

Modèles stochastiques pour les risques en finance

Madalina Deaconu

Inria & Institut Élie Cartan de Lorraine, Nancy

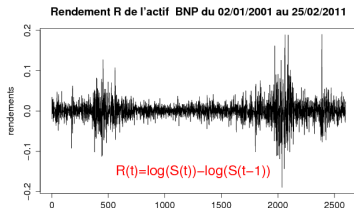
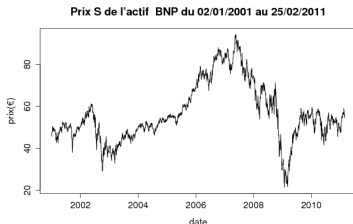
IMAR, 25 Janvier 2018



- Mathématique et finance
- Problématique
- Modélisation et validation sur les données
 - Value-at-Risk
 - Lois des pertes extrêmes
 - Estimation des paramètres
 - Affiner le modèle : changement de régime
 - Backtest et validation

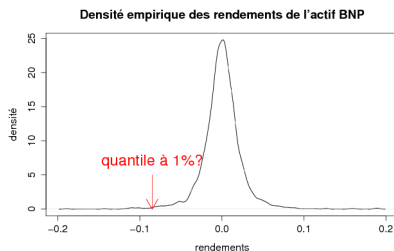
- Données de marché : cours journaliers de plus de 500 actions de la bourse de Paris (Euronext Paris) couvrant une période de 10 ans, de 2001 à 2011.

- Données de marché : cours journaliers de plus de 500 actions de la bourse de Paris (Euronext Paris) couvrant une période de 10 ans, de 2001 à 2011.



Notations \implies modélisation :

- Prix de clôture (journalier) d'un actif : $(S_t, t \geq 0)$;
- Rendements (log) : $(R_t)_{t \geq 1}$ avec $R_t = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$;
- Pertes $(L_t)_{t \geq 1}$ avec $L_t = -R_t$ (si $L_t < 0$, on parle de gain).



Objectif

- Quantifier le risque via des indicateurs simples et compréhensibles.
- $\text{VaR}_t^{(a)}$ avec a proche de 1 : la perte maximale qu'on peut subir sur la période $[t, t + 1]$ (en un jour), avec un niveau de confiance a .

$$1 - a = \mathbb{P} \left(L_{t+1} > \text{VaR}_t^{(a)} \right).$$

Propriétés de la VaR La VaR correspond à un montant de pertes - indicateur facile à comprendre et à utiliser.

Elle dépend de trois paramètres :

- la distribution des pertes du portefeuille
- le niveau de confiance α
- l'horizon temporel

Étapes pour mesurer le risque

- **choisir un modèle** pour décrire la distribution (ou la queue de distribution) des rendements (ou de pertes) de l'actif boursier
- **estimer** la VaR sous ce modèle
- **valider** la VaR estimée par des backtests - vérifier l'adéquation de ce modèle avec la queue de distribution des données financières réelles.

Modélisation - calibration

Un modèle qui estime au mieux la VaR

- Modèles des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) pour la loi (les rendements $(R_t)_{t \geq 1}$ sont i.i.d.)

Modélisation - calibration

Un modèle qui estime au mieux la VaR

- Modèles des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) pour la loi (les rendements $(R_t)_{t \geq 1}$ sont i.i.d.)
 - Modèle de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour les rendements - sous-estime les pertes extrêmes.

Modélisation - calibration

Un modèle qui estime au mieux la VaR

- Modèles des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) pour la loi (les rendements $(R_t)_{t \geq 1}$ sont i.i.d.)
 - Modèle de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour les rendements - sous-estime les pertes extrêmes.
 - Modèle de loi stable pour les rendements - sur-estime les pertes extrêmes.

