucleului căldurii, ci o estimare mult mai simplă), alteori este mai greoi decât cel propus aici (discuția despre distanța intrinsecă pe domenii regulate este inutil de complicată).

2.1 Condiția de continuitate a lui Kolmogorov pentru sisteme proiective canonice

Fie $t > 0$, fie $\Delta_k = \{\frac{jt}{2^k} \mid j \in \mathbb{N} \cap [0, 2^k]\}$ și fie $\Delta = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \Delta_k$. Fie (M, d) un spațiu metric conex. Fie $\mathrm{Fin}(0,t) = \{F \subset [0,t] \mid F \text{ este finită}\}$. Pentru $I \in \mathrm{Fin}(0,t)$ fie $M^I = \{c : I \to M\}$ și pentru $J \supseteq I$, fie $p_{IJ} : M^J \to M^I$ restricția naturală. Să presupunem că pentru orice $I \in \mathrm{Fin}(0,t)$ există o măsură Borel, pozitivă, finită, regulată w_I pe M^I astfel încât $p_{IJ*}w_J = w_I$ pentru orice $J \supseteq I$. Fie $M_t = \prod_{s\in[0,t]} M = \{c : [0,t] \to M\}$, înzestrată cu topologia produs (adică cea a convergenței punctuale) și cu σ-algebra Borel asociată, și fie $p_I : M_t \to M^I$ proiecția naturală pentru orice $I \in \mathrm{Fin}(0,t)$.

Teorema 2.1 (Teorema de extensie a lui Kolmogorov)**.** *Există o unică măsură finită Borel w_t pe M_t astfel încât $p_{I*}w_t = w_I$.*

Teorema 2.2. *1. Dacă există $0 < b < a$ și $C > 0$ astfel încât*

$$\int_{M_t} d(c(s), c(s'))^a \,\mathrm{d}w_t(c) \le C|s - s'|^{1+b}$$

pentru orice $s, s' \in [0,t]$ ("condiția de continuitate a lui Kolmogorov"), și dacă $0 < \varepsilon < \frac{b}{a}$, atunci submulțimea curbelor continue Hölder de exponent ε definită de $\mathcal{H}_t(\varepsilon) = \{c \in M_t \mid \exists L > 0 \text{ astfel încât } d(c(s), c(s')) \le L|s - s'|^\varepsilon \,\forall s, s' \in [0,t]\}$ este Borel în M_t și w_t este concentrată pe ea.

2. Dacă M este separabil și $\mathcal{H}_t(\varepsilon)$ este înzestrată cu topologia convergenței uniforme (care este urma topologiei compact-deschise pe spațiul curbelor continue $\mathcal{C}_t = \{c \in M_t \mid c \text{ continuă}\}$ și este dată de distanța $D(c, c') = \max_{s\in[0,t]} d(c(s), c'(s))$), atunci restricția lui w_t la $\mathcal{H}_t(\varepsilon)$ este Borel și regulată în raport cu această topologie.

2.2 Măsura Wiener asociată unei varietăți Riemann

Vom folosi acum rezultatele de mai sus în cazul când spațiul metric este o varietate Riemann (M, g) de dimensiune n, iar d este distanța intrinsecă provenind din structura riemanniană. De asemenea, vom fixa un punct arbitrar $x_0 \in M$ (capătul de pornire, la momentul 0, al traiectoriilor din spațiul pe care vom construi măsura w_t).

Dacă $I = \{0 \le t_1, \dots, t_k \le t\} \in \mathrm{Fin}(0,t)$, înzestrăm varietatea M^I cu măsura

$$w_{x_0,I}(A) = \int_M \mathrm{d}x_1\, h(t_1, x_0, x_1) \dots \int_M \mathrm{d}x_k\, h(t_k - t_{k-1}, x_{k-1}, x_k)\, 1_A(x_1, \dots, x_k) \ ,$$

unde convenim că $\int_M h(0, y, z) f(z) \,\mathrm{d}z = f(y)$ și unde 1_A este funcția caracteristică a submulțimii Borel $A \subseteq M^I$.

Mulțumită proprietății de convoluție a nucleului căldurii, este ușor de arătat că dacă $I \subseteq J$, atunci $p_{IJ*} w_{x_0,J} = w_{x_0,I}$. Este de asemenea clar că $w_{x_0,I}$ este o măsură Borel, pozitivă, mărginită de 1 și regulată.

2.2.1 Măsura Wiener asociată unei varietăți Riemann compacte

Cum r din teorema 1.7 este continuă și M este compactă, există $\rho = \min_{x \in M} r(x) > 0$. Luând $s = s_0$ în acea formulă, obținem marginea superioară mai convenabilă

$$h(s, y, z) \leq C \left(1 + \frac{d(y,z)^2}{s}\right)^{\frac{n}{2}} \min(2s, \rho^2)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{d(y,z)^2}{4s}\right) . \tag{2.1}$$

Se arată că condiția de continuitate a lui Kolmogorov din teorema 2.2.(1) este satisfăcută în mod natural în acest context. Mai precis, dacă $a > 2$ atunci

$$\int_{M_t} d(c(u), c(v))^a \, \mathrm{d}w_t(c) \leq K \min(2(v-u), \rho^2)^{-\frac{n}{2}} (v-u)^{\frac{n}{2}+\frac{a}{2}} \leq$$
$$\leq \begin{cases} 2^{-\frac{n}{2}} K (v-u)^{\frac{a}{2}}, & 2(v-u) < \rho^2 \\ K \rho^{-n} t^{\frac{n}{2}} (v-u)^{\frac{a}{2}}, & 2(v-u) \geq \rho^2 \end{cases},$$

de unde $\int_{M_t} d(c(u), c(v))^a \, \mathrm{d}w_t(c) \leq C(t)(v-u)^{1+b}$, unde $C(t) = K \max(2^{-\frac{n}{2}}, \rho^{-n} t^{\frac{n}{2}})$ și $b = \frac{a}{2} - 1$, ceea ce arată că condiția de continuitate a lui Kolmogorov este îndeplinită. Aceasta înseamnă că există o unică măsură $w_{x_0,t}$ pozitivă, Borel, regulată, mărginită de 1 (pentru că integrala lui h este mărginită de 1), pe $\bigcap_{0<\varepsilon<\frac{1}{2}} \mathcal{H}_t(\varepsilon)$ (și anume, restricția lui w_t). Aceasta este măsura Wiener pe spațiul traiectoriilor din M.

2.2.2 Măsura Wiener asociată unui domeniu regulat

Fie acum (M, g) o varietate Riemann arbitrară.

Definiția 2.3. *Un domeniu regulat este o submulțime deschisă conexă relativ compactă cu bordul neted.*

Vom presupune că x_0 este conținut în toate domeniile regulate despre care vom vorbi.

Dacă $U \subseteq M$ este un domeniu regulat, înzestrăm $\overline{U}$ cu distanța intrinsecă $d_{\overline{U}}(p,q) = \inf\{L(c) \mid c : [0,1] \to \overline{U}$ este netedă și unește p și $q\}$, unde $L(c) = \int_0^1 \sqrt{g(\dot{c}(s), \dot{c}(s))} \, \mathrm{d}s$ este lungimea lui c.

Fie acum (U', g') un dublu riemannian al lui $\overline{U}$: aceasta înseamnă că $\overline{U}$ se scufundă neted ca subvarietate cu bord în U', și că $g'|_{\overline{U}} = g|_{\overline{U}}$. Detalii privitoare la această construcție pot fi găsite în subcapitolul 5.5 de la p.116 din [Duff56]. Dacă $d_{U'}$ este distanța riemanniană intrinsecă pe U', atunci $d_{U'}|_{\overline{U}} \leq d_{\overline{U}}$.

Propoziția 2.4. *Există $\alpha_U > 0$ astfel încât $d_{\overline{U}} \leq \alpha_U d_{U'}|_{\overline{U}}$.*

Fie $h_{\overline{U}}$ nucleul căldurii Dirichlet al lui $\overline{U}$, și $h_{U'}$ nucleul căldurii lui U'. Ideea este să transportăm problema pe U', unde deja știm că această condiție este îndeplinită, înlocuind $d_{\overline{U}}$ cu $\alpha_U \, d_{U'}$ și $h_{\overline{U}}$ cu $h_{U'}$ (ținând cont că nucleul căldurii unei varietăți este minimal, deci $h_{\overline{U}} \leq h_{U'}$ pe $\overline{U} \subset U'$). Luând $a > 2$ și $0 < u < v < t$ avem:

$$\int_{(\overline{U})_t} d_{\overline{U}}(c(u), c(v))^a \, \mathrm{d}(w_{\overline{U}})_{x_0,t}(c) = \int_{\overline{U}} h_{\overline{U}}(u, x_0, y) \left(\int_{\overline{U}} h_{\overline{U}}(v-u, y, z) \, d_{\overline{U}}(y,z)^a \, \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y$$
$$\leq \alpha_i \int_{U'} h_{U'}(u, x_0, y) \left(\int_{U'} h_{U'}(v-u, y, z) \, d_{U'}(y,z)^a \, \mathrm{d}z\right) \mathrm{d}y =$$
$$= \alpha_i \int_{(U')_t} d_{U'}(c(u), c(v))^a \, \mathrm{d}(w_{U'})_{x_0,t}(c) \leq \alpha_i \, K_i(t) \, (v-u)^{1+(\frac{a}{2}-1)} ,$$

unde $(w_{\overline{U}})_{x_0,t}$ și $(w_{U'})_{x_0,t}$ sunt măsurile obținute din teorema de extensie a lui Kolmogorov pe spațiile $(\overline{U})_t$ și respectiv $(U')_t$, iar $K_i(t)$ este constanta $C(t)$ corespunzând lui U' obținută ca în subsecțiunea precedentă. Cum condiția de continuitate a lui Kolmogorov este îndeplinită, urmează că $(w_{\bar{U}})_{x_0,t}$ este concentrată ca o măsură pozitivă, Borel, mărginită de 1, regulată, pe $\mathcal{H}_{t,\overline{U}}(\varepsilon)$, spațiul curbelor continue Hölder de exponent Hölder $\varepsilon > 0$, conținute în $\overline{U}$, pentru orice $\varepsilon < \frac{1}{2}$.

2.2.3 Măsura Wiener asociată unei varietăți Riemann arbitrare

Propoziția 2.5. *Există exhaustiuni cu închideri de domenii regulate $(\overline{U}_k)_{k\in\mathbb{N}}$, adică $\overline{U}_k \subset U_{k+1}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \overline{U}_k = M$. Mai mult, putem lua $x_0 \in \overline{U}_k$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$.*

Fie $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ și fie $(w_k)_{x,t}$ măsura Wiener pe $\mathcal{H}_{t,\overline{U}_k}(\varepsilon)$, așa cum a fost construită în subsecțiunea precedentă. Scufundarea naturală $i_k : \overline{U}_k \to M$ induce o scufundare naturală $i_k : \mathcal{H}_{t,\overline{U}_k}(\varepsilon) \to \mathcal{H}_{t,M}(\varepsilon)$, care ne permite să considerăm măsura transportată $(i_k)_*(w_k)_{x,t}$ pe $\mathcal{H}_{t,M}(\varepsilon)$. Observăm că acest șir de măsuri este mărginit de 1 și crescător deoarece $h_{U_k} \le h_{U_l}$ pe $\overline{U}_k$ (din nou, din proprietatea de minimalitate a nucleului căldurii).

Argumentul din teorema 2.2.(2) arată de asemenea că σ-algebra Borel a lui $\mathcal{H}_{t,M}(\varepsilon)$ coincide cu σ-algebra generată de submulțimile de forma $p_I^{-1}(B)$ cu $I \in \mathrm{Fin}(0,t)$ și $B \subseteq M^I$ Borel. De aici urmează că $(i_k)_*(w_k)_{x_0,t}(B) \le (i_l)_*(w_l)_{x_0,t}(B)$ pentru orice submulțime Borel $B \subseteq \mathcal{H}_{t,M}(\varepsilon)$, deci are sens să definim

$$w_{x_0,t}(B) = \lim_{k\to\infty} (i_k)_*(w_k)_{x_0,t}(B) = \sup_{k\ge 0} (i_k)_*(w_k)_{x_0,t}(B)$$

pentru orice submulțime Borel $B \subseteq \mathcal{H}_{t,M}(\varepsilon)$.

Propoziția 2.6. *$w_{x_0,t}$ este o măsură pozitivă, Borel, regulată, mărginită de 1, pe $\mathcal{H}_{t,M}(\varepsilon)$.*

Propoziția 2.7. *Pentru orice $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ măsura Wiener $w_{x_0,t}$ este chiar măsura Wiener și este concentrată pe $\{c \in \mathcal{H}_t(\varepsilon) \mid c(0) = x_0\}$.*

2.3 Formula Feynman-Kac

Una din utilizările clasice ale măsurii Wiener este formula Feynman-Kac, care arată cum se propagă în timp o distribuție inițială de temperatură f în prezența unui potențial V.

Teorema 2.8. *Dacă $V : M \to \mathbb{R}$ este o funcție continuă mărginită inferior, și dacă $f \in L^2(M)$, atunci*

$$[\exp(-tL - tV)f](x) = \int_{M_t} \exp\left(\int_0^t -V(c(s))\,\mathrm{d}s\right) f(c(t))\,\mathrm{d}w_{x_0,t}(c) \ .$$

3. O CONSTRUCȚIE ANALITIC-FUNCȚIONALĂ A NUCLEULUI CĂLDURII ÎN FIBRAȚI HERMITICI PESTE VARIETĂȚI RIEMANN

Acest capitol prezintă prima contribuție originală a autorului, și anume construcția nucleului căldurii asociat unui laplacian definit de o conexiune într-un fibrat hermitic peste o varietate Riemann arbitrară, și obținerea unei margini superioare pentru acesta. O asemenea construcție era deja cunoscută pe varietăți Riemann compacte, dar la momentul începerii studiilor doctorale (noiembrie 2015) una pentru varietăți Riemann arbitrare s-a dovedit imposibil de găsit în literatura de specialitate, ceea ce a justificat prezentul demers.

3.1 Motivație și context

Fie M o varietate Riemann separabilă de dimensiune n, și $E \to M$ un fibrat hermitic de rang complex $r < \infty$ peste M; nu impunem nicio altă restricție asupra lui M sau E.

Fibra lui E peste $x \in M$ va fi notată E_x, iar produsul hermitic pe ea $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E_x}$ (toate produsele hermitice folosite în acest text vor fi liniare în primul argument). Cum vom lucra cu mai multe spații Hilbert, norma și produsul hermitic pe fiecare din acestea îl vor purta ca indice inferior: dacă X este un spațiu hermitic și $v, w \in X$, atunci $\|v\|_X$ va fi norma lui v iar $\langle v, w \rangle_X$ produsul hermitic al lui v și w. Măsura pe M obținută folosind metrica riemanniană va fi μ_M. Dacă s este o secțiune a lui E, notația $\|s\|$ (fără alți indici) va însemna funcția $M \ni x \mapsto \|s(x)\|_{E_x} \in [0, \infty)$. $\Gamma_0(E)$ va fi spațiul secțiunilor netede cu suport compact în E. Dacă $1 \le p \le \infty$, $\Gamma^p(E)$ va fi spațiul claselor de secțiuni măsurabile egale aproape peste tot care au proprietatea că $\|s\| \in L^p(M)$. Este știut că $\Gamma_0(E)$ este dens în $\Gamma^p(E)$ în topologia normei dacă $p \neq \infty$, și în topologia $*$-slabă dacă $p = \infty$. Spațiul claselor de echivalență de funcții măsurabile egale aproape peste tot va fi $L^0(M)$, iar $\Gamma^0(E)$ va fi spațiul analog de secțiuni. În calculele concrete (de obicei integrale pe M) ce implică secțiuni $s \in \Gamma^p(E)$, vom înțelege tacit că lucrăm cu un reprezentant arbitrar al clasei s; în asemenea situații va fi imediat clar din context că rezultatele sunt independente de reprezentantul ales. Tildele vor însemna întotdeauna extinderi cu 0: dacă s este o secțiune a lui $E|_S$ (sau o funcție) definită pe o submulțime $S \subset M$, atunci $\widetilde{s}$ va fi extinderea sa cu 0 la întreaga M. Pentru operatori liniari între spații normate, $\|\cdot\|_{op}$ va denota norma operatorială, fără a mai specifica spațiile atunci când acestea sunt clare din context.

Vom lucra cu o aplicație (”potențial în fibre”) $V : M \to \operatorname{End} E$ astfel încât $V(x) \in \operatorname{End} E_x$. Este suficient de general să cerem ca funcția normă operatorială $M \ni x \mapsto \|V(x)\|_{op} \in [0, \infty)$ să fie local esențial mărginită (deci $V \in \Gamma^\infty_{loc}(\operatorname{End} E)$, prin definiție). Pentru a putea utiliza metode de calcul operatorial vom cere ca $V(x)$ să fie autoadjunct pentru aproape orice $x \in M$. Minimul spectrului lui $V(x)$ va fi $b(x) = \min \operatorname{spec} V(x)$, pentru orice $x \in M$. Pentru simplitate, vom impune ca $b \ge 0$, dar toate rezultatele rămân valabile cu modificări minime ale demonstrațiilor și în cazul mai general $\operatorname{ess\,inf}_{x \in M} b(x) \neq -\infty$. Operatorul ”de multiplicare” $\operatorname{mul}(V) : \Gamma_0(E) \to \Gamma^2(E)$ dat de $(\operatorname{mul}(V)s)(x) = V(x)s(x)$ este pozitiv (deoarece $\langle V(x)s(x), s(x) \rangle_{E_x} \ge b(x) \|s(x)\|^2_{E_x} \ge 0$) și esențial autoadjunct.

