Spaţiile neolonome ale lui Vrănceanu din punctul de vedere al geometriei distanţei

Marius Buliga

Institute of Mathematics, Romanian Academy
P.O. BOX 1-764, RO 014700
Bucureşti, Romania
Marius.Buliga@imar.ro

25.07.2007

Această aniversare a descoperirii spaţiilor neolonome de către Gheorghe Vrănceanu [12] (1926), [13] (1928), este o bună ocazie pentru a descrie unele apariţii surprinzătoare, dar naturale, ale acestor spaţii în patru domenii matematice: operatori diferenţiali hipoeliptici, geometria sub-riemanniană, teoria grupurilor Carnot şi teoria geometrică a grupurilor discrete. Cum de apar spaţiile neolonome în astfel de domenii variate? Cheia necesară pentru a întelege este dată de geometria distanţei.

Vrănceanu are contribuţii importante in mai multe domenii ale matematicii, nu doar teoria spaţiilor neolonome. De exemplu, în lucrarea [14] (1950), urmată de o serie de alte articole, s-a ocupat de grupuri Lie de rang zero, numite şi grupuri filiforme, o clasă particulară de grupuri Carnot. In [15], [16] (1962-1963) şi alte lucrări a studiat scufundări ale unui grup discret în grupuri lineare. Pot doar sa presupun că intuiţia sa puternică l-a ghidat spre domenii care după un timp s-au dovedit a fi legate cu spaţiile neolonome.

Gh. Vrănceanu a fost condus către descoperirea spaţiilor neolonome de anume preocupări, din fizica teoretică si din geometria diferenţială, care erau de mare actualitate în epocă. Spaţiile neolonome in mecanica clasică apar în cinematica sistemelor dinamice cu legături liniare. O sursă iniţial mai mai puţin menţionată, dar în prezent reconsiderată, se găseşte în lucrările privind termodinamica ale lui Gibbs şi Carathéodory. Un spaţiu neolonom poate fi înzestrat cu o distanţă numită distanţă Carnot-Carathéodory, în acelaşi fel in care o varietate diferenţială poate fi dotată cu o distanţă riemanniana. Astfel, în geometria spaţiilor metrice spaţiile neolonome sunt cunoscute drept spaţii Carnot-Carathéodory. Această din urmă terminologie s-a impus în subiectele matematice pe care le voi evoca mai jos.

Geometria sub-riemanniană studiază spaţiile neolonome dotate cu distanţe Carnot-Carathéodory. Pentru a întelege uşor natura acestor distanţe, să ne închipuim că suntem în cabina unui camion cu remorcă. Dorim sa parcăm camionul şi remorca sa paralel cu trotuarul. Este evident că deşi distanţa pâna la trotuar este, să zicem, de 2 metri, avem nevoie să parcurgem o distanţă mult mai mare pentru a parca, datorită diverselor manevre necesare. Distanţa aceasta este o distanţă Carnot-Carathéodory. Intr-adevăr, sistemul mecanic format din camion şi remorca sa este descris de un spaţiu neolonom, în care se ţine cont de diversele legături (sau constrângeri) la care e supus sistemul. Ideal, un bun şofer va parca urmând o geodezică (drum de lungime minimă) în acest spaţiu neolonom, iar distanţa necesara pentru a parca reprezintă lungimea acestei geodezice. Imaginaţia matematicianului vede aici un spaţiu neolonom ale cărui puncte reprezintă configuraţii (poziţii) posibile ale camionului-remorcă, şi în care distanţele se măsoară de-a lungul geodezicelor. Cum arată aceste spaţii ascunse ochiului? In anii '20, după contribuţiile lui Cartan, Levi-Civita şi Weyl la teoria conexiunilor, Vrănceanu dă o descriere a acestor spaţii în termeni de geometrie diferenţială.

Mult mai târziu, în 1967, Hörmander [7] face o contribuţie fundamentală in domeniul ecuaţiilor cu derivate parţiale, în care studiază operatorii hipoeliptici (aceştia sunt pentru un spaţiu neolonom ceea ce un operator eliptic, de exemplu operatorul laplacian, este pentru un spaţiu riemannian). Această contribuţie a lui Hörmander este o dezvoltare a muncii pentru care primeşte medalia Fields în 1962.