Modélisation - calibration

Un modèle qui estime au mieux la VaR

- Modèles des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) pour la loi (les rendements $(R_t)_{t \geq 1}$ sont i.i.d.)
 - Modèle de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour les rendements - sous-estime les pertes extrêmes.
 - Modèle de loi stable pour les rendements - sur-estime les pertes extrêmes.
- Focalisation sur la queue de distribution des pertes $(L_t)_{t \geq 1}$

Modélisation - calibration

Un modèle qui estime au mieux la VaR

- Modèles des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) pour la loi (les rendements $(R_t)_{t \geq 1}$ sont i.i.d.)
 - Modèle de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour les rendements - sous-estime les pertes extrêmes.
 - Modèle de loi stable pour les rendements - sur-estime les pertes extrêmes.
- Focalisation sur la queue de distribution des pertes $(L_t)_{t \geq 1}$
 - Modèle de loi puissance pour les pertes :

$$\mathbb{P}(L_t \geq x) = C x^{-\alpha} \text{ pour } x \geq x_0.$$

Modélisation - calibration

Un modèle qui estime au mieux la VaR

- Modèles des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (v.a.i.i.d.) pour la loi (les rendements $(R_t)_{t \geq 1}$ sont i.i.d.)
 - Modèle de la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ pour les rendements - sous-estime les pertes extrêmes.
 - Modèle de loi stable pour les rendements - sur-estime les pertes extrêmes.
- Focalisation sur la queue de distribution des pertes $(L_t)_{t \geq 1}$

- Modèle de loi puissance pour les pertes :

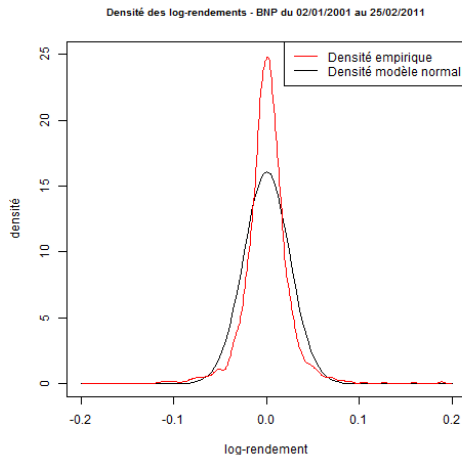
$$\mathbb{P}(L_t \geq x) = C x^{-\alpha} \text{ pour } x \geq x_0.$$

- Modèle de lois puissance à changement de régimes pour la queue de distribution des pertes

$$\mathbb{P}(L_t \geq x) = \mathbb{P}(L_t \geq x | \text{crise}) \mathbb{P}(\text{crise}) + \mathbb{P}(L_t \geq x | \text{hors-crise}) \mathbb{P}(\text{hors-crise})$$

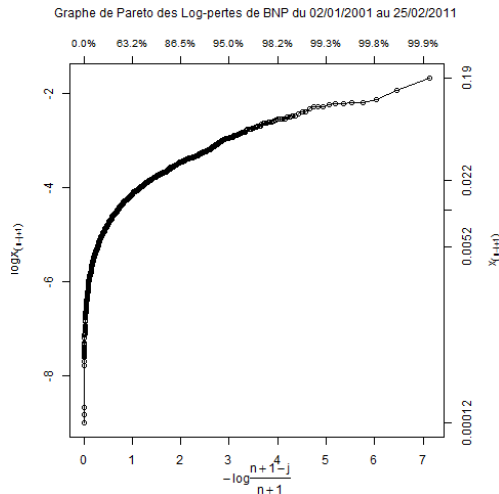
pour $x \geq x_0$.

Echec de la loi normale dans l'estimation des pertes extrêmes



La queue de distribution empirique des rendements est plus épaisse que celle estimée à partir du modèle de la loi normale.

Pourquoi les lois puissances



Si les données suivent une loi puissance à partir d'un certain rang :
 $y = C x^{-\alpha} \Rightarrow \log(y) = -\alpha \log(x) + \log(C)$ pour $x \geq x_0$.

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique
- $\alpha > 0$, appelé indice de la queue = indice caractéristique de la décroissance de la fonction $1 - F_L(\cdot)$

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique
- $\alpha > 0$, appelé indice de la queue = indice caractéristique de la décroissance de la fonction $1 - F_L(\cdot)$
- Ce qui se traduit sur la fonction quantile de L_t , notée Q_L

$$\log(Q_L(a)) = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - a) + \frac{\log(C)}{\alpha}, \text{ pour } a_0 \leq a < 1.$$

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique
- $\alpha > 0$, appelé indice de la queue = indice caractéristique de la décroissance de la fonction $1 - F_L(\cdot)$
- Ce qui se traduit sur la fonction quantile de L_t , notée Q_L

$$\log(Q_L(a)) = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - a) + \frac{\log(C)}{\alpha}, \text{ pour } a_0 \leq a < 1.$$