Dacă ∇ este o conexiune hermitică în E (adică $X \langle s, s' \rangle = \langle \nabla_X s, s' \rangle + \langle s, \nabla_X s' \rangle$ pentru orice $X \in \Gamma(TM)$ și $s, s' \in \Gamma(E)$), laplacianul asociat conexiunii $\nabla^* \nabla : \Gamma_0(E) \to \Gamma^2(E)$ este pozitiv definit și simetric, deci efectuând construcția Friedrichs asupra lui $\nabla^* \nabla + V$ (care va fi simetric și pozitiv) obținem o extensie dens definită (”hamiltonianul pe fibre”), autoadjunctă, pozitivă $H_{\nabla, V} : \operatorname{Dom}(H_{\nabla, V}) \to \Gamma^2(E)$.

Cum $\operatorname{spec} H_{\nabla, V} \subseteq [0, \infty)$, din teorema spectrală deducem că rezolventa în orice $\lambda < 0$ are proprietatea că

$$\left\| (H_{\nabla, V} - \lambda)^{-1} \right\|_{op} = \sup \left\{ \left| \frac{1}{\mu - \lambda} \right| \mid \mu \in \operatorname{spec} H_{\nabla, V} \right\} \le$$

$$\le \sup \left\{ \left| \frac{1}{\mu - \lambda} \right| \mid \mu \in [0, \infty) \right\} = \frac{1}{|\lambda|}$$

deci, folosind teorema Hille-Yoshida (corolarul 2.22 de la p.51 din [Davies80]), deducem că $-H_{\nabla,V}$ generează un semigrup de contracții tare continuu în $\Gamma^2(E)$. Cum orice submulțime deschisă a lui M este, la rândul său, o varietate, toate notațiile și considerațiile de până aici sunt valabile și pe astfel de submulțimi.

În acest capitol vom arăta că $\mathrm{e}^{-tH_{\nabla,V}}$ admite un nucleu integral (cu varii proprietăți pe care le vom explora mai departe); mai precis, vom construi o aplicație $(0,\infty) \times M \times M \ni (t,x,y) \mapsto k_{\nabla,V}(t)(x,y) \in \mathcal{L}(E_y, E_x)$ (ultima notație reprezentând spațiul aplicațiilor liniare de la E_y la E_x) astfel încât $(\mathrm{e}^{-tH_{\nabla,V}} s)(x) = \int_M k_{\nabla,V}(t,x,y)\, s(y)\, \mathrm{d}y$ pentru orice $s \in \Gamma^2(E)$. În cazul particular $E = M \times \mathbb{C}$, $\nabla = \mathrm{d}$ și $V = 0$, acesta este exact nucleul căldurii al lui M, o construcție foarte detaliată și copios comentată a căruia poate fi găsită în [Grigor'yan09]. Dacă E nu mai este trivial, dar M este compactă, un astfel de rezultat este cunoscut sub numele de "construcția Minakshisundaram-Pleijel" și poate fi găsit, de exemplu, în [BGV92]. Pe de altă parte, la momentul începerii studiilor doctorale (noiembrie 2015) autorului nu îi era cunoscută nicio altă lucrare similară publicată în literatura de specialitate care să trateze cazul varietăților și fibraților arbitrari, ceea ce a motivat prezentul demers de cercetare. Între timp, în 2017 Batu Güneysu a publicat la editura Birkhäuser "Covariant Schrödinger Semigroups on Riemannian Manifolds" (citată în textul de față ca [Güneysu17]), care tratează aceeași problemă, dar oferind demonstrații bazate pe cu totul alte tehnici decât cele folosite aici care, deci, își păstrează originalitatea și interesul.

Secțiunea a 3-a și secțiunea a 4-a conțin rezultatele centrale ale acestui capitol, și anume construcția nucleului căldurii în fibrați și demonstrarea unicității acestuia. În acest scop, va fi necesară demonstrarea, tot în secțiunea a 3-a, a inegalității diamagnetice. Nucleul căldurii va fi construit, din motive tehnice, în doi pași: mai întâi pe domenii relativ compacte, apoi pe întreaga varietate folosind o exhaustiune cu asemenea domenii. Odată construit, în secțiunea a 5-a îi studiem diversele proprietăți de integrabilitate și îi găsim o margine superioară convenabilă cu ajutorul căreia îl putem controla. În sfârșit, secțiunea a 6-a studiază comportamentul acestuia atunci când potențialul V este supus unor perturbații mărginite.

Ideea construcției este de a obține nucleul căldurii în E ca limită a unui șir de aproximații. Instrumentul matematic ce va permite această abordare este teorema lui Chernoff privind semigrupurile cu un parametru în spații Banach.

3.2 Rezultate preliminare

Propoziția 3.1. *Funcția $b : M \to \mathbb{R}$ definită mai sus prin $b(x) = \min \operatorname{spec} V(x)$ este local esențial mărginită.*

Teorema 3.2. *Cum M a fost presupusă separabilă, spațiul $\Gamma^2(E)$ va fi separabil.*

Vom avea nevoie de conceptul de **produs tensorial exterior** a doi fibrați. Astfel, dacă M și N sunt varietăți netede, iar $E \to M$ și $F \to N$ sunt fibrați vectoriali de rang finit, dacă $p : M \times N \to M$ și $q : M \times N \to N$ sunt proiecțiile canonice, putem considera fibratul $E \boxtimes F \to M \times N$ definit prin $E \boxtimes F = p^* E \otimes q^* F$. Secțiunile de pătrat integrabil în acest fibrat vor fi $\Gamma^2(E \boxtimes F) \simeq \Gamma^2(E) \otimes \Gamma^2(F)$ deoarece putem considera izomorfismul care duce monomul tensorial $(x,y) \mapsto (\sigma \otimes \eta)(x,y)$ în monomul tensorial $(x,y) \mapsto \sigma(x) \otimes \eta(y)$, extins prin liniaritate și apoi densitate în topologiile de spații Hilbert.

Definiția 3.3. *Numim **nucleul căldurii în fibratul** $E \to M$**, corespunzător conexiunii** ∇ **și potențialului** V, aplicația $k_{\nabla,V} : (0,\infty) \to \Gamma^2_{loc}(E \boxtimes E^*)$ cu proprietatea că $\mathrm{e}^{-tH_{\nabla,V}}\sigma = \int_M k_{\nabla,V}(t,\cdot,y)\,\sigma(y)\,\mathrm{d}y$ pentru orice $\sigma \in \Gamma^2(E)$.*

Scopul acestui capitol este să arătăm că o asemenea aplicație există, este esențialmente unică și are bune proprietăți de integrabilitate. Dacă V este neted, vom arăta că și nucleul integral pe care îl vom construi este, la rândul său, neted. De asemenea, îi vom găsi și o margine superioară, utilă în inegalități integrale.

3.3 Construcția nucleului căldurii în fibrați peste domenii relativ compacte

Fie $U \subseteq M$ un domeniu regulat, adică un deschis relativ compact cu bordul ∂U neted.

Teorema 3.4. *Pentru orice $t > 0$ există nucleul integral $k^{(U)}_{\nabla,V}(t) \in \Gamma^2(E|_U \boxtimes E^*|_U)$ astfel încât $(\mathrm{e}^{-tH^{(U)}_{\nabla,V}}\sigma)(x) = \int_U k^{(U)}_{\nabla,V}(t)(x,y)\,\sigma(y)\,\mathrm{d}y$ pentru aproape orice $x \in U$ și orice $\sigma \in \Gamma^2(E|_U)$.*

Teorema 3.5. *Aplicația $(0,\infty) \ni t \mapsto k^{(U)}_{\nabla,V}(t) \in \Gamma^2(E|_U \boxtimes E^*|_U)$ este măsurabilă și este unica aplicație $k : (0,\infty) \to \Gamma^2(E|_U \boxtimes E^*|_U)$ cu proprietatea că $\mathrm{e}^{-tH^{(U)}_{\nabla,V}}\sigma = \int_U k(t,\cdot,y)\,\sigma(y)\,\mathrm{d}y$ pentru orice $\sigma \in \Gamma^2(E|_U)$.*

Ne interesează o margine superioară pentru $\|k^{(U)}_{\nabla,V}(t)(x,y)\|_{op}$, iar aceasta va fi obținută în teorema următoare ce prezintă **inegalitatea diamagnetică în versiunea cu nuclee integrale**.

Teorema 3.6. *Pentru orice $t > 0$, și aproape orice $x, y \in U$, $\|k^{(U)}_{\nabla,V}(t)(x,y)\|_{op} \leq k^{(U)}_{\mathrm{d},b}(t)(x,y)$.*

Observația 3.7. *Ținând cont că $b \geq 0$, se poate obține inegalitatea mai slabă*

$$\|(\mathrm{e}^{-tH^{(U)}_{\nabla,V}}\sigma)(x)\|_{E_x} \leq (\mathrm{e}^{-tH^{(U)}_{\mathrm{d},0}}\|\sigma\|)(x) \ ,$$

de unde $\|k^{(U)}_{\nabla,V}\|_{op} \leq k^{(U)}_{\mathrm{d},0}$, deci nucleul căldurii pe funcții este o margine superioară universală pentru toate nucleele căldurii în fibrați peste U. De aici decurge că $k^{(U)}_{\nabla,V}$ moștenește toate proprietățile de integrabilitate pe care le are $k^{(U)}_{\mathrm{d},0}$. Cum însă V a fost ales doar în $\Gamma^\infty_{loc}(\mathrm{End}\, E)$, nu putem spune nimic despre netezimea lui $k^{(U)}_{\nabla,V}$ în general.

3.4 Construcția nucleului căldurii în fibrați peste varietăți arbitrare

Pentru a obține nucleul căldurii $k_{\nabla,V}$ în E deasupra lui M vom considera o exhaustiune $M = \bigcup_{i\geq 0} U_i$ cu deschiși relativ compacți cu frontiera netedă. Orice astfel de deschis U_i admite un nucleu al căldurii $k^{U_i}_{\nabla,V}$ în $E|_{U_i}$ construit ca mai sus, corespunzând extensiei Friedrichs $H^{U_i}_{\nabla,V}$ a operatorului $\nabla^*\nabla + V|_{U_i}$ (∇ reprezentând, pentru simplitatea scrierii, restricția conexiunii ∇ la fibratul $E|_{U_i}$). Intuitiv, vom obține $k_{\nabla,V}$ ca limită a nucleelor $k^{U_i}_{\nabla,V}$, însă într-un fel indirect. Teorema următoare va obține, pe fiecare deschis U_i, o aplicație $k^{(i)}_{\nabla,V}$ care ulterior se va demonstra a fi exact restricția la U_i a nucleului pe care îl căutăm $k_{\nabla,V}$.

Teorema 3.8. *Pentru orice $i \geq 0$ și orice $t > 0$, șirul $(k^{U_j}_{\nabla,V}(t)|_{U_i\times U_i})_{j\geq i}$ este Cauchy în $\Gamma^2(E|_{U_i} \boxtimes E^*|_{U_i})$, deci va avea o unică limită, notată $k^{(i)}_{\nabla,V}(t)$. Această limită va avea proprietatea că*

$$\int_{U_i} k^{(i)}_{\nabla,V}(t)(x,y)\,\sigma(y)\,\mathrm{d}y = [\mathrm{e}^{-tH_{\nabla,V}}\iota_i(\sigma)](x)$$

pentru orice $\sigma \in \Gamma^2(E)$ și aproape orice $x \in U_i$.

Până acum, pe fiecare domeniu U_i am obținut o aplicație $k^{(i)}_{\nabla,V}(t)$, dar există vreo relație între toate aceste aplicații? Teorema următoare ne va arăta că, într-adevăr, aceste aplicații satisfac o foarte convenabilă relație de compatibilitate ce ne va permite definirea limitei lor punctuale pe întreaga varietate.

Teorema 3.9. *Dacă $i \leq j$ atunci este valabilă relația "de compatibilitate"*

$$k^{(j)}_{\nabla,V}(t)|_{U_i\times U_i} = k^{(j)}_{\nabla,V}(t) \ .$$

Pentru construcția efectivă a nucleului căldurii în E, să notăm cu $\widetilde{k^{(i)}_{\nabla,V}(t)} \in \Gamma^2_{loc}(E \boxtimes E^*)$ prelungirea lui $k^{(i)}_{\nabla,V}(t)$ cu 0 la $M \times M$; vom alege pentru fiecare $i \geq 0$ câte un reprezentant măsurabil $l^{(i)}_{\nabla,V}(t)$ al lui $\widetilde{k^{(i)}_{\nabla,V}(t)} \in \Gamma^2_{loc}(E \boxtimes E^*)$ astfel:

- $l^{(0)}_{\nabla,V}(t)$ este ales arbitrar;
- $l^{(i+1)}_{\nabla,V}(t)$ este ales astfel încât $l^{(i+1)}_{\nabla,V}(t)|_{U_i\times U_i} = l^{(i)}_{\nabla,V}(t)$ (o asemenea alegere este posibilă mulțumită relației de compatibilitate demonstrate mai sus).

Definim acum $k_{\nabla,V}(t) = \lim_{i\to\infty} l^{(i)}_{\nabla,V}(t)$. Cum șirul $\left(l^{(i)}_{\nabla,V}(t)\right)_{i\geq 0}$ este constant de la un anumit i încolo pentru orice $x, y \in M$, limita există.

Teorema 3.10. *Aplicația măsurabilă $(0,\infty) \ni t \mapsto k_{\nabla,V}(t) \in \Gamma^2_{loc}(E \boxtimes E^*)$ este nucleul căldurii în E corespunzător conexiunii ∇ și potențialului V, și este unica aplicație cu aceste proprietăți.*

Corolarul 3.11. *Pentru orice $t > 0$ și aproape orice $x, y \in M$, $\|k_{\nabla,V}(t)(x,y)\|_{op} \leq k_{\mathrm{d},b}(t)(x,y)$.*

3.5 Proprietăți de integrabilitate și netezime

Din versiunea slabă $\|k_{\nabla,V}(t)(x,y)\|_{op} \leq h(t,x,y)$ pentru orice $t > 0$ și aproape orice $x, y \in M$ a inegalității diamagnetice, conchidem imediat că $k_{\nabla,V}$ moștenește aceleași proprietăți de integrabilitate pe care le are h (v. secțiunea 1.4). În particular, cum h este continuu și deci mărginit pe orice compact în ansamblul argumentelor sale, urmează că $k_{\nabla,V} \in \Gamma^{\infty}_{loc}(\mathbb{C} \boxtimes E \boxtimes E^*)$. De asemenea, cum $(x,y) \mapsto h(t,x,y)$ este integrabil și de pătrat integrabil în x și, respectiv, în y, urmează că la fel va fi și $(x,y) \mapsto \|k_{\nabla,V}(t)(x,y)\|_{op}$, deci $k_{\nabla,V}(t)(x,-) \in \Gamma^1(E^*) \cap \Gamma^2(E^*)$ și $k_{\nabla,V}(t)(\cdot,y) \in \Gamma^1(E) \cap \Gamma^2(E)$ pentru orice $t > 0$ și aproape orice $x, y \in M$.

Până acum, instrumentele matematice aflate la dispoziția noastră și ipotezele în care ne-am plasat ne-au permis să studiem numai integrabilitatea lui $k_{\nabla,V}$. Vom face acum ipoteza că V este neted și vom arăta că în această ipoteză $k_{\nabla,V}$ este la rândul său neted.

Teorema 3.12. *Dacă V este netedă, atunci operatorul diferențial $2\partial_t + L$ este hipoeliptic.*

Teorema 3.13. *Distribuția (regulată) $u = k_{\nabla,V}|_{(0,\infty)\times U_1 \times U_2} \in \mathcal{D}'((0,\infty) \times U_1 \times U_2, \mathbb{C}^{r^2})$ este o soluție în sens distribuțional a ecuației $(2\partial_t + L)u = 0$.*

Corolarul 3.14. *Nucleul $k_{\nabla,V}$ este neted pe $(0,\infty) \times M \times M$.*

În ipoteza netezimii asupra lui V, putem îmbunătăți inegalitatea diamagnetică: ea va fi adevărată peste tot, nu doar aproape peste tot.

Corolarul 3.15. *Dacă V este netedă și $v : M \to \mathbb{R}$ este o funcție netedă astfel încât $v \leq b$, atunci $\|k_{\nabla,V}(t)(x,y)\|_{op} \leq k_{\mathrm{d},v}(t)(x,y)$ pentru orice $t > 0$ și $x, y \in M$.*

3.6 Comportamentul la perturbații mărginite

Uneori, în studiul unei probleme, poate fi util să înlocuim potențialul V cu niște aproximații mai convenabile V_j, să studiem problema cu hamiltonianul perturbat $H_{\nabla,V_j} = H_{\nabla,V} + (V_j - V)$ și apoi să încercăm să extindem concluziile asupra "hamiltonianului original" $H_{\nabla,V}$ printr-un procedeu de trecere la limită. Este folositor, atunci, să studiem comportamentul nucleului căldurii la asemenea perturbații mărginite $V_j - V$. Înainte de a trece la acest studiu, să facem observația necesară mai departe că inegalitatea diamagnetică, atât în versiunea cu semigrupuri, cât și în cea cu nuclee integrale, este adevărată nu numai pentru potențiale V pentru care $\inf b \geq 0$ (așa cum am presupus pentru simplitate până acum), ci și pentru potențiale mai generale pentru care $\inf b \neq -\infty$. Într-adevăr, în acest ultim caz este suficient să se refacă toate demonstrațiile de mai sus pentru potențialul $V - \inf b$, de unde concluzia va fi imediată.

