FMI, CS, Master I
Winter Term 2014/2015
Techniques of Combinatorial Optimization
Laurenţiu Leuştean

12.12.2014

Tema 3

(H3.1) Fie poliedrul $P = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_1 + x_2 \leq 1\}$. Scrieţi feţele, faţetele, feţele minimale şi vârfurile lui P.

Proof. P este soluţia următorului sistem de inegalităţi: $-x_1 \leq 0, -x_2 \leq 0, x_1 + x_2 \leq 1$, i.e.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Conform Teoremei 1.7.5, avem că orice faţă nevidă a lui P este de forma

$$F = \{x \in P \mid A_I x = b_I\}, \text{ unde } I \subseteq \{1, 2, 3\}.$$

Prin urmare, feţele lui P sunt $F_0 = P$ şi

$$\begin{aligned}
I = \{1\} &\Rightarrow F_1 = \{x \in P \mid -x_1 = 0\} = \{(0, x_2)^T \mid 0 \leq x_2 \leq 1\} \\
I = \{2\} &\Rightarrow F_2 = \{x \in P \mid -x_2 = 0\} = \{(x_1, 0)^T \mid 0 \leq x_1 \leq 1\} \\
I = \{3\} &\Rightarrow F_3 = \{x \in P \mid x_1 + x_2 = 1\} = \{(x_1, 1 - x_1)^T \mid 0 \leq x_1 \leq 1\} \\
I = \{1, 2\} &\Rightarrow F_{1,2} = \{x \in P \mid -x_1 = 0, -x_2 = 0\} = \{(0, 0)^T\} \\
I = \{1, 3\} &\Rightarrow F_{1,3} = \{x \in P \mid -x_1 = 0, x_1 + x_2 = 1\} = \{(0, 1)^T\} \\
I = \{2, 3\} &\Rightarrow F_{2,3} = \{x \in P \mid -x_2 = 0, x_1 + x_2 = 1\} = \{(1, 0)^T\} \\
I = \{1, 2, 3\} &\Rightarrow F_{1,2,3} = \{x \in P \mid -x_1 = 0, -x_2 = 0, x_1 + x_2 = 0\} = \emptyset.
\end{aligned}$$

Rezultă că faţetele lui P sunt F_1, F_2, F_3, feţele minimale ale lui P sunt $F_{1,2}, F_{1,3}, F_{2,3}$ şi vârfurile sunt $(0, 0)^T, (0, 1)^T, (1, 0)^T$. □

(H3.2) Demonstraţi următoarele:

(i) Orice faţă proprie a lui P este conţinută într-o faţetă a lui P.

(ii) Orice faţă proprie a lui P este intersecţie de faţete ale lui P.

Proof. Fie F o faţă proprie a lui P. Atunci, conform Lemei 1.8.3.(iii), există $\emptyset \neq I \subseteq I^+$ astfel încât $F = \{x \in P \mid A_I x = b_I\}$. Deoarece $I^+ \neq \emptyset$, putem presupune fără a restrânge generalitatea că sistemul $A^+x \leq b^+$ este minimal, deci nu are inegalităţi redundante.

(i) Pentru orice $i \in I$, $F_{\{i\}} := \{x \in P \mid \mathbf{a}_i x = b_i\}$ este faţetă a lui P, conform Teoremei 1.8.5. Este evident că $F \subseteq F_{\{i\}}$.

(ii) Este evident faptul că $F = \bigcap_{i\in I} F_{\{i\}}$, deci F este intersecţie de faţete.

□

(H3.3) Demonstraţi că orice politop este mărginit.

Proof. Fie $P = \text{conv}(x^1, \ldots, x^k)$ şi $M := \max\{\|x^1\|, \ldots, \|x^k\|\}$. Fie $x \in P$ un punct arbitrar al poliedrului. Atunci $x = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i x^i$, unde $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \geq 0$ pentru orice $i = 1, \ldots, m$ şi $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$.

$$\|x\| \quad = \quad \left\| \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x^i \right\| \leq \sum_{i=1}^{m} \|\lambda_i x^i\| = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \|x^i\| \leq \sum_{i=1}^{k} \lambda_i M = M.$$

Astfel, $\|x\| \leq M$ pentru orice $x \in P$, deci P este mărginit. □

(H3.4) Fie $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, unde $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ şi $b \in \mathbb{R}^m$. Demonstraţi că dacă $\text{rang}(A) < n$, atunci P nu are vârfuri.

Proof. Observăm mai întâi că $\text{rang}(A) \leq \min\{m, n\} \leq n$. Presupunem că P are un vârf v. Atunci, conform Observaţiei 1.5.3, există $J \subseteq \{1, \ldots, m\}$ astfel încât $\text{rank}(A_J) = n$ şi $\{v\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A_J x = b_J\}$. Deoarece A_J este o submatrice a lui A, rezultă că trebuie să avem $\text{rang}(A) = n$. □

(H3.5) Demonstraţi că orice poliedru nevid are un punct interior (”inner point”).

Proof. Dacă $I^+ = \emptyset$, rezultatul este evident. Presupunem că $I^+ \neq \emptyset$. Atunci, conform definiţiei, pentru orice $i \in I^+$ există un $x^i \in P$ astfel încât $\mathbf{a}_i x^i < b_i$. Definim

$$x^0 = \frac{1}{|I^+|} \sum_{i \in I^+} x^i = \sum_{i \in I^+} \frac{1}{|I^+|} x^i.$$

Deoarece x^0 este combinaţie convexă de puncte $x^i \in P, i \in I^+$ şi P este convex, rezultă că $x^0 \in P$ şi, prin urmare, $A^= x^0 = b^=$. Pentru orice $j \in I^+$, avem

$$\mathbf{a}_j x^0 = \frac{1}{|I^+|} \sum_{i \in I^+} \mathbf{a}_j x^i = \frac{1}{|I^+|} \left(\sum_{i \in I^+, i \neq j} \mathbf{a}_j x^i + \mathbf{a}_j x^j \right) < b_j,$$

deoarece $\mathbf{a}_j x^j < b_j$ şi $\mathbf{a}_j x^i \leq b_j$ pentru $i \in I^+, i \neq j$. Deci, x^0 este punct interior al lui P. $\square$