- Statistiques d'ordre - Fenêtre d'estimation :

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique
- $\alpha > 0$, appelé indice de la queue = indice caractéristique de la décroissance de la fonction $1 - F_L(\cdot)$
- Ce qui se traduit sur la fonction quantile de L_t , notée Q_L

$$\log(Q_L(a)) = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - a) + \frac{\log(C)}{\alpha}, \text{ pour } a_0 \leq a < 1.$$

- Statistiques d'ordre - Fenêtre d'estimation :
 - (L_{t-n+1}, \dots, L_t) : $n = 252$ la série des dernières pertes observées sur le marché;

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique
- $\alpha > 0$, appelé indice de la queue = indice caractéristique de la décroissance de la fonction $1 - F_L(\cdot)$
- Ce qui se traduit sur la fonction quantile de L_t , notée Q_L

$$\log(Q_L(a)) = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - a) + \frac{\log(C)}{\alpha}, \text{ pour } a_0 \leq a < 1.$$

- Statistiques d'ordre - Fenêtre d'estimation :
 - (L_{t-n+1}, \dots, L_t) : $n = 252$ la série des dernières pertes observées sur le marché;
 - $(L_{(1)}, \dots, L_{(n)})$: statistiques d'ordre de (L_{t-n+1}, \dots, L_t) (ordre croissant).

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique
- $\alpha > 0$, appelé indice de la queue = indice caractéristique de la décroissance de la fonction $1 - F_L(\cdot)$
- Ce qui se traduit sur la fonction quantile de L_t , notée Q_L

$$\log(Q_L(a)) = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - a) + \frac{\log(C)}{\alpha}, \text{ pour } a_0 \leq a < 1.$$

- Statistiques d'ordre - Fenêtre d'estimation :
 - (L_{t-n+1}, \dots, L_t) : $n = 252$ la série des dernières pertes observées sur le marché;
 - $(L_{(1)}, \dots, L_{(n)})$: statistiques d'ordre de (L_{t-n+1}, \dots, L_t) (ordre croissant).
- Estimation des paramètres :

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique
- $\alpha > 0$, appelé indice de la queue = indice caractéristique de la décroissance de la fonction $1 - F_L(\cdot)$
- Ce qui se traduit sur la fonction quantile de L_t , notée Q_L

$$\log(Q_L(a)) = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - a) + \frac{\log(C)}{\alpha}, \text{ pour } a_0 \leq a < 1.$$

- Statistiques d'ordre - Fenêtre d'estimation :
 - (L_{t-n+1}, \dots, L_t) : $n = 252$ la série des dernières pertes observées sur le marché;
 - $(L_{(1)}, \dots, L_{(n)})$: statistiques d'ordre de (L_{t-n+1}, \dots, L_t) (ordre croissant).
- Estimation des paramètres :
 - **Estimateur de Hill pour α**

Modèle des lois puissances

- **Modèle** pour la fonction de répartition des pertes L_t , notée F_L

$$F_L(x) = 1 - C x^{-\alpha}, \text{ pour } x \geq x_0,$$

- C est une constante caractéristique
- $\alpha > 0$, appelé indice de la queue = indice caractéristique de la décroissance de la fonction $1 - F_L(\cdot)$
- Ce qui se traduit sur la fonction quantile de L_t , notée Q_L

$$\log(Q_L(a)) = -\frac{1}{\alpha} \log(1 - a) + \frac{\log(C)}{\alpha}, \text{ pour } a_0 \leq a < 1.$$

- Statistiques d'ordre - Fenêtre d'estimation :
 - (L_{t-n+1}, \dots, L_t) : $n = 252$ la série des dernières pertes observées sur le marché;
 - $(L_{(1)}, \dots, L_{(n)})$: statistiques d'ordre de (L_{t-n+1}, \dots, L_t) (ordre croissant).
- Estimation des paramètres :
 - **Estimateur de Hill pour α**
 - **Estimateur de Weissman pour la constante C**

Estimation de l'indice de queue α

- **Littérature**

Estimateur de Hill pour α :

$$\hat{\alpha}_{r_n} = \left[r_n^{-1} \sum_{i=1}^{r_n} \log(L_{(n-i+1)}) - \log(L_{(n-r_n)}) \right]^{-1}$$

avec $0 < r_n < n$ fixé.