In 1981 M. Gromov [5] demonstrează o teoremă reciprocă a alternativei lui Tits. Să considerăm un grup (discret) G generat de un număr finit de elemente. Dacă acest grup poate fi scufundat într-un grup de transformări liniare ale unui spaţiu vectorial finit dimensional, atunci creşterea sa este polinomială sau exponenţială (aceasta este alternativa lui Tits). Creşterea unui grup discret este o estimare a funcţiei care asociază unui număr natural n (suficient de mare) numărul de elemente ale grupului ce pot fi obţinute ca produse de cel mult n generatori. Deşi functia creştere depinde de alegerea generatorilor grupului, comportamentul său atunci când n tinde la infinit este independent de alegerea generatorilor. Alternativa lui Tits ne spune că pentru subgrupuri discrete (şi finit generate) ale grupurilor liniare numărul de elemente ale grupului ce pot fi scrise ca produse de cel mult n generatori se comportă (pentru n mare) ca un polinom în n sau ca o exponenţială în n. In particular, dacă grupul discret G este virtual nilpotent atunci creşterea sa este polinomială. Gromov demonstrează ca daca grupul G are o creştere polinomială atunci el este virtual nilpotent (adică modulo un grup finit el poate fi scufundat într-un grup de matrici superior triunghiulare).

Pentru a demonstra aceasta teoremă remarcabilă Gromov face apel la spaţiile neolonome! Să ataşăm grupului G o distanţă: două elemente diferite x, y din G sunt la distanţa m (număr natural nenul) dacă putem scrie $y = ux$ cu u element al lui G care poate fi scris numai ca un produs de cel puţin m generatori ai lui G. Grupul G devine astfel un spaţiu metric, cu distanţa notată cu d. Gromov arată că putem privi de departe acest spaţiu metric, în felul următor: să notăm cu $B(n)$ multimea elementelor lui G care pot fi exprimate ca produs de cel mult n generatori. Pentru orice număr natural nenul n avem spaţiul metric $B(n)$ cu distanţa d/n. Acest spaţiu metric este de diametru cel mult 2 (pentru că am împărţit distanţa d la n). Pentru n din ce în ce mai mare $B(n)$ are din ce în ce mai multe elemente, iar elementele sale sunt din ce în ce mai apropiate. Obţinem astfel un şir de spaţii metrice care tinde (în sensul introdus de Gromov) spre un spaţiu metric care nu mai e discret, ci continuu, mai precis este un spaţiu neolonom de un tip special, numit grup Carnot (din nou o referire la terminologia împrumutată in termodinamică). Aceasta se întâmpla în ipoteza creşterii polinomiale a lui G. Gromov arată ca acest spaţiu asimptotic este un spaţiu Carnot-Carathéodory asociat unui grup nilpotent graduat, de unde deduce că G este virtual nilpotent.

Grupurile Carnot, numite şi grupuri omogene, vezi Folland, Stein [4], sunt obiecte de interes in domenii ale analizei matematice si ale ecuaţiilor cu derivate parţiale, legate de operatorii diferenţiali hipoeliptici ai lui Hörmander. O clasă interesantă a lor este formată de grupurile filiforme, introduse şi studiate de Vrănceanu în [14].

Aceste grupuri apar din nou în studiul spaţiilor neolonome o dată cu lucrarea lui Mitchell [10] din 1985. Acesta demonstrează ca spaţiul tangent (în sens metric) la un spaţiu neolonom (regulat) este un grup Carnot, folosind un raţionament asemănător cu cel precedent. In loc să mergem spre infinitul mare, vom merge spre infinitezimal. Să privim vecinătatea unui punct x dintr-un spaţiu neolonom M din ce în ce mai de aproape. Pentru fiecare număr natural nenul n vom considera spatiul metric $B(n)$ al punctelor y aflate la distantă cel mult $1/n$ de punctul x, cu distanţa nd. Pentru fiecare n spaţiul metric $B(n)$ are diametrul cel mult 2, pentru că am înmulţit distanţa Carnot-Carathéodory iniţială d cu n. Pentru n din ce în ce mai mare, mulţimea $B(n)$ este din ce în ce mai mică, iar distanţele dintre punctele din ce în ce mai apropiate de x devin din ce în ce mai mari, tinzând spre o distanţă finită. La limită obţinem spaţiul tangent în punctul x la varietatea neolonomă M. Mitchell demonstrează ca acesta este un grup Carnot (adică la rândul său un spaţiu neolonom).