Teorema 3.16. *Fie $B : \Gamma^2(E) \to \Gamma^2(E)$ un operator liniar autoadjunct definit peste tot (deci mărginit), și fie $\lambda = \inf \operatorname{spec} B$. Atunci*

$$\|k_{\nabla,V}(t)(x,y) - k_{\nabla,V+B}(t)(x,y)\|_{op} \leq \int_0^t \mathrm{e}^{-(t-\varepsilon)\lambda} \, \mathrm{d}\varepsilon \, \|B\| \, k_{\mathrm{d},b}(t)(x,y)$$

pentru aproape toți $x, y \in M$.

Corolarul 3.17. *Fie $(V_j)_{j\geq 0}$ și V potențiale în fibrați, local esențial mărginite și autoadjuncte, astfel încât $V_j \to V$ în $\Gamma^{\infty}(\operatorname{End} E)$. Folosind notațiile din teorema precedentă, $k_{\nabla,V_j}(t)(x,y) \to k_{\nabla,V}(t)(x,y)$ în $\mathcal{L}(E_y, E_x)$ când $j \to \infty$, pentru orice $t > 0$ și aproape orice $x, y \in M$.*

4. INTEGRARE STOCASTICĂ

Acest capitol conține cel de-al doilea rezultat original al lucrării: construcția conceptului de integrală stocastică folosind exclusiv instrumente analitic-funcționale și de geometrie riemanniană. Integralele stocastice folosite în literatură sunt integrala Itô și integrala Stratonovici. Ambele își propun să răspundă aceleiași întrebări: putem integra o funcție de-a lungul unui proces stocastic cu timp continuu de care aceasta depinde? Cele două integrale sunt două răspunsuri diferite (dar legate printr-o formulă simplă) ale acestei întrebări. Substratul geometric profund ce le subîntinde tinde să fie ocultat de limbajul probabilist în care aceste concepte au fost formulate inițial. Vom descoperi în textul ce urmează că, extrăgând problema din domeniul teoriei probabilităților și plasând-o în unul explicit geometric (varietățile Riemann și integrarea 1-formelor pe curbe), dobândim o înțelegere complet nouă a acestor concepte stocastice. În particular, vom vedea că putem defini un concept general de integrală stocastică și vom construi o infinitate de asemenea integrale, printre care cele Itô și Stratonovici sunt cazuri particulare. De asemenea, vom vedea și de ce în aproximațiile uzuale ale integralei Itô ”creșterile sunt orientate doar către viitor”.

În acest capitol, $\alpha \in \Omega^1(M)$ va fi o 1-formă netedă, reală; știm ce înseamnă integrala curbilinie $\int_c \alpha$ atunci când $c : [0,1] \to M$ este o curbă netedă, și vom încerca să dăm un sens aceleiași integrale când c este doar continuă (și deci vectorul tangent $\dot{c}$ nu mai există).

Pentru a orienta puțin așteptările cititorului, să examinăm superficial ceea ce se știe despre integrarea stocastică în $\mathbb{R}^n$. Dacă c este o curbă suficient de netedă, sumele Riemann

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} \alpha\left(c\left(\frac{jt}{2^k}\right)\right)\left[c\left(\frac{(j+1)t}{2^k}\right) - c\left(\frac{jt}{2^k}\right)\right]$$

converg la integrala curbilinie $\int_c \alpha$. Este interesant să ne întrebăm: dacă c este doar continuă (sau chiar numai element din $\prod_{s\in[0,t]} M$), aceste sume mai converg la ceva? Răspunsul este cunoscut a fi afirmativ, dar într-un sens puțin mai slab, el nemaifiind adevărat pentru orice curbă: *pentru aproape orice curbă c* (în sensul măsurii Wiener), limita există și este numită *integrala Itô*. În plus, dacă simetrizăm sumele Riemann de mai sus, în sensul de a considera acum

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} \frac{1}{2}\left[\alpha\left(c\left(\frac{jt}{2^k}\right)\right) + \alpha\left(c\left(\frac{(j+1)t}{2^k}\right)\right)\right]\left[c\left(\frac{(j+1)t}{2^k}\right) - c\left(\frac{jt}{2^k}\right)\right] ,$$

acestea vor converge, aproape pentru orice curbă c, la altă limită, numită *integrala Stratonovici.*

Este util să observăm un fapt interesant: dacă în formula

$$\sum_{j=0}^{2^k-1} \int_{[0,1]} \alpha_{(1-\tau)\, c(\frac{jt}{2^k}) + \tau\, c(\frac{(j+1)t}{2^k})} \left[c\left(\frac{(j+1)t}{2^k}\right) - c\left(\frac{jt}{2^k}\right)\right] \mathrm{d}P(\tau) ,$$

unde P este o probabilitate pe $[0,1]$, considerăm pe rând $P = \delta_0$ (măsura Dirac concentrată în 0) și $P = \frac{1}{2}(\delta_0 + \delta_1)$, atunci obținem sumele ce converg la integrala Itô și, respectiv, sumele ce converg la integrala Stratonovici. Așadar, aceste două integrale stocastice și aproximațiile lor sunt cazuri particulare ale unui concept general de integrală stocastică pe care îl vom pune în evidență mai jos. Generalizarea acestei formule de la $\mathbb{R}^n$ la M este directă: segmentul de dreaptă $\tau \mapsto \tau\, c(\frac{jt}{2^k}) + (1-\tau)\, c(\frac{(j+1)t}{2^k})$ se va înlocui cu unica geodezică minimizantă între $c(\frac{jt}{2^k})$ și $c(\frac{(j+1)t}{2^k})$ (atunci când ea există), iar vectorul $c(\frac{(j+1)t}{2^k}) - c(\frac{jt}{2^k})$ se va înlocui cu vectorul tangent al acestei geodezice la momentul τ.

La fel ca în cap.2, să fixăm odată pentru totdeauna un punct $x_0 \in M$ și pentru orice $t > 0$ să considerăm spațiul $\mathcal{C}_t = \{c : [0,t] \to M \mid c \text{ continuă, cu } c(0) = x_0\}$ înzestrat cu măsura Wiener w_t.

Considerăm fibratul trivial $E = M \times \mathbb{C}$ înzestrat cu structura hermitică trivială și cu conexiunea $\nabla^{(\alpha)} f = \mathrm{d}f + \mathrm{i} f\alpha$ unde $\mathrm{i} = \sqrt{-1}$ este o rădăcină pătrată complexă a lui -1. Este ușor de văzut că $\nabla^{(\alpha)}$ este hermitică și că operatorul $-\Delta^{(\alpha)} = (\nabla^{(\alpha)})^* \nabla^{(\alpha)} : C_0^\infty(M) \to C_0^\infty(M)$ este simetric și pozitiv definit. Cu construcția Friedrichs obținem o extensie L_α dens definită în $L^2(M)$, autoadjunctă, pozitiv definită. Utilizând rezultatele obținute în cap.3, semigrupul $(\mathrm{e}^{-tL_\alpha})_{t\geq 0}$ va admite un nucleu al căldurii h_α asociat conexiunii $\nabla^{(\alpha)}$. Acesta va fi neted și, din inegalitatea diamagnetică, va avea proprietatea $|h_\alpha(t,x,y)| \leq h(t,x,y)$ pentru orice $t > 0$ și aproape orice $x, y \in M$, unde h este nucleul lui $(\mathrm{e}^{-tL_0})_{t\geq 0}$ (corespunzător 1-formei $\alpha = 0$), adică nucleul căldurii pe M.

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$ vom considera varietatea $M_k = M^{2^k}$ și proiecția naturală $\pi_k : \mathcal{C}_t \to M_k$ dată de $\pi_k(c) = (c(\frac{t}{2^k}), \dots, c(\frac{2^k t}{2^k}))$. Indiferent dacă înzestrăm $\mathcal{C}_t$ cu topologia convergenței uniforme a curbelor sau cu cea a convergenței punctuale, π_k va fi continuă.

Pentru a ușura orientarea cititorului în textul ce urmează, acum este momentul potrivit să schițăm rezultatul pe care îl căutăm precum și strategia prin care îl vom obține. Astfel, vom construi o densitate de măsură complexă $\rho_{\alpha,t} \in L^\infty(\mathcal{C}_t)$ și vom căuta să arătăm că aplicația $\mathbb{R} \ni s \mapsto \rho_{s\alpha,t} \in \mathcal{B}(L^2(\mathcal{C}_t))$ (spațiul operatorilor mărginiți pe $L^2(\mathcal{C}_t)$) este un grup unitar tare continuu cu un parametru de unde, cu teorema lui Stone, acesta va avea un generator auto-adjunct $\mathrm{Strat}_t(\alpha)$. Se va vedea că acest generator este exact integrala stocastică Stratonovici. Dificultatea demonstrării acestei aserțiuni vine din faptul că $\rho_{\alpha,t}$ va fi obținută printr-o procedură foarte abstractă, de aceea structura grupală și unitaritatea sunt foarte greu de demonstrat. Pentru a evidenția aceste proprietăți concrete, vom arăta că $\rho_{\alpha,t}$ este limita unui șir de funcții cu proprietățile dorite, de unde prin convergență acestea se vor transmite limitei.

Mai precis, vom construi un șir de funcții reale măsurabile $S_{P,t,k}(\alpha)$ liniare în $\alpha \in \Omega^1(M)$ astfel încât $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{P,t,k}(\alpha)} \to \rho_{\alpha,t}$ în $L^2(\mathcal{C}_t)$. Deși simplă, această idee este complicată de niște detalii tehnice pe care le vom evidenția când le vom întâlni și care ne obligă să abordăm problema indirect: vom demonstra mai întâi convergența anunțată în spațiul $L^2(\mathcal{C}_t(U))$ asociat unui deschis arbitrar U relativ compact și cu frontieră netedă, iar apoi vom considera o exhaustiune a lui M cu asemenea domenii, ceea ce ne va permite demonstrarea rezultatului în întregul $L^2(\mathcal{C}_t)$. Strategia de a folosi exhausiuni cu domenii relativ compacte este naturală dacă ne amintim că am folosit-o atât în construcția măsurii Wiener cât și în cea a nucleului căldurii în fibrați.

4.1 O densitate de măsură pe spațiul curbelor continue conținute într-un domeniu regulat

4.1.1 Construcția unei densități de măsură

Fie $U \subseteq M$ un domeniu deschis, relativ compact, conex, cu frontiera netedă, astfel încât $x_0 \in U$. Să considerăm spațiul

$$\mathcal{C}_t(\bar{U}) = \{c : [0,t] \to \bar{U} \mid c \text{ continuă, cu } c(0) = x_0\} ,$$

înzestrându-l cu măsura Wiener corespunzătoare $w_t^{(U)}$ așa cum am construit-o în subsecțiunea 2.2.2. Înzestrat cu distanța $D(c_0, c_1) = \max_{s\in[0,t]} d(c_0(s), c_1(s))$ acesta devine spațiu metric; este separabil (și deci cu bază numărabilă de deschiși), după cum se demonstrază în [Michael61].

Fie

$$\mathrm{Cyl}(\mathcal{C}_t(\bar{U})) = \{f \in C_b(\mathcal{C}_t(\bar{U})) \mid \exists k \geq 0 \text{ și } f_k \in C(\bar{U}^{2^k}) \text{ astfel încât } f = f_k \circ \pi_k\}$$

algebra funcțiilor cilindrice continue pe $\mathcal{C}_t(\bar{U})$. Clar, $\mathrm{Cyl}(\mathcal{C}_t(\bar{U})) \subset L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$.

Definim funcționala (evident liniară) $W_{\alpha,t}^{(U)} : \mathrm{Cyl}(\mathcal{C}_t(\bar{U})) \to \mathbb{C}$ prin

$$W_{\alpha,t}^{(U)}(f_k \circ \pi_k) = \int_M \mathrm{d}x_1\, h_\alpha^{(U)}\left(\frac{t}{2^k}, x_0, x_1\right) \dots \int_M \mathrm{d}x_{2^k}\, h_\alpha^{(U)}\left(\frac{t}{2^k}, x_{2^k-1}, x_{2^k}\right) f_k(x_1, \dots, x_{2^k})$$

pentru orice $f_k \circ \pi_k \in \mathrm{Cyl}(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$. În continuare vom arăta că o putem extinde la $L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$ prin densitate și continuitate.

Propoziția 4.1. *Algebra* $\mathrm{Cyl}(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$ *este densă în* $L^p(\mathcal{C}_t(\bar{U}), w_t^{(U)})$ *pentru orice* $p \in [1, \infty)$.

Observăm acum că

$$\begin{aligned} &|W_{\alpha,t}^{(U)}(f_k \circ \pi_k)| \leq \\ &\quad \leq \int_U \mathrm{d}x_1 \left| h_\alpha^{(U)}\left(\frac{t}{2^k}, x_0, x_1\right)\right| \dots \int_U \mathrm{d}x_{2^k} \left| h_\alpha^{(U)}\left(\frac{t}{2^k}, x_{2^k-1}, x_{2^k}\right)\right| |f_k(x_1, \dots, x_{2^k})| \leq \\ &\quad \leq \int_U \mathrm{d}x_1\, h^{(U)}\left(\frac{t}{2^k}, x_0, x_1\right) \dots \int_U \mathrm{d}x_{2^k}\, h^{(U)}\left(\frac{t}{2^k}, x_{2^k-1}, x_{2^k}\right) |f_k(x_1, \dots, x_{2^k})| = \end{aligned}$$

$$= \|f_k \circ \pi_k\|_{L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))} \ ,$$

deci $W_{\alpha,t}^{(U)}$ este continuă în norma $\|\cdot\|_{L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))}$ pe $\mathrm{Cyl}(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$ și, cum aceasta este densă în $L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$, urmează că putem extinde $W_{\alpha,t}^{(U)}$ la o funcțională liniară și continuă pe $L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$, deci există $\rho_{\alpha,t}^{(U)} \in L^\infty(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$ astfel încât $W_{\alpha,t}^{(U)}(f) = \int_{\mathcal{C}_t(\bar{U})} f \rho_{\alpha,t}^{(U)} \, \mathrm{d}w_t^{(U)}$ pentru orice $f \in L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$. În plus, $|W_{\alpha,t}^{(U)}(f)| \leq \|f\|_{L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))}$ pentru orice $f \in L^1(\mathcal{C}_t(\bar{U}))$, deci $\|\rho_{\alpha,t}^{(U)}\|_{L^\infty(\mathcal{C}_t(\bar{U}))} \leq 1$.

4.1.2 Un șir de aproximații pentru densitatea de măsură

Până acum, $\rho_{\alpha,t}^{(U)}$ a fost construită printr-o procedură foarte abstractă, de aceea proprietățile sale sunt dificil de studiat. De aceea, în ceea ce urmează vom construi un șir de aproximații concrete ale acestei funcții, care se vor bucura de două proprietăți esențiale: o proprietate grupală, și faptul de a fi de valoare absolută 1. Vom arăta apoi că acest șir converge la $\rho_{\alpha,t}^{(U)}$, și deci aceste două proprietăți i se vor transmite și lui $\rho_{\alpha,t}^{(U)}$.

Fie P o probabilitate Borel regulată pe intervalul $[0,1]$; vom vedea mai târziu că rolul lui P va fi să clasifice complet integralele stocastice. Vom nota cu $M_1(P)$ momentul de ordinul 1 al lui P, adică

$$M_1(P) = \int_{[0,1]} \tau \, \mathrm{d}P(\tau) \ .$$

Dacă punctele x și y pot fi unite printr-o unică geodezică minimizantă, o vom nota pe aceasta prin $\gamma_{x,y} : [0,1] \to M$, unde înțelegem că $\gamma(0) = x$ și $\gamma(1) = y$. Definim atunci $I_P(\alpha) : M \times M \to \mathbb{R}$ astfel:

- $I_P(\alpha)(x,y) = \int_{[0,1]} \alpha_{\gamma_{x,y}(\tau)}(\dot{\gamma}_{x,y}(\tau)) \, \mathrm{d}P(\tau)$, dacă există $\gamma_{x,y}$ unica geodezică minimizantă între x și y;
- $I_P(\alpha)(x,y) = 0$, altminteri.

Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, să definim acum "aproximațiile" $S_{P,t,k}(\alpha) : \mathcal{C}_t \to \mathbb{R}$ prin

$$S_{P,t,k}(\alpha)(c) = \sum_{j=0}^{2^k-1} I_P(\alpha) \left(c\left(\frac{jt}{2^k}\right), c\left(\frac{(j+1)t}{2^k}\right) \right) + \\ + \frac{t}{2^k} (\mathrm{d}^* \alpha) \left(c\left(\frac{jt}{2^k}\right) \right) \int_{[0,1]} (2\tau - 1) \, \mathrm{d}P(\tau) \ .$$

Până acum, $\rho_{\alpha,t}^{(U)}$ a fost obținut printr-un procedeu extrem de abstract (secțiunea 4.1), ceea ce face extrem de dificilă studierea proprietăților sale și utilizarea sa. Următoarea teoremă repară această situație, oferindu-ne o înțelegere concretă a densității de măsură a acestui obiect ca limită a unui șir de aproximații construite explicit.