Estimation de l'indice de queue α

- **Littérature**

Estimateur de Hill pour α :

$$\hat{\alpha}_{r_n} = \left[r_n^{-1} \sum_{i=1}^{r_n} \log(L_{(n-i+1)}) - \log(L_{(n-r_n)}) \right]^{-1}$$

avec $0 < r_n < n$ fixé.

- **Adaptation à notre cas**

- Faible nombre de données.

- Pour $i \in [[0.95n], [0.99n]]$,

$$\log L_{(i)} = -\frac{1}{\alpha} \log \left(1 - \frac{i}{n+1} \right) + K + \varepsilon_i$$

- Méthode des moindres carrés.

- **Estimateur de Weissman de la constante C :**

- Résultat statistique :

$$L_{(i)} \approx Q_L \left(\frac{i}{n+1} \right), \text{ pour } i = 1, \dots, n,$$

avec Q fonction quantile de L .

- Pour $a_0 = 0.90$, supposons que $x_0 = Q(a_0)$, qui sera approché par $L_{(\lfloor a_0 n \rfloor)}$.

$$1 - a_0 = \mathbb{P}(L \geq Q(a_0)) \approx \hat{C} \times L_{(\lfloor a_0 n \rfloor)}^{-\hat{\alpha}}.$$

$$\hat{C} = L_{(\lfloor a_0 n \rfloor)}^{\hat{\alpha}} (1 - a_0).$$

Modèle des lois puissances

Estimateur de Weissman

- Estimateur de Weissman de la constante C :

- Résultat statistique :

$$L_{(i)} \approx Q_L \left(\frac{i}{n+1} \right), \text{ pour } i = 1, \dots, n, \quad 1 - a = \mathbb{P} \left(L_{t+1} \geq \text{VaR}_t^{(a)} \right)$$
$$= C \times (\text{VaR}_t^{(a)})^{-\alpha}.$$

avec Q fonction quantile de L .

- Pour $a_0 = 0.90$, supposons que $x_0 = Q(a_0)$, qui sera approché par $L_{(\lfloor a_0 n \rfloor)}$.

$$\widehat{\text{VaR}}_t^{(a)} = \left(\frac{\hat{C}}{1 - a} \right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

$$1 - a_0 = \mathbb{P} (L \geq Q(a_0)) \approx \hat{C} \times L_{(\lfloor a_0 n \rfloor)}^{-\hat{\alpha}}.$$

$$\hat{C} = L_{(\lfloor a_0 n \rfloor)}^{\hat{\alpha}} (1 - a_0).$$

- Résultat statistique :

$$Q_L(a) \approx L_{(\lfloor an \rfloor)},$$

en particulier

$$Q_L\left(\frac{i}{n+1}\right) \approx L_{(i)}.$$

- $\log(L_{(i)}) = -\frac{1}{\alpha} \log\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) + \frac{\log(C)}{\alpha} + \varepsilon_i,$

pour $\lfloor a_0 n \rfloor \leq i \leq n.$

- Résultat statistique :

$$Q_L(a) \approx L_{(\lfloor an \rfloor)},$$

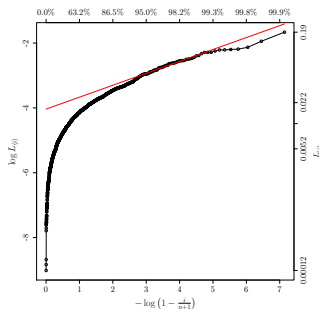
en particulier

$$Q_L\left(\frac{i}{n+1}\right) \approx L_{(i)}.$$

- $\log(L_{(i)}) = -\frac{1}{\alpha} \log\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) + \frac{\log(C)}{\alpha} + \varepsilon_i,$

pour $\lfloor a_0 n \rfloor \leq i \leq n$.

Estimation α Adaptation de l'estimateur de Hill



- Résultat statistique :

$$Q_L(a) \approx L_{(\lfloor an \rfloor)},$$

en particulier

$$Q_L\left(\frac{i}{n+1}\right) \approx L_{(i)}.$$

- $\log(L_{(i)}) = -\frac{1}{\alpha} \log\left(1 - \frac{i}{n+1}\right) + \frac{\log(C)}{\alpha} + \varepsilon_i,$

pour $\lfloor a_0 n \rfloor \leq i \leq n$.