Geometria metrică a spaţiilor neolonome este studiată în continuare de Belläiche [1] şi Gromov [6] (1996). Aceştia furnizează o descriere a spaţiilor neolonome intrinsecă din punctul de vedere al geometriei distanţei. Intr-un astfel de spaţiu noţiunile intrinseci de: infinitezimal, derivare, fibrat tangent, sunt altele decât cele uzuale pentru o varietate diferenţială. Intrăm aici într-un domeniu fierbinte al matematicii actuale, cel al analizei matematice pe spaţii metrice generale. Spaţiile neolonome furnizează o clasă foarte interesantă de exemple pe care teoria generală este aplicată şi noi idei sunt testate. Domeniul este în dezvoltare, după cum arată contribuţii recente ale unor mari matematicieni: Cheeger [3] (1999), Margulis, Mostow [8] (1995) (şi răspunsul [9] la o critică a lui Deligne).

O parte a interesului pentru spaţiile neolonome privite din punctul de vedere al geometriei distanţei vine ca urmare a articolului lui Pansu [11] (1989), în care acesta dă o nouă demonstraţie a teoremei de super-rigiditate a lui Margulis (medalie Fields în 1978), privind scufundarea grupurilor discrete în anume grupuri continue (grupuri Lie). O scufundare quasi-izometrică unui grup discret într-un alt spaţiu metric (de exemplu un grup continuu cu o distanţă invariantă la stânga) este o scufundare fără a modifica distanţa pe grupul discret prea mult: să notăm cu d distanţa pe grupul discret în raport cu un sistem de generatori, cu d' distanţa pe spaţiul metric ţintă şi cu f funcţia care face scufundarea. Funcţia f este o quasi-izometrie daca exista constante

A, B pozitive astfel încât pentru orice x, y din grupul discret avem

$$| A\, d'(f(x), f(y)) - d(x, y) | \leq B$$

Există întotdeuna o astfel de scufundare? Cum numărul B poate fi arbitrar de mare, este vorba de o proprietate metrică la scară mare. Margulis demonstrează pe o cale foarte lungă faptul că doar în cazuri foarte particulare o astfel de scufundare există, de unde numele de super-rigiditate: chiar dacă avem voie să deformăm arbitrar de mult (dar în limitele impuse de existenţa constantelor A, B) grupul discret ca să îl scufundăm in grupul continuu, asta este posibil doar dacă cele două grupuri sunt apropiate în anume sens.

Pansu demonstrează că dacă privim de foarte departe scufundarea f, în stilul lui Gromov, aceasta devine o aplicaţie Lipschitz (aproape ca şi cum $B = 0$) între un grup Carnot (spaţiu neolonom) şi un spaţiu riemannian. Apoi demonstrează că o teoremă clasică de analiză (teorema lui Rademacher: orice aplicaţie Lipschitz este derivabilă aproape peste tot) este adevarată pentru situaţia dată, într-un sens generalizat, folosind o noţiune de derivare intrinsecă spaţiilor neolonome. In concluzie există măcar un punct (din spaţiul metric asimptotic la grupul discret) în care scufundarea este derivabilă şi derivata sa este o aplicaţie liniară (morfism de grupuri). Existenţa acestor aplicaţii liniare este o problemă algebrică uşor de tranşat, ceea ce ne conduce la rezultatul de rigiditate al lui Margulis!