Teorema 4.2. $\lim_{k\to\infty} \mathrm{e}^{\mathrm{i} S_{P,t,k}(\alpha)}|_{\mathcal{C}_t(\bar{U})} = \rho_{\alpha,t}^{(U)}$ *în* $L^2(\mathcal{C}_t(\bar{U}), w_t^{(U)})$*, uniform în raport cu* t *pe submulțimi compacte din* $(0,\infty)$*, și uniform în raport cu* $x_0 \in U$*.*

4.2 O densitate de măsură pe spațiul curbelor continue conținute în întreaga varietate

Să considerăm acum o exhaustiune $M = \bigcup_{j\geq 0} U_j$ a lui M cu domenii regulate ca mai sus. Pentru a ușura un pic notația, să scriem $\rho_{\alpha,t}^{(j)}$ în loc de $\rho_{\alpha,t}^{(U_j)}$, $h_\alpha^{(j)}$ în loc de $h_\alpha^{(U)j)}$ și $w_t^{(j)}$ în loc de $w_t^{(U_j)}$. Știm deocamdată că $\mathrm{e}^{\mathrm{i}S_{P,t,k}}|_{\mathcal{C}_t(\bar{U}_j)} \to \rho_{\alpha,t}^{(j)}$ în $L^2(\mathcal{C}_t(\bar{U}_j), w_t^{(j)})$.

Următoarea lemă este pe cât de banală, pe atât de importantă.

Lema 4.3. *Dacă* $i \leq j$ *atunci* $\rho_{\alpha,t}^{(j)}|_{\mathcal{C}_t(\bar{U}_i)} = \rho_{\alpha,t}^{(i)}$ *aproape peste tot în raport cu măsura Wiener* $w_t^{(i)}$*.*

Din relația $\rho_{\alpha,t}^{(j)}|_{\mathcal{C}_t(\bar{U}_i)} = \rho_{\alpha,t}^{(i)}$ aproape peste tot pentru $i \leq j$ decurge că există limita punctuală $\lim_{j\to\infty} \tilde{\rho}_{\alpha,t}^{(j)}$, notată $\rho_{\alpha,t}$. Ea va fi o funcție măsurabilă (ca limită punctuală de funcții măsurabile), și mărginită de 1 aproape peste tot, deoarece toate funcțiile din șir sunt astfel. Așadar, va fi o funcție din $L^\infty(\mathcal{C}_t, w_t)$. Cu argumentul din lema de mai sus se poate arăta că $\rho_{\alpha,t}|_{\mathcal{C}_t(\bar{U}_j)} = \rho_{\alpha,t}^{(j)}$ pentru orice $j \geq 0$, ca elemente din $L^\infty(\mathcal{C}_t, w_t^{(j)})$.

După toate aceste rezultate pregătitoare, putem demonstra în sfârșit rezultatul central pe care îl urmăream.

Teorema 4.4.
$$\lim_{k\to\infty} \|e^{iS_{P,t,k}(\alpha)} - \rho_{\alpha,t}\|_{L^2(\mathcal{C}_t)} = 0$$
uniform în raport cu $t \in (0,T]$, *pentru orice* $T > 0$.

Corolarul 4.5. $\rho_{\alpha,t}$ *nu depinde de exhaustiunea cu domenii regulate folosită.*

4.3 Integrala Stratonovici

Am obținut că $\rho_{\alpha,t}$ este limita unui șir de exponențiale cu exponenți imaginari. Este rezonabil să ne întrebăm dacă nu cumva chiar $\rho_{\alpha,t}$ are o asemenea formă, iar în caz afirmativ este interesant să îi studiem exponentul. Răspunsul acestei întrebări (și justificarea morală a efortului depus pentru obținerea rezultatelor tehnice de mai sus) este dat de teorema următoare.

Teorema 4.6. *Există o unică funcție reală* $\mathrm{Strat}_t(\alpha) \in L^0(\mathcal{C}_t)$ *astfel încât* $\rho_{\alpha,t} = e^{i\,\mathrm{Strat}_t(\alpha)}$.

Când am construit funcțiile $S_{P,t,k}(\alpha)$, am făcut-o pentru ca funcțiile $e^{iS_{P,t,k}(\alpha)}$ să aproximeze pe $\rho_{\alpha,t} = e^{i\,\mathrm{Strat}_t(\alpha)}$ în $L^2(\mathcal{C}_t)$. Vom vedea că această proprietate de aproximare se extinde, chiar dacă mai slab, și la exponenți.

Teorema 4.7. $\lim_{k\to\infty} S_{P,t,k}(\alpha) = \mathrm{Strat}_t(\alpha)$ *în măsură, uniform în raport cu* t *din submulțimi mărginite ale lui* $(0,\infty)$.

Vom vedea în detaliu în secțiunea următoare că Strat_t este integrala stocastică Stratonovici. Faptul că aceasta este limita în măsură a unui anumit șir de aproximații era deja cunoscut; ceea ce este nou (și neașteptat) este că ea poate fi obținută ca generator al grupului unitar discutat mai sus (sau, renunțând la rigoare, că este "logaritmul" funcției $\rho_{\alpha,t}$). Aceasta sugerează că $\rho_{\alpha,t}$, fiind exponențiala imaginară a unui fel de integrală curbilinie, poate fi interpretat, la rândul său, ca un fel de transport paralel - anume transportul paralel stocastic în fibratul $M \times \mathbb{C}$. Aceste considerații, însă, vor face obiectul altui capitol.

Corolarul 4.8. *Aplicația* $\Omega^1(M) \ni \alpha \mapsto \mathrm{Strat}_t(\alpha) \in L^0(\mathcal{C}_t)$ *este* $\mathbb{R}$*-liniară.*

4.4 Un concept general de integrală stocastică

Pentru a putea degaja un concept general de integrală stocastică, să revenim la aproximațiile $S_{P,t,k}(\alpha)$ construite mai sus și să definim aproximațiile

$$\begin{aligned} A_{P,t,k}(\alpha)(c) &= S_{P,t,k}(\alpha)(c) - \frac{t}{2^k}\sum_{j=0}^{2^k-1}(\mathrm{d}^*\alpha)\left(c\left(\frac{jt}{2^k}\right)\right)\int_{[0,1]}(2\tau-1)\,\mathrm{d}P(\tau) = \\ &= \sum_{j=0}^{2^k-1} I_P(\alpha)\left(c\left(\frac{jt}{2^k}\right), c\left(\frac{(j+1)t}{2^k}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.1}$$

pentru orice curbă $c \in \mathcal{C}_t$ (adică doar renunțăm la termenul conținând $\mathrm{d}^*\alpha$ și $M_1(P)$). Vom studia comportamentul acestor aproximații pe curbe netede, acest comportament "clasic" urmând să ne ghideze spre înțelegerea comportamentului "stocastic".

4.4.1 O aproximare a integralei curbilinii pe curbe diferențiabile

Teorema 4.9. *Dacă* $c : [0,t] \to M$ *este o curbă de două ori derivabilă cu derivata a doua continuă, atunci* $\int_c \alpha = \lim_{k\to\infty} A_{P,t,k}(\alpha)(c)$.

4.4.2 O definiție geometrică și o clasificare a integralelor stocastice

Ne vom inspira din asemănarea dintre teorema 4.9 și teorema 4.7 pentru a produce un concept de integrală stocastică. Fie $\mathrm{Prob}([0,1])$ spațiul probabilităților Borel, regulate, pe intervalul $[0,1]$.

Definiția 4.10. *Vom spune că* $\mathrm{Int}_t : \Omega^1(M) \to L^0(\mathcal{C}_t)$ *este o integrală stocastică dacă și numai dacă există* $P \in \mathrm{Prob}([0,1])$ *astfel încât* $\mathrm{Int}_t(\alpha)$ *să fie limita în măsură a șirului de aproximații* $A_{P,t,k}(\alpha)$ *pentru orice* $\alpha \in \Omega^1(M)$. *În acest caz, vom nota această integrală stocastică cu* $\mathrm{Int}_{P,t}$, *pentru a evidenția dependența de* P.

Deși în teorema 4.7 convergența în măsură era uniformă în raport cu t stând în submulțimi compacte, nu am inclus această proprietate în definiția integralelor stocastice, nefiind clar la momentul redactării acestui text dacă este un ingredient esențial al conceptului sau, dimpotrivă, unul întâmplător și fără consecințe majore.

Observația 4.11. *Având în vedere natura conceptului de convergență în măsură, subliniem că* $\mathrm{Int}_t(\alpha)(\cdot)$ *trebuie înțeleasă nu ca o funcție definită pentru fiecare curbă din* $\mathcal{C}_t$*, ci ca un element din* $L^0(\mathcal{C}_t)$*. Aceasta este deosebirea majoră față de integrala curbilinie, care este definită pentru orice curbă netedă pe porțiuni.*

Fie $P \in \mathrm{Prob}([0,1])$. Ne interesează să studiem dacă există vreo legătură între $\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha)$ și funcția $\mathrm{Strat}_t(\alpha)$ construită în secțiunea 4.3. Observăm că pentru orice $c \in \mathcal{C}_t$,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{t}{2^k} \sum_{j=0}^{2^k-1} (\mathrm{d}^*\alpha)\left(c\left(\frac{jt}{2^k}\right)\right) = \int_0^t (\mathrm{d}^*\alpha)(c(s))\,\mathrm{d}s$$

ca limită de sume Riemann asociate funcției continue $(\mathrm{d}^*\alpha)\circ c$, diviziunii echidistante cu 2^k pași a intervalului $[0,t]$ și sistemului de puncte intermediare $(c(\frac{jt}{2^k}))_{0\le j\le 2^k-1}$. Cu atât mai mult, deci, convergența de mai sus este și în măsură (convergența punctuală implicând-o pe cea în măsură). Dacă luăm limita în măsură în formula (4.1) de definiție a aproximațiilor $A_{P,t,k}$, obținem

$$\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha)(c) = \mathrm{Strat}_t(\alpha)(c) - \int_{[0,1]} (2\tau - 1)\,\mathrm{d}P(\tau) \int_0^t (\mathrm{d}^*\alpha)(c(s))\,\mathrm{d}s$$

ceea ce arată că chiar dacă probabilitatea P poate fi extrem de complicată, integrala stocastică $\mathrm{Int}_{P,t}$ corespunzătoare nu reține din ea decât momentul său de ordinul 1, și orice două probabilități din $\mathrm{Prob}([0,1])$ cu același moment de ordinul 1 produc aceeași integrală stocastică. De asemenea, de vreme ce P nu intervine decât în termenul ce conține $\mathrm{d}^*\alpha$, și deci orice integrală stocastică este în esență funcția Strat_t, conchidem că $\mathrm{Int}_{P,t}$ există pentru orice $P \in \mathrm{Prob}([0,1])$. Cum funcția $2\tau - 1$ are minimul -1 și maximul 1 pe $[0,1]$, și cum P este o probabilitate, rezultă că $\int_{[0,1]}(2\tau-1)\,\mathrm{d}P(\tau) \in [-1,1]$, și deci că orice integrală stocastică Int_t pe $\mathcal{C}_t$ este de forma $\mathrm{Int}_t(\alpha) = \mathrm{Strat}_t(\alpha) + \theta\int_0^t (\mathrm{d}^*\alpha)(c(s))\,\mathrm{d}s$ cu $\theta \in [-1,1]$.

Mai mult, dacă $P, Q \in \mathrm{Prob}([0,1])$, atunci

$$\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha)(c) = \mathrm{Int}_{Q,t}(\alpha)(c) - 2\int_{[0,1]} \tau\,\mathrm{d}(P-Q)(\tau) \int_0^t (\mathrm{d}^*\alpha)(c(s))\,\mathrm{d}s\ ,$$

și deci orice două integrale stocastice diferă doar printr-un multiplu al integralei lui $\mathrm{d}^*\alpha$.

Acesta este momentul potrivit pentru a vedea câteva exemple concrete de asemenea integrale stocastice și pentru a compara rezultatele obținute până acum cu cele deja obținute în literatura probabilistă.

- Dacă $P = \delta_0$ (măsura Dirac concentrată în 0), atunci

$$\mathrm{Int}_{\delta_0,t}(\alpha)(c) = \mathrm{Strat}_t(\alpha)(c) + \int_0^t (\mathrm{d}^*\alpha)(c(s))\,\mathrm{d}s\ .$$

Comparând aproximațiile $A_{\delta_0,k,t}(\alpha)$ ale lui $I_{\delta_0,t}(\alpha)$ cu cele din teorema 7.37 de la p.110 din [Émery89] (sau cu teorema A din [Darling84], care însă este enunțată în niște ipoteze puțin mai restrictive), recunoaștem imediat că $\mathrm{Int}_{\delta_0,t}(\alpha)$ este integrala Itô a lui α, de aceea de acum înainte o vom nota $\mathrm{Ito}_t(\alpha)$.

- Dacă $P = \mathrm{Leb}_{[0,1]}$ (măsura Lebesgue pe $[0,1]$), sau $P = \delta_{\frac12}$ (măsura Dirac concentrată în $\frac12$), sau $P = \frac12\delta_1$, sau $P = \frac12(\delta_0+\delta_1)$, atunci integrala stocastică corespunzătoare este

$$\mathrm{Int}_{\mathrm{Leb}_{[0,1]},t}(\alpha) = \mathrm{Strat}_t(\alpha)\ .$$

Comparând aproximațiile $A_{\mathrm{Leb}_{[0,1]},k,t}(\alpha)$ ale lui $\mathrm{Int}_{\mathrm{Leb}_{[0,1]},t}(\alpha)$ cu cele din teorema 7.14 de la p.96 din [Émery89], recunoaștem imediat că $\mathrm{Int}_{\mathrm{Leb}_{[0,1]},t}(\alpha)$ este integrala Stratonovici a lui α. Observăm și că $S_{\mathrm{Leb}_{[0,1]},k,t} = A_{\mathrm{Leb}_{[0,1]},k,t}$ pentru orice $k \ge 0$. (Cititorul este invitat să compare aceste rezultate și cu secțiunea 6 din [Norris92].)

- În general, dacă $M_1(P) = \int_{[0,1]} \tau\,\mathrm{d}P(\tau)$, atunci integrala stocastică $\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha)$ corespunzătoare lui $P \in \mathrm{Prob}([0,1])$ coincide cu cea produsă de probabilitățile $\delta_{M_1(P)}$ (măsura Dirac concentrată în $M_1(P) \in [0,1]$) și $(1-M_1(P))\delta_0 + M_1(P)\delta_1$, toate aceste probabilități având același moment de ordinul 1, și anume $M_1(P)$. Însă, deși în principiu am putea studia integralele stocastice doar folosind aceste măsuri foarte simple, unele rezultate sunt mai ușor de demonstrat folosind măsuri mai complicate având același moment de ordinul 1. De exemplu, pentru integrala Stratonovici uneori este mult mai convenabil să folosim măsura Lebesgue pe $[0,1]$.

- Cazul $M_1(P) = 0$ este mult mai simplu decât toate celelalte, deoarece singura măsură P cu această proprietate este δ_0. Într-adevăr, dacă $[\varepsilon, 1] \subset (0, 1]$ atunci

$$0 = \int_{[0,1]} \tau \, \mathrm{d}P(\tau) \geq \int_{[\varepsilon,1]} \tau \, \mathrm{d}P(\tau) \geq \varepsilon \, P([\varepsilon, 1]) \geq 0 \; ,$$

de unde $P([\varepsilon, 1]) = 0$, deci $P((0, 1]) = 0$, adică P este concentrată în 0. Cum P este probabilitate, rezultă că $P = \delta_0$. Așadar, singura integrală corespunzând situației $M_1(P) = 0$ este integrala Itô.

Observația 4.12. *Din exemplele de mai sus rezultă că integralele Stratonovici și Itô ale lui α sunt egale dacă și numai dacă $\mathrm{d}^* \alpha = 0$. De comparat acest rezultat cu cel din lema 8.24 de la p.120 din [Émery89], unde este dată o condiție (greu de verificat în practică) doar suficientă pentru a avea această egalitate. Mai precis, Émery introduce mai întâi conceptul de transport paralel stocastic în TM și în T^*M, pornind de la care construiește niște semimartingale ce depind de α, iar dacă acestea au variație finită atunci cele două integrale stocastice ale lui α sunt egale.*

Propoziția 4.13. *Integrala Stratonovici are proprietatea că $\mathrm{Strat}_t(\mathrm{d}f)(c) = f(c(1)) - f(x_0)$ pentru orice funcție reală f continuu diferențiabilă și pentru aproape orice $c \in \mathcal{C}_t$.*

Corolarul 4.14 (Lema lui Itô)**.** *Dacă $f : M \to \mathbb{R}$ este de două ori derivabilă cu derivatele continue, iar Δ este operatorul Laplace-Beltrami pe M, atunci*

$$f(c(1)) = f(x_0) + \mathrm{Ito}_t(\mathrm{d}f)(c) + \int_0^t (\Delta f)(c(s)) \, \mathrm{d}s$$

pentru aproape orice $c \in \mathcal{C}_t$.

Ca întotdeauna, când studiem un obiect ce depinde de niște parametri este interesant să studiem proprietățile acestei dependențe. În particular, este interesant să studiem cum depinde integrala stocastică $\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha)$ de $t \in (0, T]$, cu $T > 0$. Cum însă aceste integrale trăiesc în spații diferite pentru valori diferite ale lui t (și anume spațiile $L^0(\mathcal{C}_t)$, care depind de t), ele trebuie în prealabil scufundate într-un același spațiu pentru a putea fi comparate, ceea ce vom face în teorema următoare. Pentru a o enunța, amintim că topologia naturală în $L^0(\mathcal{C}_t)$ este cea a convergenței în măsura w_t (care se arată ușor că este egală cu măsura $(\mathrm{res}_{[0,t]})_* w_T$, unde $\mathrm{res}_{[0,t]} : \mathcal{C}_T \to \mathcal{C}_t$ este restricția $\mathrm{res}_{[0,t]}(c) = c|_[0, t])$. Aceasta poate fi metrizată de orice distanță de forma

$$d_t(f, g) = \int_{\mathcal{C}_t} \varphi(|f - g|) \, \mathrm{d}w_t =$$

$$= \int_{\mathcal{C}_T} \varphi(|f \circ \mathrm{res}_{[0,t]} - g \circ \mathrm{res}_{[0,t]}|) \, \mathrm{d}w_T = d_T(f \circ \mathrm{res}_{[0,t]}, g \circ \mathrm{res}_{[0,t]})$$

unde $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ trebuie să fie continuă, mărginită, concavă, crescătoare, cu $\varphi(0) = 0$ și $\varphi > 0$ pe $(0, \infty)$. Orice asemenea distanță este numită ”distanță Lévy”.

Pentru integrala curbilinie, dacă $c : [0, T] \to M$ este diferențiabilă cu derivata continuă, atunci avem relația

$$\left| \int_c \alpha - \int_{\mathrm{res}_{[0,t]}(c)} \alpha \right| = \left| \int_{\mathrm{res}_{[t,T]}(c)} \alpha \right| \leq \sup_{s \in [0,T]} |\alpha_{c(s)}(\dot{c}(s))| \, (T - t) \; .$$

În particular, aplicația $[0, T] \ni t \mapsto \int_{\mathrm{res}_{[0,t]}(c)} \alpha \in \mathbb{R}$ este continuă. În teorema următoare vom prezenta un analog mai slab al acestei concluzii pentru integrarea stocastică.

Teorema 4.15. *Pentru orice $\alpha \in \Omega^1(M)$, aplicația $(0, T] \ni t \mapsto \mathrm{Int}_{P,t}(\alpha) \circ \mathrm{res}_{[0,t]} \in L^0(\mathcal{C}_T)$ este continuă.*

4.5 Formula Feynman-Kac-Itô

În continuare vom vedea că integrala Stratonovici emerge absolut natural atunci când încercăm să deducem analogul formulei Feynman-Kac în prezența unui potențial magnetic reprezentat de 1-forma α. Teorema 15.3 de la p.162 din [Simon79b] prezintă o perspectivă alternativă asupra acestei probleme, dar numai în cazul $M = \mathbb{R}^n$. Teorema următoare are nevoie de o extindere a câtorva dintre notațiile folosite până acum: astfel în loc de $\mathcal{C}_t$ care desemna un spațiu de curbe ce porneau din x_0, vom folosi spațiul

$$\mathcal{C}_{t,x} = \{c : [0, t] \to M \text{ continuă}; c(0) = x\}$$

pe care îl vom înzestra cu măsura Wiener $w_{t,x}$ și cu integrala Stratonovici $\mathrm{Strat}_{t,x}$.

Teorema 4.16 (Formula Feynman-Kac-Itô). *Dacă $V : M \to \mathbb{R}$ este continuu și $\inf V > -\infty$, și dacă $f \in L^2(M)$, atunci*

$$(\mathrm{e}^{-tH_{\mathrm{d}+\mathrm{i}\alpha,V}} f)(x) = \int_{\mathcal{C}_{t,x}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{Strat}_{t,x}(\alpha) - \int_0^t V(c(s))\,\mathrm{d}s} f(c(t))\,\mathrm{d}w_{t,x}(c)$$

pentru orice $t > 0$ și aproape orice $x \in M$.

Alegem să oprim aici expunerea acestor rezultate de analiză stocastică pe varietăți. Scopul principal a fost de a arăta că acest capitol al matematicii poate fi construit în totalitate folosind doar instrumente de analiză funcțională, fără a fi necesar să recurgem la concepte sau tehnici de teoria probabilităților. De asemenea, un alt scop a fost propunerea unui punct de vedere din care întreaga analiză stocastică să fie văzută decurgând dintr-un număr mic de idei fundamentale, ca un analog al integrării curbilinii. Strategia adoptată în acest text a permis clasificarea integralelor stocastice și evidențierea relației simple dintre ele. În particular, am văzut că integrala Stratonovici este instrumentul stocastic natural în problemele cu o pronunțată componentă geometrică, ea permițând ca multe idei de geometrie diferențială să poată fi transportate în contextul stocastic aproape neschimbate. În următorul capitol vom vedea că integrala Itô este instrumentul stocastic preferat în problemele cu o componentă probabilistică mai pronunțată. Niciuna dintre aceste două integrale nu este ”mai bună” decât cealaltă, alegerea utilizării uneia dintre ele fiind făcută în funcție de specificul problemei studiate.

Din punct de vedere tehnic, am reușit ca toate construcțiile efectuate să fie intrinseci, adică fără a recurge la scufundarea varietății în spații euclidiene cu teorema lui Whitney, cum se procedează în majoritatea textelor de analiză stocastică pe varietăți. De asemenea, nu am avut nevoie nici de aplicația desfășurătoare a lui Cartan, care este folosită de exemplu în [Elworthy82]. Nu a fost necesară nici alegerea unei reguli de interpolare ([Émery89], p.94 și urm., unde este necesară folosirea teoremei de selecție măsurabilă, verificarea ipotezelor căreia este complet netrivială deoarece obligă la studierea proprietăților topologiei Whitney pe spațiul curbelor diferențiabile de la $[0,1]$ la M - detalii tehnice expediate foarte rapid de Émery), rolul ei fiind preluat de funcția de trunchiere χ precum și de trunchierea cu 0 a expresiei $\int_{[0,1]} \alpha_{\gamma_{x,y}(\tau)}(\dot\gamma_{x,y}(\tau))\,\mathrm{d}P(\tau)$ dacă y este prea departe de x. Nu am avut nevoie nici de vectori tangenți de ordinul al doilea și de geometria diferențială de ordinul al doilea a lui Schwartz, de care are nevoie Émery. Această parcimonie de concepte fundamentale și mijloace tehnice a fost un țel asumat al prezentului text care pleacă de la convingerea că minimalitatea conceptuală și tehnică trebuie să fie un imperativ al oricărei construcții intelectuale.

Să încheiem cu discutarea rapidă a orientării vectorilor tangenți din șirul aproximațiilor integralei Itô, care ne amintim că corespunde lui $P = \delta_0$. Este rezonabil ca la primul contact cu această integrală să ne întrebăm: de ce vectorii tangenți (”creșterile”) trebuie orientați către viitor și nu către trecut? Dacă însă înțelegem integralele stocastice în sensul prezentat până aici, orientarea vectorilor tangenți $\exp_x^{-1} y$ (adică $y - x$ în $\mathbb{R}^n$) este dată de expresia $\int_{[0,1]} \alpha_{\gamma_{x,y}(\tau)}(\dot\gamma_{x,y}(\tau))\,\mathrm{d}P(\tau)$ (luând apoi $P = \delta_0$), adică în esență de expresia $\alpha_{c(s)}(\dot c(s))$ ce apare în integrala de drum uzuală. Înțelegem astfel că orientarea vectorilor tangenți nu este ceva ce trebuie ales, ci este doar o consecință automată, inevitabilă, a analogiei dintre integrarea stocastică și integrarea de-a lungul curbelor netede.

5. INTEGRABILITATEA PĂTRATICĂ A INTEGRALELOR STOCASTICE

Am văzut în capitolul precedent că integralele stocastice sunt funcții din $L^0(\mathcal{C}_t)$. Este rezonabil să ne întrebăm dacă ele aparțin unor spații de funcții mai bune, de exemplu lui $L^2(\mathcal{C}_t)$. Din păcate, eforturile noastre par să indice că fără a impune ipoteze suplimentare acest demers se vădește fără sorți de izbândă; vom presupune așadar în acest capitol că α are suportul compact. În această ipoteză răspunsul întrebării noastre este afirmativ și, mai mult, vom vedea că integralele stocastice se pot extinde de la 1-forme cu suport compact la spații de forme mult mai mari.

5.1 Preliminarii topologice

Funcția $I_P(\alpha)$, deși nu era netedă pe $M \times M$, a fost suficient de regulată pentru a ne permite obținerea rezultatelor din capitolul precedent. În acest capitol, însă, vom avea nevoie să o utilizăm în calcule ce implică derivări, de aceea o vom ajusta cu ajutorul unei funcții de tăiere pentru a îi evita singularitățile și a o transforma într-o funcție netedă. Astfel, dacă $\chi : M \times M \to [0,1]$ este funcția de tăiere din capitolul 3, definim $I_P^{(\chi)}(\alpha)$ prin $I_P^{(\chi)}(\alpha) = \chi \, I_P(\alpha)$ și observăm rapid că $I_P^{(\chi)}(\alpha)$ este netedă. Corespunzător acestei funcții, definim aproximațiile $A_{P,t,k}^{(\chi)}(\alpha) \in L^0(\mathcal{C}_t)$ prin

$$A_{P,t,k}^{(\chi)}(\alpha)(c) = \sum_{j=0}^{2^k-1} I_P^{(\chi)}(\alpha) \left(c\left(\frac{jt}{2^k}\right), c\left(\frac{(j+1)t}{2^k}\right)\right) \ .$$

Pentru început, însă, să demonstrăm că și aproximațiile $A_{P,t,k}^{(\chi)}$ converg în măsură la $\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha)$, deci tăierea cu χ nu schimbă nimic din acest punct de vedere.

Teorema 5.1. *Funcțiile $A_{P,t,k}^{(\chi)}$ converg în măsură la $\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha)$.*

5.2 Integrabilitatea pătratică a integralei Itô

Teorema 5.2. *Dacă α are suportul compact atunci $\mathrm{Ito}_t(\alpha) \in L^2(\mathcal{C}_t)$. În plus, există o funcție măsurabilă și mărginită $N : M \to [0,\infty)$ astfel încât*

$$\|\mathrm{Ito}_t(\alpha)\|^2_{L^2(\mathcal{C}_t)} \le \int_{\mathcal{C}_t} \int_0^t \|\alpha_{c(s)}\|^2_{T^*_{c(s)}M} \, N(c(s)) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}w_t(c) \ .$$

Corolarul 5.3. *Dacă α are suportul compact, atunci $\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha) \in L^2(\mathcal{C}_t)$. În plus,*

$$\|\mathrm{Int}_{P,t}(\alpha)\|_{L^2(\mathcal{C}_t)} \le \sqrt{\int_{\mathcal{C}_t} \int_0^t \|\alpha_{c(s)}\|^2_{T^*_{c(s)}M} \, N(c(s)) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}w_t(c) +} \\ + 2M_1(P) \sqrt{\int_{\mathcal{C}_t} \left(\int_0^t (\mathrm{d}^*\alpha)(c(s)) \, \mathrm{d}s \right)^2 \mathrm{d}w_t(c)}$$

O consecință a acestei ultime formule este ceea ce am putea numi ”scufundarea stocastică”: dacă înzestrăm spațiul 1-formelor netede cu suport compact $\Omega^1_0(M)$ cu norma

$$\|\alpha\|_{(P,\chi)} = \sqrt{\int_{\mathcal{C}_t} \int_0^t \|\alpha_{c(s)}\|^2_{T^*_{c(s)}M} \, N(c(s)) \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}w_t(c) +}$$

$$+ 2M_1(P)\sqrt{\int_{\mathcal{C}_t}\left(\int_0^t (\mathrm{d}^*\alpha)(c(s))\,\mathrm{d}s\right)^2 \mathrm{d}w_t(c)}$$

atunci aplicația $\Omega^1_0(M) \ni \alpha \mapsto \mathrm{Int}_P(\alpha) \in L^2(\mathcal{C}_t)$ este o scufundare continuă, cu norma cel mult 1. Mai mult, dacă notăm cu $\widehat{\Omega^1_0(M)}^{(P,\chi)}$ completatul lui $\Omega^1_0(M)$ în această normă, putem extinde prin continuitate integrarea stocastică la o aplicație liniară și continuă $\mathrm{Int}_P : \widehat{\Omega^1_0(M)}^{(P,\chi)} \to L^2(\mathcal{C}_t)$, așadar putem defini integrarea stocastică pe un spațiu semnificativ mai larg decât $\Omega^1_0(M)$. Când $P = \delta_0$ (și deci lucrăm cu integrala Itô), și $M = \mathbb{R}^n$, interacțiunea dintre nucleul căldurii și funcția distanță devine foarte simplă, situație în care regăsim ”izometria lui Itô”, adică

$$\|\mathrm{Ito}_t(\alpha)\|^2_{L^2(\mathcal{C}_t)} \le 2n \int_{\mathcal{C}_t}\int_0^t \|\alpha_{c(s)}\|^2_{T^*_{c(s)}\mathbb{R}^n}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}w_t(c)\ ,$$

cunoscută în analiza stocastică pe $\mathbb{R}^n$ (cu inegalitate, însă, în locul egalității).

Observăm, de asemenea, că dacă $0 < M_1(P) \le M_1(Q)$, atunci

$$\|\alpha\|_{(P,\chi)} \le \|\alpha\|_{(Q,\chi)} \le \frac{M_1(Q)}{M_1(P)}\|\alpha\|_{(P,\chi)}\ ,$$

și deci spațiile $\widehat{\Omega^1_0(M)}^{(P,\chi)}$ și $\widehat{\Omega^1_0(M)}^{(Q,\chi)}$ coincid ca spații vectoriale topologice iar normele lor sunt quasi-isometrice.

Corolarul 5.4. *Dacă* $\alpha \in \widehat{\Omega^1_0(M)}^{(\delta_0)}$ *atunci* $\int_{\mathcal{C}_t} \mathrm{Ito}_t(\alpha)\,\mathrm{d}w_t = 0$.

Cititorul este invitat să compare corolarul de mai sus cu teorema 3.2.1.(iii) de la p.30 din [Øksendal13], care enunță un rezultat similar în formalismul stocastic uzual în $\mathbb{R}^n$. La fel, este invitat să compare și teorema 5.2 cu enunțul și demonstrația izometriei lui Itô din analiza stocastică în $\mathbb{R}^n$ (lema 3.1.5 de la p.26 și corolarul 3.1.7 de la p.29 din aceeași carte), pentru o mai bună înțelegere a rezultatelor obținute în acest text. De asemenea, cititorul este invitat să observe că în acest capitol personajul principal a fost integrala Itô, dintre toate integralele stocastice ea pretându-se cel mai bine tipului de raționamente de analiză matematică construite mai sus. Această situație este în contrast cu cea mai geometrică din capitolul 4, unde integrala Stratonovici s-a dovedit instrumentul principal în toate raționamentele. Aceasta sugerează că în aplicații alegerea uneia dintre integralele stocastice este una de convenabilitate: acolo unde primează raționamentul geometric, este preferabil uzul integralei Stratonovici, în timp ce în raționamentele cu un puternic caracter analitic este recomandabilă integrala Itô.

6. TRANSPORTUL PARALEL STOCASTIC

Scopul acestui capitol este construcția conceptului de transport paralel stocastic folosind exclusiv instrumente și concepte de analiză funcțională. Ideea de ansamblu a textului și chiar unele tehnici de demonstrație vor semăna cu cele folosite în construirea integralei stocastice Stratonovici; non-trivialitatea fibratului în care vom lucra și dimensiunea superioară a fibrei sale vor complica, însă, problema din punct de vedere tehnic.

6.1 Motivația și planul capitolului

Conceptul de ”transport paralel stocastic” într-un fibrat vectorial E peste o varietate Riemannian M este de obicei prezentat ca o consecință a conceptului de ”ecuație diferențială stocastică”; aceasta este abordarea aleasă în majoritatea textelor, de exemplu în [IW89] și în [Meyer82]. În ciuda acestui fapt, K. Itô concepuse acest concept în mod diferit ([Itô63], [Itô75a], [Itô75b]): pentru orice curbă continuă $c : [0, t] \to M$, considerăm unicul segment geodezic care unește punctele ”diadice” consecutive $c(\frac{jt}{2^k})$ și $c(\frac{(j+1)t}{2^k})$, unim aceste 2^k segmente geodezice într-o singură curbă în zig-zag geodezică pe porțiuni, și transportăm paralel vectorul $v \in E_{c(0)}$ de-a lungul acestei curbe până în $E_{c(t)}$; pentru aproape toate curbele continue c, limita când $k \to \infty$ va exista și va fi numită ”transportul paralel stocastic al lui v de-a lungul lui c”. Cele două abordări sunt echivalente, după cum se arată în [Meyer82] and [Émery90], și ambele sunt construite în contextul teoriei probabilităților, fiind astfel accesibile mai mult probabiliștilor. Scopul acestui capitol este să reconstruim conceptul de ”transport paralel stocastic” folosind numai instrumente și tehnici de analiză funcțională, făcându-l astfel accesibil unei clase mult mai largi de matematicieni.