De aici, unde să mergem mai departe în studiul spaţiilor neolonome? Domeniul este vast, posibilităţile de extindere sunt mari. Imi permit în continuare să sugerez o direcţie personală. Spaţiile neolonome ale lui Vrănceanu sunt prezente, după cum s-a văzut, în multe subiecte matematice legate de proprietăţile infinitezimale şi asimptotice (la infinit) ale spaţiilor metrice. Aici geometria şi analiza matematică se întâlnesc. Spaţiile neolonome ne obişnuiesc cu noi noţiuni de infinitezimal şi ne îndeamnă să reconsiderăm rezultate matematice clasice dintr-o nouă perspectivă. Vrănceanu a introdus spaţiile neolonome ca o construcţie din domeniul geometriei, subdomeniul geometriei diferenţiale, adică folosind concepte clasice de analiză matematică drept fundament. Ori, rezultate recente ne arată că aceste spaţii sunt, din punctul de vedere intrinsec al geometriei distanţei, altfel decât orice am văzut pâna acum. In loc de spaţii vectoriale găsim grupuri Carnot (un fel de spaţii vectoriale necomutative), iar în loc de varietăti diferenţiabile găsim spaţii neolonome. Poate că este momentul să descoperim spaţiile neolonome ca exemple de spaţii pe care traieşte o altă analiză matematică decât cea uzuală (cum e sugerat în [2]). Astfel, dacă facem o paralelă cu apariţia spaţiilor ne-euclidiene acum mai mult de un secol, poate vom putea afirma cândva că primele exemple de spaţii cu analiză ne-euclidiană (adică la orice scară altfel decât un spaţiu euclidian) aparţin geometrului român Gheorghe Vrănceanu.

References

[1] A. Bellaïche, The tangent space in sub-Riemannian geometry, in: Sub-Riemannian Geometry, A. Bellaïche, J.-J. Risler eds., *Progress in Mathematics*, **144**,

Birkhäuser, (1996), 4–78

[2] M. Buliga, Dilatation structures I. Fundamentals, *J. of Generalized Lie Theory and Appl.*, **1**, 2 (2007), 65–95

[3] J. Cheeger, Differentiability of Lipschitz functions on metric measure spaces, *Geom. Funct. Anal.*,**9** (1999), no. 3, 428–517

[4] G.B. Folland, E.M. Stein, Hardy spaces on homogeneous groups, Mathematical Notes, **28**, Princeton University Press, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1982

[5] M. Gromov, Groups of polynomial growth and expanding maps (with an appendix by Jacques Tits). *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, **53**, 1981, 53–73

[6] M. Gromov, Carnot-Carathéodory spaces seen from within, in: Sub-Riemannian Geometry, A. Bellaïche, J.-J. Risler eds., *Progress in Mathematics*, **144**, Birkhäuser, (1996), 79–323

[7] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.*, **119**, 1967, 147–171

[8] G.A. Margulis, G.D. Mostow, The differential of a quasi-conformal mapping of a Carnot-Carathéodory space, *Geom. Funct. Analysis*, **8** (1995), 2, 402–433

[9] G.A: Margulis, G.D. Mostow, Some remarks on the definition of tangent cones in a Carnot-Carathéodory space, *J. D'Analyse Math.*, **80** (2000), 299–317

[10] J. Mitchell, On Carnot-Carathéodory metrics, *Journal of Diff. Geometry*, **21** (1985), 35–45

[11] P. Pansu, Métriques de Carnot-Carathéodory et quasiisometries des espaces symetriques de rang un, *Annals of Math.*, **129** (1989), 1–60

[12] Gh. Vrănceanu, Sur les espaces non holonomes, *C. R. Acad. Sci. Paris*, **183**, 852 (1926)

[13] Gh. Vrănceanu, Studio geometrico dei sistemi anolonomi, *Annali di Matematica Pura ed Appl.*, Serie **4**, VI (1928-1929)

[14] Gh. Vrănceanu, Clasificarea grupurilor lui Lie de rang zéro, *Stud. Cercet. Mat.*, **1** (1950), 40–86

[15] Gh. Vrănceanu, Groupes discrets linéaires, *Rev. Mathém. Pure et Appl.*, **VII**, 2 (1962)

[16] Gh. Vrănceanu, Gruppi discreti e connessioni affini, *Seminari dell'Istituto Nazionale di Alta Matematica* (1962-63)