Cum construcțiile din acest text vor fi destul de tehnice, să schițăm intuiția care le subîntinde. Fie $D_t = \{\frac{jt}{2^k} \mid k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N} \cap [0, 2^k]\}$ - numerele ”diadice” dintre 0 și t. Urmând ideea lui Itô, transportul paralel al lui $v \in E_{c(0)}$ de-a lungul liniei în zig-zag determinate de punctele $\{c(0), c(\frac{t}{2^k}), \dots, c(\frac{(2^k-1)t}{2^k}), c(t)\}$ este transportul paralel $T_{k,0}$ de la $c(0)$ la $c(\frac{t}{2^k})$, urmat de transportul paralel $T_{k,1}$ de la $c(\frac{t}{2^k})$ la $c(\frac{2t}{2^k})$ și așa mai departe, încheind cu transportul paralel $T_{k,2^k-1}$ de la $c(\frac{(2^k-1)t}{2^k})$ la $c(t)$; formal, este $T_{k,2^k-1} \dots T_{k,0} v$. Acum urmează observația centrală pentru acest capitol: compunerea de operatori $T_{k,2^k-1} \dots T_{k,0} v$ poate fi văzută drept ”contracția” tuturor produselor tensoriale din

$$\begin{aligned} T_{k,2^k-1} \otimes \dots \otimes T_{k,0} \otimes v \in \left(E_{c(t)} \otimes E^*_{c(\frac{(2^k-1)t}{2^k})}\right) \otimes \dots \otimes \left(E_{c(\frac{t}{2^k})} \otimes E^*_{c(0)}\right) \otimes E_{c(0)} \simeq \\ \simeq E_{c(t)} \otimes \left(E^*_{c(\frac{(2^k-1)t}{2^k})} \otimes E_{c(\frac{(2^k-1)t}{2^k})}\right) \otimes \dots \otimes \left(E^*_{c(0)} \otimes E_{c(0)}\right) \simeq \\ \simeq E_{c(t)} \otimes \operatorname{End} E^*_{c(\frac{(2^k-1)t}{2^k})} \otimes \dots \otimes \operatorname{End} E^*_{c(0)} \ . \end{aligned}$$

Să vedem acum ce înseamnă această ”contracție”. Dacă U și V sunt spații vectoriale finit-dimensionale, dacă $u \in U$ și $\omega \in V^*$, și $A : U \to V$ este un operator linear, atunci $\omega \otimes A \otimes u \in V^* \otimes V \otimes U^* \otimes U \simeq \operatorname{End} V^* \otimes \operatorname{End} U^*$; dacă Id_U și Id_V sunt operatorii identitate pe U și V, atunci $\mathrm{Id}_U \otimes \mathrm{Id}_V \in \operatorname{End} V \otimes \operatorname{End} U$, de aceea are sens să aplicăm $\omega \otimes A \otimes u$ pe $\mathrm{Id}_U \otimes \mathrm{Id}_V$, rezultatul fiind $\omega(Au)$. Vedem că pentru a efectua acest tip de contracție în produsul de transporturi paralele considerat mai sus, avem nevoie de un factor suplimentar $E^*_{c(t)}$ cu care să împerechem factorul $E_{c(t)}$ pentru a obține $\operatorname{End} E^*_{c(t)}$. Aceasta înseamnă că dacă $\eta_{c(t)} \in E_{c(t)}$, atunci

$$\eta_{c(t)} \otimes T_{k,2^k-1} \otimes \dots \otimes T_{k,0} \otimes v \in \operatorname{End} E^*_{c(t)} \otimes \dots \otimes \operatorname{End} E^*_{c(0)}$$

și

$$\eta_{c(t)}(T_{k,2^k-1} \dots T_{k,0} v) = (\eta_{c(t)} \otimes T_{k,2^k-1} \otimes \dots \otimes T_{k,0} \otimes v)(\mathrm{Id}_{E_{c(t)}} \otimes \dots \otimes \mathrm{Id}_{E_{c(0)}}) \ .$$

Urmându-l acum pe Itô, facem $k \to \infty$; ceea ce obținem, atunci, va fi o contracție între două produse tensoriale cu un număr infinit de factori; construcția riguroasă a acestor produse tensoriale va fi prima noastră sarcină, dar putem spune de pe acum că aceste produse tensoriale vor fi $\mathcal{E}_c = \otimes_{s \in D_t} \operatorname{End} E_{c(s)}$ și dualul său. Dacă notăm spațiul curbelor continue $\mathcal{C}_t$, faptul că $\mathcal{E}_c$ depinde de $c \in \mathcal{C}_t$ sugerează că reuniunea disjunctă $\coprod_{c \in \mathcal{C}_t} \mathcal{E}_c$ va fi un fibrat vectorial (topologic) de rang infinit peste $\mathcal{C}_t$. Cum $\eta_{c(t)} \otimes T_{k,2^k-1} \otimes \ldots \otimes T_{k,0} \otimes v$ ia valori în fibra $\mathcal{E}_c^*$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$ și orice $c \in \mathcal{C}_t$, intuim că aceste produse tensoriale de transporturi paralele vor fi secțiuni de un anumit tip în $\mathcal{E}^*$, ceea ce face rezonabil să presupunem că limita lor când $k \to \infty$ (transportul paralel stocastic din care am eliminat η) va fi o secțiune de același tip. Într-adevăr, așa vor sta lucrurile, și pentru a o demonstra vom recurge la teorema lui Chernoff despre aproximarea semigrupurilor de contracții.

O consecință neașteptată a construcției din acest capitol este o versiune nouă a formulei Feynman-Kac în fibrați vectoriali: nu doar că demonstrația ei va fi complet nouă, dar și ipotezele sale pare să fie cele mai generale considerate până acum în literatură, după știința autorului; mai precis, potențialul va fi ales doar local-integrabil și mărginit inferior, și nicio restricție nu va fi impusă varietății.

Planul acestui capitol este următorul, notațiile urmând a fi explicate pe măsură ce devin necesare:

- vom construi un fibrat $\mathcal{E}$ peste $\mathcal{C}_t$, fibrele căruia vor fi spații Hilbert de dimensiune infinită;

- vom considera spații de secțiuni p-integrabile în $\mathcal{E}$ și $\mathcal{E}^*$ și, în particular, vom obține printr-un argument abstract o secțiune anume $\rho_{t,\omega,\eta}$ esențial mărginită, care va fi limita în medie pătratică a unui șir de secțiuni $(P_{t,\omega,\eta,k})_{k \in \mathbb{N}}$ ce vor fi construite explicit;

- vom pune în evidență o aplicație conjugat-liniară și continuă $\mathcal{P}^p_{t,v} : \Gamma^p(\mathcal{E}) \to \Gamma^p(p_t^* E)$, care vom vedea că închide în sine multă informație atât despre geometria fibratului $E \to M$ cât și despre măsura Wiener;

- folosind aplicația $\mathcal{P}^2_{t,v}$ vom putea da un sens din perspectiva analizei funcționale conceptului de transport paralel stocastic;

- în sfârșit, folosind aceeași aplicație $\mathcal{P}^2_{t,v}$, vom vedea o extindere a formulei Feynman-Kac în fibratul E.

6.2 Un fibrat de rang infinit

Fie $E \to M$ un fibrat hermitic de rang complex $r \in \mathbb{N}$, înzestrat cu o conexiune hermitică ∇. Fie $D_t = \{\frac{jt}{2^k} \mid k \in \mathbb{N},\ j \in \mathbb{N} \cap [0, 2^k]\}$ - numerele "diadice" dintre 0 și t. Ne interesează să dăm un sens fibrării descrise intuitiv, neriguros, de $\mathcal{E} = \boxtimes_{s \in D_t} \operatorname{End} E \to \mathcal{C}_t$.

Dacă $c \in \mathcal{C}_t$ definim fibra $\mathcal{E}_c$ a lui $\mathcal{E}$ peste c drept $\bigotimes_{s \in D_t} \operatorname{End} E_{c(s)}$. Acesta este un produs tensorial cu o infinitate de factori a cărui definiție, la rândul ei, este netrivială și necesită o discuție. Astfel, pentru orice $x \in M$, înzestrăm spațiul $\operatorname{End} E_x$ cu produsul hermitic dat de $\langle A, B \rangle_{\operatorname{End} E_x} = \frac{1}{r} \operatorname{Trace}(AB^*)$ când $A, B \in \operatorname{End} E_x$. Observăm că $\langle \cdot, - \rangle_{\operatorname{End} E_x} = \frac{1}{r} \langle \cdot, - \rangle_{E_x \otimes E_x^*}$, produsul hermitic din membrul drept fiind cel natural pe spațiul $E_x \otimes E_x^*$. Dacă $\operatorname{Id}_{E_x} \in \operatorname{End} E_x$ este operatorul identitate, atunci $\|\operatorname{Id}_{E_x}\|_{\operatorname{End} E_x} = 1$. Aceasta ne permite să construim riguros produsul tensorial care dă fibra $\mathcal{E}_c$ după cum urmează. Dacă $D_{t,k} = \{\frac{jt}{2^k} \mid j \in \mathbb{N} \cap [0, 2^k]\}$ pentru orice $k \in \mathbb{N}$, atunci pentru orice $k \le k'$, identificăm monomul tensorial $\otimes_{s \in D_{t,k}} e_{c(s)} \in \bigotimes_{s \in D_{t,k}} \operatorname{End} E_{c(s)}$ cu monomul $\otimes_{s \in D_{t,k'}} e'_{c(s)} \in \bigotimes_{s \in D_{t,k'}} \operatorname{End} E_{c(s)}$ în care $e'_{c(s)} = e_{c(s)}$ pentru $s \in D_{t,k}$ și $e'_{c(s)} = \operatorname{Id}_{E_{c(s)}}$ pentru $s \in D_{t,k'} \setminus D_{t,k}$. Aceasta identifică spațiul $\bigotimes_{s \in D_{t,k}} \operatorname{End} E_{c(s)}$ cu un subspațiu al spațiului $\bigotimes_{s \in D_{t,k'}} \operatorname{End} E_{c(s)}$, ceea ce ne permite să considerăm limita inductivă în sens algebric $\varinjlim_{k \in \mathbb{N}} \bigotimes_{s \in D_{t,k}} \operatorname{End} E_{c(s)}$. Acest spațiu limită se înzestrează în mod natural cu un produs hermitic obținut din produsul hermitic pe fiecare spațiu $\operatorname{End} E_{c(s)}$ după cum am discutat mai sus. La final, se completează limita inductivă algebrică obținută în acest produs hermitic, în sensul spațiilor Hilbert, rezultatul fiind spațiul Hilbert notat $\mathcal{E}_c$. Este important sa observăm că $\mathcal{E}_c$ este separabil deoerece mulțimea de indici din limita inductivă este $\mathbb{N}$ și fiecare spațiu din limita inductivă este finit-dimensional.

Definim acum spațiul total al fibrării drept $\mathcal{E} = \bigcup_{c \in \mathcal{C}_t} \{c\} \times \mathcal{E}_c$. Proiecția naturală a lui $\mathcal{E}$ pe $\mathcal{C}_t$ va fi $\operatorname{pr}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{C}_t$. Deocamdată, $\mathcal{E}$ a fost construit doar ca mulțime, fibră cu fibră; cu ajutorul unor trivializări locale construite explicit, compatibile două câte două, spațiul $\mathcal{E}$ se înzestrează cu o topologie.

Spre deosebire de capitolul în care construim integralele stocastice, vom folosi aici notația $\pi_k : \mathcal{C}_t \to M^{2^k+1}$ dată de

$$\pi_k(c) = \left(c(0), c\left(\frac{t}{2^k}\right), \ldots, c\left(\frac{(2^k-1)t}{2^k}\right), c(t) \right) .$$

Propoziția 6.1. *Proiecțiile $\pi_k : \mathcal{C}_t \to M^{2^k+1}$ și proiecția $\operatorname{pr}_{\mathcal{E}} : \mathcal{E} \to \mathcal{C}_t$ sunt continue.*

6.3 Secțiuni integrabile în fibrați de rang infinit

Definiția 6.2. *Vom spune că secțiunea* $\sigma : \mathcal{C}_t \to \mathcal{E}$ *este o* ***secțiune cilindrică*** *dacă și numai dacă există o secțiune* $s \in \Gamma^\infty\left((\operatorname{End} E)^{\boxtimes(2^k+1)}\right)$ *astfel încât* $\sigma = s \circ \pi_k$.

Definiția 6.3. *Definim spațiul Lebesgue* $\Gamma^2(\mathcal{E})$ *al secțiunilor de pătrat integrabil ca spațiul secțiunilor măsurabile* σ, *identificate dacă coincid aproape peste tot, cu proprietatea că funcția* $\mathcal{C}_t \ni c \mapsto \|\sigma(c)\|_{\mathcal{E}_c} \in [0,\infty)$ *este în* $L^2(\mathcal{C}_t, w_t)$.

Teorema 6.4. *Spațiul* $\Gamma^2(\mathcal{E})$ *înzestrat cu produsul scalar*

$$\langle \sigma_1, \sigma_2\rangle_{\Gamma^2(\mathcal{E})} = \int_{\mathcal{C}_t} \langle \sigma_1(c), \sigma_2(c)\rangle_{\mathcal{E}_c}\, \mathrm{d}w_t(c)$$

este un spațiu Hilbert. Dualul său este $\Gamma^2(\mathcal{E}^*)$, *unde* $\mathcal{E}^*$ *este fibratul dual al lui* $\mathcal{E}$ *în care fibra* $\mathcal{E}_c^*$ *este spațiul dual al lui* $\mathcal{E}_c$ *pentru orice* $c \in \mathcal{C}_t$.

Mai general, și de-a lungul acelorași linii de gândire, se pot introduce spațiile $\Gamma^p(\mathcal{E})$ pentru orice $p \in [1,\infty]$, care vor fi spații Banach. În particular, $\Gamma^q(\mathcal{E}) \subseteq \Gamma^p(\mathcal{E})$ dacă $p \le q$, deoarece măsura Wiener este finită. De asemenea, $\Gamma^p(\mathcal{E}^*)$ este dualul lui $\Gamma^{\frac{p}{p-1}}(\mathcal{E})$ pentru orice $p \in (1,\infty]$. Demonstrațiile sunt analoage celor pentru spații de funcții p-integrabile, acestea din urmă putând fi găsite, de exemplu, în cap.4 din [Brezis11].

Teorema 6.5. *Spațiul* $\operatorname{Cyl}_t(\mathcal{E})$ *al secțiunilor cilindrice esențial mărginite este dens în spațiul* $\Gamma^2(\mathcal{E})$.

Vom considera, ca în celelalte capitole, o exhaustiune a lui M cu domenii relativ compacte cu frontiera netedă $M = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} U_i$, astfel încât $x_0 \in U_0$. În particular, acestea vor fi varietăți Riemann, deci toate considerațiile de mai sus li se aplică. Toate obiectele geometrice extrinsece domeniului U_i vor fi reprezentate vizual prin simbolul de restricție (de exemplu, fibratul $E|_{U_i}$), iar obiectele intrinsec asociate lui U_i for purta indicele (i) (nucleul căldurii asociat conexiunii ∇ în $E|_{U_i}$ va fi $h_\nabla^{(i)}$, laplaceanul înțeles ca generator al semigrupului căldurii în $C(\overline{U_i})$ va fi $L^{(i)}$ etc.).

Vom defini în continuare o funcțională liniară pe $\Gamma^2(\mathcal{E}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})$, care apoi vom arăta că este continuă, deci ei îi va corespunde o secțiune din $\Gamma^2(\mathcal{E}^*|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})$ care va fi intim legată de transportul paralel stocastic. Să fixăm $\omega \in E_{x_0}^*$ și $\eta \in \Gamma_{cb}(E)$, și să definim funcționala $W_{t,\omega,\eta}^{(i)}$ pe secțiuni cilindrice esențial mărginite în felul următor: dacă $s : \overline{U_i}^{2^k+1} \to (\operatorname{End} E)^{\boxtimes(2^k+1)}|_{U^{2^k+1}}$ este o secțiune esențial mărginită, definim

$$W_{t,\omega,\eta}^{(i)}(s\circ\pi_k) = \int_{U_i} \mathrm{d}x_1 \dots \int_{U_i} \mathrm{d}x_{2^k} \left[\omega \otimes h_\nabla^{(i)}\left(\frac{t}{2^k}, x_0, x_1\right) \otimes \dots \right.$$
$$\left. \dots \otimes h_\nabla^{(i)}\left(\frac{t}{2^k}, x_{2^k-1}, x_{2^k}\right) \otimes \eta(x_{2^k})\right] \cdot s(x_0, x_1, \dots, s_{x_{2^k}}) \ .$$

Punctul din integrand denotă o contracție de tensori care pentru a fi înțeleasă necesită un mic comentariu. Termenul $\omega \otimes h_\nabla\left(\frac{t}{2^k}, x_0, x_1\right) \otimes \dots \otimes h_\nabla\left(\frac{t}{2^k}, x_{2^k-1}, x_{2^k}\right) \otimes \eta(x_{2^k})$ aparține spațiului $E_{x_0}^* \otimes (E_{x_0} \otimes E_{x_1}^*) \otimes \dots \otimes (E_{x_{2^k-1}} \otimes E_{x_{2^k}}^*) \otimes E_{x_{2^k}}$ care este izomorf în mod natural cu $(E_{x_0}^* \otimes E_{x_0}) \otimes \dots \otimes (E_{x_{2^k}}^* \otimes E_{x_{2^k}})$, care la rândul său este izomorf cu $(\operatorname{End} E^*)_{x_0} \otimes \dots \otimes (\operatorname{End} E^*)_{x_{2^k}}$ (atragem atenția că acest ultim izomorfism nu este cel natural ci este înmulțit cu un factor de normare, deoarece produsul scalar a două endomorfisme a fost ales astfel încât identitatea să aibă norma 1). La rândul său, $s(x_0, \dots, x_{2^k})$ aparține spațiului $(\operatorname{End} E)_{x_0} \otimes \dots \otimes (\operatorname{End} E)_{x_{2^k}}$, ceea ce clarifică contracția tensorială din integrală.

$W_{t,\omega,\eta}^{(i)}$ este bine definită, în mod trivial liniară, și că

$$|W_{t,\omega,\eta}^{(i)}(s\circ\pi_k)| \le \frac{1}{\sqrt{r}}\|\omega\|_{E_{x_0}^*} \int_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})} \|(\eta(c(t))\|(s\circ\pi_k)(c)\|\, \mathrm{d}w_t^{(i)}(c) \le$$
$$\le \frac{1}{\sqrt{r}}\|\omega\|_{E_{x_0}^*} [(\mathrm{e}^{-tL^{(i)}}\|\eta\|^2)(x_0)]^{\frac{1}{2}}\, \|(s\circ\pi_k)(c)\|_{\Gamma^2(\mathcal{E}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})} \ ,$$

unde $\|\eta\|$ denotă funcția $M \ni x \mapsto \|\eta(x)\|_{E_x} \in [0,\infty)$.

Cum secțiunile cilindrice esențial mărginite sunt dense în $\Gamma^2(\mathcal{E}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})$, rezultă că $W_{t,\omega,\eta}^{(i)}$ se poate extinde în mod unic la o funcțională liniară și continuă pe acest spațiu, deci există un unic $\rho_{t,\omega,\eta}^{(i)} \in \Gamma^2(\mathcal{E}^*|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})$ astfel încât

$$W_{t,\omega,\eta}^{(i)}(\sigma) = \int_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})} \rho_{t,\omega,\eta}^{(i)}(c)(\sigma(c))\, \mathrm{d}w_t^{(i)}(c)$$

pentru orice $\sigma \in \Gamma^2(\mathcal{E}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})$. În plus, $\|\rho^{(i)}_{t,\omega,\eta}\|_{\Gamma^2(\mathcal{E}^*|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})} \leq \frac{1}{\sqrt{r}} \|\omega\|_{E^*_{x_0}} [(\mathrm{e}^{-tL^{(i)}} \|\eta\|^2)(x_0)]^{\frac{1}{2}}$.

În continuare, vom căuta să înțelegem ce fel de obiect geometric este $\rho^{(i)}_{t,\omega,\eta}$, mai precis vom investiga legătura sa cu transportul paralel în E. În acest scop, pentru orice $(x,y) \in M \times M$ să definim $P(x,y) : E_y \to E_x$ prin:

- $P(x,y) =$ transportul paralel de la y la x, dacă există o unică geodezică minimizantă (în M) între x și y definită pe $[0,1]$,
- $P(x,y) = 0$ altminteri.

Observăm că P astfel definit este o secțiune în fibratul $E \boxtimes E^*$. Cum submulțimea

$$\{(x,y) \in M \times M \mid \text{există o unică geodezică minimizantă între } x \text{ și } y \text{ definită pe } [0,1]\}$$

este deschisă în $M \times M$, ea va fi în particular măsurabilă. Cum $(x,y) \mapsto P(x,y)$ este o secțiune în $E \boxtimes E^*$ continuă pe această submulțime, P va fi o secțiune măsurabilă în acest fibrat.

Cu P astfel definit, pentru orice curbă $c \in \mathcal{C}_t$ și orice $k \in \mathbb{N}$ definim

$$P_{t,\omega,\eta,k}(c) = \omega \otimes P\left(c(0), c\left(\frac{t}{2^k}\right)\right) \otimes \ldots \otimes P\left(c\left(\frac{(2^k-1)t}{2^k}\right), c(t)\right) \otimes \eta(c(t))$$

și, cum P este o aplicație măsurabilă și mărginită punctual în norma operatorială de 1, conchidem că $P_{t,\omega,\eta,k}$ este o secțiune cilindrică măsurabilă și mărginită în fibratul $\mathcal{E}^*$. Vom arăta că $\rho_{t,\omega,\eta}$ este limita șirului $(P_{t,\omega,\eta,k})_{k\in\mathbb{N}}$ în $\Gamma^2(\mathcal{E}^*)$.

Teorema 6.6. *Șirul* $(P_{t,\omega,\eta,k}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge la* $\rho^{(i)}_{t,\omega,\eta}$ *în* $\Gamma^2(\mathcal{E}^*|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})})$*, uniform în raport cu t din submulțimi mărginite ale lui* $(0,\infty)$.

Până acum, am lucrat pe spațiile de curbe $\mathcal{C}_t(\overline{U_i})$ asociate domeniilor U_i din exhaustiunea lui M. Am făcut aceasta însă numai din motive tehnice. Este momentul, acum, să eliminăm această exhaustiune și să obținem obiecte și relații între ele globale.

Teorema 6.7. *Dacă* $i \leq j$ *atunci* $\rho^{(j)}_{t,\omega,\eta}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_i})} = \rho^{(i)}_{t,\omega,\eta}$.

Această proprietate de compatibilitate între secțiunile $(\rho^{(j)}_{t,\omega,\eta})_{j\in\mathbb{N}}$ ne asigură că secțiunea definită de $\rho_{t,\omega,\eta} = \lim_{j\to\infty} \rho^{(j)}_{t,\omega,\eta}$ este bine definită și că $\rho_{t,\omega,\eta}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_j})} = \rho^{(j)}_{t,\omega,\eta}$. În definirea lui $\rho_{t,\omega,\eta}$ înțelegem că lucrăm cu reprezentanți măsurabili ai claselor de secțiuni $\rho^{(j)}_{t,\omega,\eta} \in \Gamma^\infty(\mathcal{E}^*|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_j})}) \subseteq \Gamma^\infty(\mathcal{E}^*)$, și că schimbarea acestor reprezentanți modifică limita doar pe o submulțime neglijabilă.

Teorema 6.8. *Secțiunea* $\rho_{t,\omega,\eta}$ *astfel definită este măsurabilă și esențial mărginită. În plus,* $\|\rho_{t,\omega,\eta}(c)\|_{\mathcal{E}^*_c} = \frac{1}{\sqrt{r}} \|\omega\|_{E^*_{x_0}} \|\eta_{c(t)}\|_{E_{c(t)}}$ *pentru aproape orice* $c \in \mathcal{C}_t$.

Am văzut în teorema 6.6 că $P_{t,\omega,\eta,k}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_j})} \to \rho_{t,\omega,\eta}|_{\mathcal{C}_t(\overline{U_j})}$ în medie pătratică în raport cu măsura $w^{(j)}_t$, pentru orice $j \in \mathbb{N}$. Vom demonstra în continuare că toate aceste convergențe pe spațiile $\mathcal{C}_t(\overline{U_j})$ antrenează aceeași convergență global, pe spațiul $\mathcal{C}_t$.

Teorema 6.9. *Șirul* $(P_{t,\omega,\eta,k})_{k\in\mathbb{N}}$ *converge la* $\rho_{t,\omega,\eta}$ *în* $\Gamma^2(\mathcal{E}^*)$*, uniform în raport cu* $t \in (0,T]$ *oricare ar fi* $T > 0$.

6.4 O aplicație continuă între spații de secțiuni integrabile

Obiectul $\rho_{t,\omega,\eta}$, deși conține foarte multă informație, nu are o interpretare geometrică clară. În ceea ce urmează vom obține din el un nou obiect matematic care se va dovedi a fi transportul paralel stocastic. Mai mult, secțiunea η nu ar trebui să joace niciun rol în definirea transportului paralel stocastic, deoarece secțiunile $\mathcal{P}_{t,v,k}$ de mai jos (care se va vedea că aproximează transportul paralel stocastic) nu depind de ea. Într-adevăr, utilizarea lui η a fost dictată doar de strategia de demonstrație aleasă, η având un rol pur auxiliar, dictat de rațiuni tehnice, și eforturile noastre în ceea ce urmează se vor concentra pe eliminarea sa din rezultatele obținute.

Fie $p_t : \mathcal{C}_t \to M$ proiecția dată de $p_t(c) = c(t)$. Pentru orice $v \in E_{x_0}$ vom nota cu $v^\flat \in E^*_{x_0}$ forma liniară definită de $v^\flat = \sqrt{r}\, \langle \cdot, v \rangle_{E_{x_0}} \in E^*_{x_0}$. Notația $p_t^* E$ desemnează fibratul peste $\mathcal{C}_t$ obținut ca pull-back prin p_t al fibratului $E \to M$. Fibra $(p_t^* E)_c$ va fi, prin definiție, $E_{c(t)}$, și vom prefera a doua notație pentru simplitatea ei. Vom construi în continuare, pentru orice $p \in (1, \infty]$, o aplicație conjugat-liniară și continuă $\Gamma^p(\mathcal{E}) \ni \xi \mapsto \mathcal{P}_{t,v}^p(\xi) \in \Gamma^p(p_t^* E)$ astfel încât

$$[\rho_{t,v^\flat,\eta}(c)]\,[\xi(c)] = \langle \mathcal{P}_{t,v}^p(\xi)(c),\, \eta(c(t)) \rangle_{E_{c(t)}}$$

pentru orice $\eta \in \Gamma^\infty(E)$.

Fie $M = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} V_i'$ o acoperire a lui M cu deschiși de trivializare pentru E. Fie $V_0 = V_0'$ și $V_i = V_i' \setminus (V_0 \cup \ldots \cup V_{i-1})$ pentru $i \geq 1$; aceste submulțimi vor fi domenii de trivializare măsurabile disjuncte două câte două. Deasupra fiecărui V_i vom considera un reper ortonormat măsurabil $\{\eta_i^1, \ldots, \eta_i^r\}$. Definind η^l prin $\eta^l|_{V_i} = \eta_i^l$ pentru orice $1 \leq l \leq r$ și $i \in \mathbb{N}$, obținem un reper global în E, ortonormat, măsurabil $\{\eta^1, \ldots, \eta^r\}$ format din secțiuni din $\Gamma^\infty(E) \subseteq \Gamma_t$, deci din secțiuni η^l pentru care $\rho_{t,v^\flat,\eta^l}$ este un obiect bine definit după cum am văzut mai sus. Fie $\{\eta_1, \ldots, \eta_r\}$ reperul dual în E^* definit prin $\eta_k(\eta^l) = \delta_k^l$ (simbolul lui Kronecker).

Se arată că $\rho_{t,\omega,\eta}$, care a fost până acum construit în ipoteza că $\eta \in \Gamma_{cb}(E)$, poate fi definit pentru o clasă semnificativ mai largă de secțiuni η care include spațiul $\Gamma^\infty(E)$.

Dacă $\sigma \in \Gamma^{\frac{p}{p-1}}(p_t^* E^*)$, atunci pentru orice $c \in \mathcal{C}_t$ putem scrie

$$\sigma(c) = \sum_{l=1}^r \{\sigma(c)\ \ [\eta^l(c(t))]\}\, \eta_l(c(t)) \in E_{c(t)}^* \ .$$

Definim atunci funcționala $\mathcal{F}_{t,v,\xi}^p : \Gamma^{\frac{p}{p-1}}(p_t^* E^*) \to \mathbb{C}$ prin

$$\mathcal{F}_{t,v,\xi}^p(\sigma) = \sum_{l=1}^r \int_{\mathcal{C}_t} \{[\sigma(c)]\,[\eta^l(c(t))]\}\, \overline{\{[\rho_{t,v^\flat,\eta^l}(c)]\,[\xi(c)]\}}\, \mathrm{d}w_t(c)$$

și vedem imediat că este liniară. Se arată că este și continuă, deci există o unică secțiune $\mathcal{P}_{t,v}^p(\xi) \in \Gamma^p(p_t^* E)$ astfel încât

$$\mathcal{F}_{t,v,\xi}^p(\sigma) = \int_{\mathcal{C}_t} [\sigma(c)]\,[\mathcal{P}_{t,v}^p(\xi)(c)]\, \mathrm{d}w_t(c)$$

pentru orice $\sigma \in \Gamma^{\frac{p}{p-1}}(p_t^* E^*)$, și

$$\|\mathcal{P}_{t,v}^p(\xi)\|_{\Gamma^p(p_t^* E)} \leq r\, \|v\|_{E_{x_0}}\, \|\xi\|_{\Gamma^p(\mathcal{E})} \ .$$

Continuitatea și conjugat-liniaritatea lui $\xi \mapsto \mathcal{P}_{t,v}^p(\xi)$ sunt evidente.

Corolarul 6.10. *Cu notațiile de mai sus,* $\langle \eta_{c(t)}, \mathcal{P}_{t,v}^p(\xi)(c) \rangle_{E_{c(t)}} = [\rho_{t,v^\flat,\eta}(c)]\,[\xi(c)]$ *pentru orice* $\eta \in \Gamma^\infty(E)$ *și aproape orice* $c \in \mathcal{C}_t$.

Liniaritatea dependenței lui $\mathcal{P}_{t,v}^p(\xi)$ de $v \in E_{x_0}$ ne permite să definim în mod evident o secțiune $\mathcal{P}_t^p(\xi) \in \Gamma^p(p_t^* E) \otimes E_{x_0}^*$ astfel încât $\mathcal{P}_t^p(\xi)(c)(v) = \mathcal{P}_{t,v}^p(\xi)(c)$ pentru orice $v \in E_{x_0}$ și $c \in \mathcal{C}_t$. În plus,

$$\|\mathcal{P}_t^p(\xi)(c)\|_{E_{c(t)} \otimes E_{x_0}^*} = \sup_{\|v\|_{E_{x_0}} = 1} \|\mathcal{P}_{t,v}^p(\xi)(c)\|_{E_{c(t)}} \leq r\, \|v\|_{E_{x_0}}\, \|\xi\|_{\Gamma^p(\mathcal{E})} = r\, \|\xi\|_{\Gamma^p(\mathcal{E})} \ .$$

Aplicația $\mathcal{P}_t^p$ închide în ea foarte multă informație despre geometria diferențială și analiza stocastică asociate fibratului E. Mai jos vom vedea doar două utilizări ale ei, suficiente sperăm pentru a convinge cititorul de importanța ei.

6.5 Prima aplicație: transportul paralel stocastic

Începem prin a defini obiectele $\mathcal{P}_{t,v,k}$ prin formula explicită

$$\mathcal{P}_{t,v,k}(c) = P\left(c(t), c\left(\frac{(2^k-1)t}{2^k}\right)\right) \ldots P\left(c\left(\frac{t}{2^k}\right), c(0)\right) v$$

unde $v \in E_{x_0}$ este arbitrar, $c \in \mathcal{C}_t$ și $k \in \mathbb{N}$. Observăm că $\mathcal{P}_{t,v,k}(c)$ aparține fibrei $E_{c(t)} = (p_t^* E)_c$. Cum P am arătat că este o aplicație măsurabilă, înseamnă că $\mathcal{P}_{t,v,k}$ este o secțiune măsurabilă în $p_t^* E$. Cum, în plus, $\|\mathcal{P}_{t,v,k}\|_{E_{c(t)}} \leq \|v\|_{E_{x_0}}$, deducem că $\mathcal{P}_{t,v,k} \in \Gamma^\infty(p_t^* E) \subseteq \Gamma^2(p_t^* E)$.

Să definim secțiunea $\mathrm{Id} : \mathcal{C}_t \to \mathcal{E}$ prin $\mathrm{Id}(c) = \otimes_{s \in D_t} \mathrm{Id}_{E_{c(s)}} \in \mathcal{E}_c$; mai precis, $\mathrm{Id}(c)$ este clasa de echivalență (în sensul construcției limitei inductive ca spațiu de clase de echivalență), de exemplu, a elementului $\mathrm{Id}_{E_{x_0}}$, iar aplicația $\mathcal{C}_t \ni c \mapsto \mathrm{Id}_{E_{x_0}} \in \mathcal{E}_c$ este evident continuă. Mai mult, este evident că $\|\mathrm{Id}(c)\|_{\mathcal{E}_c} = \|\mathrm{Id}(E_{x_0})\|_{\mathrm{End}\, E_{x_0}} = 1$, deci $\mathrm{Id} \in \Gamma^\infty(p_t^* E) \subseteq \Gamma^2(p_t^* E)$. Observăm atunci că

$$[P_{t,v^\flat,\eta,k}(c)]\,[\mathrm{Id}(c)] = [P_{t,v^\flat,\eta,k}(c)]\,[\mathrm{Id}_{E_{c(0)}} \otimes \ldots \otimes \mathrm{Id}_{E_{c(t)}}] = \langle \eta(c(t)),\, \mathcal{P}_{t,v,k}(c) \rangle_{E_{c(t)}} \ .$$

Teorema 6.11. *$\mathcal{P}_{t,v,k} \to \mathcal{P}^2_{t,v}(\mathrm{Id})$ în $\Gamma^2(p_t^* E)$ pentru orice $v \in E_{x_0}$, uniform în raport cu $t \in (0,T]$ pentru orice $T > 0$.*

Comparând acest rezultat cu cel obținut prin metode probabiliste ([Itô63], [Itô75a], [Itô75b]), conchidem că $\mathcal{P}^2_{t,v}(\mathrm{Id})$ este transportul paralel stocastic în E al vectorului $v \in E_{x_0}$. În particular, $\mathcal{P}^2_{t,v}(\mathrm{Id})$ nu depinde de alegerile făcute în construcția sa (deschișii de trivializare, reperele locale ortonormate deasupra acestora, etc.), fiind limita unui șir de secțiuni care nu depind de aceste alegeri.

6.6 A doua aplicație: formula Feynman-Kac în fibrați vectoriali

În continuare vom prezenta o extindere a formulei Feynman-Kac în fibrați hermitici, una din motivații fiind dorința de a convinge cititorul că formalismul construit în acest capitol permite obținerea prin aceste metode noi a tuturor rezultatelor deja cunoscute legate de transportul paralel stocastic, uneori chiar în ipoteze mai bune decât cele acceptate în prezent. Vom lucra cu un "potențial" $V \in \Gamma^1_{loc}(\mathrm{End}\, E)$ cu proprietatea $\operatorname{ess\,inf}_{x \in M} \min \operatorname{spec} V(x) = \beta > -\infty$ (pe scurt: $V \geq \beta$), și cu $V(x)$ auto-adjunct pentru aproape orice $x \in M$. Forma pătratică $\Gamma_0(E) \ni \eta \mapsto \int_M \langle V(x)\eta_x, \eta_x \rangle_{E_x} \,\mathrm{d}x \in \mathbb{R}$ va da naștere unui operator auto-adjunct dens definit în $\Gamma^2(E)$, pe care vom continua să îl notăm V, pentru simplitate. Într-adevăr, forma pătratică este bine-definită deoarece

$$\left| \int_M \langle V(x)\eta_x, \eta_x \rangle_{E_x} \,\mathrm{d}x \right| \leq \sup_{x \in M} \|\eta_x\|^2 \int_{\operatorname{supp} \eta} \|V(x)\|_{op} \,\mathrm{d}x < \infty \ .$$

Ea este de asemenea mărginită inferior de β deoarece, dacă $\{e_{1,x}, \dots, e_{r,x}\}$ este o bază ortonormată în E_x compusă din vectori proprii ai lui $V(x)$ cu valorile proprii corespunzătoare $\lambda_{1,x} \leq \dots \leq \lambda_{r,x} \subset [\beta, \infty)$ pentru aproape orice $x \in M$, și dacă $\eta_x = \sum_{i=1}^r \alpha_{i,x}\, e_{i,x}$, avem că

$$\langle V(x)\eta_x, \eta_x \rangle_{E_x} = \left\langle \sum_{i=1}^r \alpha_{i,x}\lambda_{i,x} e_{i,x}, \sum_{j=1}^r \alpha_{j,x} e_{j,x} \right\rangle_{E_x} =$$
$$= \sum_{i=1}^r \lambda_{i,x} |\alpha_{i,x}|^2 \geq \sum_{i=1}^r \lambda_{1,x} |\alpha_{i,x}|^2 = \lambda_{1,x} \|\eta\|^2_{E_x} \geq \beta \|\eta\|^2_{E_x} \ .$$

În același fel (folosind forme pătratice) se poate construi și operatorul auto-adjunct, dens definit, corespunzând sumei dintre $\nabla^*\nabla$ și V; îl vom nota $H_{\nabla,V}$. Desigur, această construcție poate fi efectuată nu numai pe M, ci și pe orice domeniu deschis relativ compact cu frontieră netedă.

În momentul când punctul din care pornesc curbele nu mai este $x_0 \in M$ fixat, ca până acum, ci $x \in M$ variabil, toate obiectele care depind de el îl vor căpăta ca indice inferior suplimentar, adică spațiul curbelor continue ce pleacă din x va fi $\mathcal{C}_{t,x}$, pe care vom avea măsura Wiener $w_{t,x}$ (exact notațiile utilizate în teorema 4.16), și toate obiectele construite în acest text vor căpăta în mod corespunzător un indice x suplimentar, adică vom avea secțiunile $\rho_{t,\omega,\eta,x}$, $\mathcal{P}_{t,v,x}$ și $\mathcal{P}_{t,x}$ etc.

Pentru fiecare $k \in \mathbb{N}$ să notăm cu $\mathrm{V}_{t,x,k} \in \Gamma^\infty(\mathcal{E})$ secțiunea dată de

$$\mathrm{V}_{t,x,k}(c) = \mathrm{e}^{-\frac{t}{2^k} V\left(c\left(\frac{t}{2^k}\right)\right)} \otimes \dots \otimes \mathrm{e}^{-\frac{t}{2^k} V(c(t))} \ .$$

Cum $V \geq \beta$ și $t \geq 0$, este imediat că $\|\mathrm{V}_{t,x,k}(c)\|_{\mathcal{E}_c} \leq \mathrm{e}^{-t\beta}$ pentru aproape orice $c \in \mathcal{C}_{t,x}$, deci cu teorema Banach-Alaoglu conchidem că există un subșir $(k_l)_{l \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{N}$ astfel încât subșirul $(\mathrm{V}_{t,x,k_l})_{l \in \mathbb{N}}$ are limita slabă $\mathrm{V}_{t,x} \in \Gamma^2(\mathcal{E})$. Conchidem, în particular, că secțiunea $\mathcal{P}^2_{t,x}(\mathrm{V}_{t,x})$ există în $\Gamma^2(p_t^* E) \otimes E_x^*$.

Teorema 6.12 (Formula Feynman-Kac). *Dacă $\eta \in \Gamma^2(E)$ atunci*

$$(\mathrm{e}^{-tH_{\nabla,V}} \eta)(x) = \int_{\mathcal{C}_{t,x}} [\mathcal{P}^2_{t,x}(\mathrm{V}_{t,x})(c)]^* \, \eta_{c(t)} \,\mathrm{d}w_{t,x}(c)$$

pentru orice $t > 0$ și aproape orice $x \in M$.

Observăm că dacă definim aplicația $\mathcal{V}_{t,x} : \mathcal{C}_{t,x} \to \mathrm{End}\, E_x$ prin

$$\mathcal{V}_{t,x}(c) = [\mathcal{P}^2_{t,x}(\mathrm{V}_{t,x})(c)]^* \, [\mathcal{P}^2_{t,x}(\mathrm{Id})(c)]$$

formula Feynman-Kac se poate rescrie, în mod banal, în forma echivalentă

$$(\mathrm{e}^{-tH_{\nabla,V}} \eta)(x) = \int_{\mathcal{C}_{t,x}} [\mathcal{V}_{t,x}(c)] \, [\mathcal{P}^2_{t,x}(\mathrm{Id})(c)]^{-1} \, \eta_{c(t)} \,\mathrm{d}w_{t,x}(c) \ ;$$

astfel rescrisă, formula Feynman-Kac în fibrați a fost obținută și de alți autori, dar în alte contexte și ipoteze:

- în [BP08] se folosesc tehnici de analiză funcțională (bazate tot pe teorema lui Chernoff) dar potențialul este presupus neted iar M este compactă fără bord;

- în [DT01] se folosesc tehnici probabiliste pentru a da în propoziția 4.5 condiții foarte abstracte în care formula Feynman-Kac este validă, după care în propoziția 5.1 se arată că aceste ipoteze sunt satisfăcute când M este compactă fără bord, iar potențialul (notat acolo $\mathcal{R}$) este presupus neted (p.48);

- în [Güneysu10] formula Feynman-Kac este demonstrată folosind tehnici de analiză funcțională, dar acceptând existența transportului paralel stocastic, în ipoteza că varietatea este completă atât metric cât și stocastic, și în ipoteze foarte generoase asupra potențialului (în teorema 3.1 este presupus esențial mărginit, iar în teorema 3.3 rezultatul este extins la situația, mai generală, când potențialul este local de pătrat integrabil); în remarca 1.4 autorul schițează cum ar trebui modificată demonstrația dacă s-ar renunța la ipoteza completitudinii metrice, dar fără a detalia;

- în [BG20] (încă nepublicat, existent doar ca preprint la momentul redactării acestui text) potențialul V, care poate fi înțeles ca un operator diferențial de ordinul 0, este presupus a fi acum un operator diferențial de ordinul 0 sau 1 acționând pe secțiunile netede în E (deci în particular V are coeficienții netezi), astfel încât operatorul $\nabla^* \nabla + V$ să fie sectorial; acest potențial dă naștere în mod natural unei ecuații diferențiale stocastice a cărei unică soluție este presupusă a fi local de pătrat integrabil într-un mod uniform în raport cu $x \in M$ (în notațiile noastre); această ipoteză garantează că egalitatea din formula Feynman-Kac va fi valabilă peste tot, nu doar aproape peste tot. Nu se impun restricții asupra lui M.

BIBLIOGRAFIE

[Baudoin] F. Baudoin, note de curs: `fabricebaudoin.wordpress.com/2013/09/18/lecture-17-the-parabolic-harnack-inequality`

[Bauer96] H. Bauer, *"Probability Theory"*, Walter de Gruyter, 1996

[BG20] S. Boldt, B. Güneysu, *"Feynman-Kac formula for perturbations of order* ≤ 1 *and noncommutative geometry"*, preprint arXiv:2012.15551v1 (va apărea în "Stochastics and Partial Differential Equations: Analysis and Computations")

[BGM71] M. Berger, P. Gauduchon, E. Mazet, *"Le spectre d'une variété Riemannienne"*, Springer Verlag, 1971

[BGV92] N. Berline, E. Getzler, M. Vergne, *"Heat Kernels and Dirac Operators"*, Springer-Verlag, 1992

[BP08] C. Bär, F. Pfäffle, *"Path integrals on manifolds by finite dimensional approximation"*, J. Reine Angew. Math, vol. 2008, no. 625, 2008, pp. 29-57

[BP11] C. Bär, F. Pfäffle, *"Wiener Measures on Riemannian Manifolds and the Feynman-Kac Formula"*, Mat. Contemp., vol. 40, pp. 37-90, Sociedade Brasileira de Matemática, 2011

[Brezis11] H. Brezis, *"Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations"*, Springer, 2011

[Chavel84] I. Chavel, *"Eigenvalues in Riemannian Geometry"*, Academic Press, 1984

[Chavel06] I. Chavel, *"Riemannian Geometry - A modern Introduction"*, ed. a 2-a, Cambridge University Press, 2006

[Darling84] R.W.R. Darling, *"Approximating Itô Integrals of Differential Forms and Geodesic Deviation"*, Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete, vol. 65, 1984, p.563–572

[Davies80] E.B. Davies, *"One-Parameter Semigroups"*, Academic Press, 1980

[DM78] C. Dellacherie, P.-A. Meyer, *"Probabilities and Potential"*, Hermann, Paris, 1978

[Dodziuk83] J. Dodziuk, *"Maximum Principle for Parabolic Inequalities and the Heat Flow on Open Manifolds"*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 32, Nr. 5, septembrie – octombrie 1983, pp. 703-716

[Donnely79] H. Donnely, *"Asymptotic expansions for the compact quotients of proper discontinuous group actions"*, Illinois J. Math., Volume 23, Issue 3 (1979), 485-496.

[DT01] B. Driver, A. Thalmaier, *"Heat Equation Derivative Formulas for Vector Bundles"*, Journal of Functional Analysis, vol. 183, Nr. 1, 20 iunie 2001, pp. 42-108

[Duff56] G.F.D. Duff, *"Partial Differential Equations"*, Oxford University Press, 1956

[Elworthy82] K.D. Elworthy, *"Stochastic Differential Equations on Manifolds"*, Cambridge University Press, 1982

[Émery89] M. Émery, *"Stochastic Calculus in Manifolds"*, Springer Verlag, 1989

[Émery90] M. Émery, *"On two transfer principles in stochastic differential geometry"*, Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome 24 (1990), p. 407-441

[Grigor'yan09] A. Grigor'yan, *"Heat Kernel and Analysis on Manifolds"*, American Mathematical Society, 2009

[Güneysu10] B. Güneysu, *"The Feynman-Kac formula for Schrödinger operators on vector bundles over complete manifolds"*, J. Geom. Phys 60 (2010), p. 1997, 2010

[Güneysu14] B. Güneysu, *"Kato's inequality and form boundedness of Kato potentials on arbitrary Riemannian manifolds"*, Proceedings of the American Mathematical Society, vol. 142, nr. 4, aprilie 2014, pp. 1289-1300

[Güneysu17] , B. Güneysu, *"Covariant Schrödinger Semigroups on Riemannian Manifolds"*, Birkhäuser, 2017

[IW89] N. Ikeda, S. Watanabe, *"Stochastic Differential Equations and Diffusion Processes"*, North-Holland Publishing Company, Second Edition, 1989

[Itô63] K. Itô, *"The Brownian motion and tensor fields on Riemannian manifold"*, Proc. Intern. Congr. Math., Stockholm, 536-539, 1963.

[Itô75a] K. Itô, *"Stochastic Calculus"*, "International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics" (Lecture Notes in Physics 39), pp. 218-223, Springer-Verlag, 1975

[Itô75b] K. Itô, *"Stochastic parallel displacement"*, "Probabilistic Methods in Differential Equations" (Lecture Notes in Mathematics 451), pp. 1-7, Springer-Verlag, 1975

[JP04] R. Jarrow, P. Protter, *"A short history of stochastic integration and mathematical finance: The early years, 1880-1970"*, "A Festschrift for Herman Rubin", Institute of Mathematical Statistics Lecture Notes - Monograph Series, vol. 45, p.75, 2004

[Kato74] T. Kato, *"On the Trotter-Lie Product Formula"*, Proc. Japan Acad., 50, pp. 694-698, 1974

[Kato95] T. Kato, *"Perturbation Theory for Linear Operators"*, Springer Verlag, 1995

[Meyer82] P.-A. Meyer, *"Géométrie différentielle stochastique, II"*, Séminaire de probabilités (Strasbourg), tome S16 (1982), p. 165-207

[Michael61] E. Michael, *"On a Theorem of Rudin and Klee"*, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 12, 1961

[Mizohata57] S. Mizohata, *"Hypoellipticité des équations paraboliques"*, Bulletin de la Société Mathématique de France, vol.85, pp.15-50, 1957

[MR05] M. Melgaard, G. Rozenblum, *"Schrödinger Operators with Singular Potentials"*, "Handbook of Differential Equations", cap. 6, vol. II, Elsevier, 2005

[Neveu65] J. Neveu, *"Mathematical Foundations of the Calculus of Probability"*, Holden-Day, 1965

[Norris92] J. Norris, *"A complete differential formalism for stochastic calculus in manifolds"*, Séminaire de probabilités (Strasbourg), vol. 26 (1992), p.189

[Ouhabaz96] E.-M. Ouhabaz, *"Invariance of Closed Convex Sets and Domination Criteria for Semigroups"*, Potential Analysis, 5, pp. 611-625, 1996

[Øksendal13] B. Øksendal, *"Stochastic Differential Equations"*, Springer, 2013

[Parthasarathy67] K.R. Parthasarathy, *"Probability Measures on Metric Spaces"*, Academic Press, 1967

[RaySi71] D.B. Ray, I.M. Singer, *"R-Torsion and the Laplacian on Riemannian Manifolds"*, Advances in Mathematics, 7, pp. 145-210, 1971

[RiSz90] F. Riesz, B. Szőkefalvi-Nagy, *"Functional Anaysis"*, Dover Publications, 1990

[Rosenberg97] S. Rosenberg, *"The Laplacian on a Riemannian Manifold"*, Cambridge University Press, 1997

[RS80] M. Reed, B. Simon, *"Methods of Modern Mathematical Physics"*, volume I ("Functional Analysis"), Academic Press, 1980

[Schwartz73] L. Schwartz, *"Radon Measures on Arbitrary Topological Spaces and Cylindrical Measures"*, Oxford University Press, 1973

[Simon77] B. Simon, *"An Abstract Kato's Inequality for Generators of Positivity Preserving Semigroups"*, Indiana University Mathematics Journal, Vol. 26, No. 6 (November–December, 1977), pp. 1067-1073

[Simon78] B. Simon, *"A Canonical Decomposition for Quadratic Forms with Applications to Monotone Convergence Theorems"*, Journal of Functional Analysis, vol. 28, 1978

[Simon79a] B. Simon, *"Kato's Inequality and the Comparison of Semigroups"*, Journal of Functional Analysis, 32, pp. 97-101, 1979

[Simon79b] B. Simon, *"Functional Integration and Quantum Physics"*, Academic Press, 1979

[Shigekawa97] I. Shigekawa, *"L^p Contraction Semigroups for Vector Valued Functions"*, Journal of Functional Analysis, 147, pp. 69-108, 1997

[Tao11] T. Tao, *"An Introduction to Measure Theory"*, American Mathematical Society, 2011