Estimation C (Weissman)

$$\hat{C} = L_{(\lfloor a_0 n \rfloor)}^{\hat{\alpha}} (1 - a_0).$$

Estimation de la VaR

$$\begin{aligned} 1 - a &= \mathbb{P}\left(L_{t+1} \geq \text{VaR}_t^{(a)}\right) \\ &= C \times (\text{VaR}_t^{(a)})^{-\alpha}. \end{aligned}$$

$$\widehat{\text{VaR}}_t^{(a)} = \left(\frac{\hat{C}}{1 - a}\right)^{\frac{1}{\alpha}}.$$

Calcul de la Value-at-Risk et backtest de validation

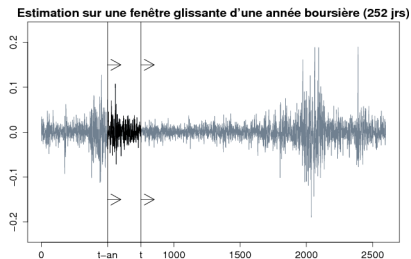


Figure : Estimation des paramètres α , C et la Value-at-Risk de l'actif BNP Paribas à partir d'une fenêtre glissante de 252 jours.

⇒ Les paramètres estimés varient d'un jour à un autre (on les estime à partir d'un échantillon qui varie en fonction du temps).

Calcul de la Value-at-Risk et backtest de validation

Estimation sur une fenêtre glissante d'une année boursière (252 jrs)

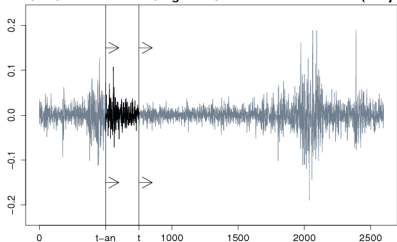


Figure : Estimation des paramètres α , C et la Value-at-Risk de l'actif BNP Paribas à partir d'une fenêtre glissante de 252 jours.

⇒ Les paramètres estimés varient d'un jour à un autre (on les estime à partir d'un échantillon qui varie en fonction du temps).

Backtest puissance - BNP du 02/01/2001 au 25/02/2011

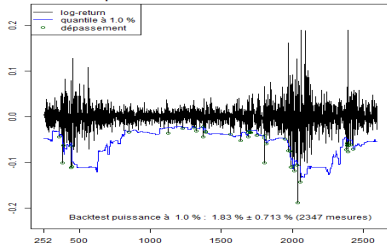
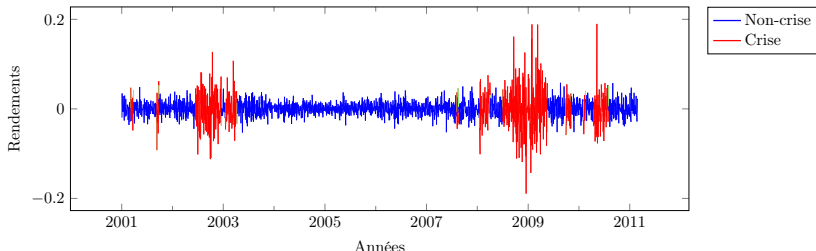


Figure : Backtest sur la VaR 99 % de l'actif BNP Paribas sur une fenêtre glissante de 252 jours.

⇒ On compare le quantile à 1% estimé (VaR) avec le rendement réel de l'actif, et on espère avoir une moyenne de 1 % de dépassement sur tout l'historique.

Amélioration par la considération des changements de régimes

- **Étape 1** : Classifier les rendements en périodes de **crise (c)** et périodes de **hors-crise (h)**.



- **Étape 2** : Intégrer cette information dans la construction du modèle des pertes.

Notre choix pour la classification : **Modèle de Markov caché (MMC)**.

Modèle de Markov caché

Un modèle de Markov caché (X, R) est entièrement caractérisé par

- **Loi initiale** ρ de X :

$$\rho(x) = \mathbb{P}(X_0 = x), \quad x \in \{c, h\};$$

- **Matrice de transition** Q de X :

$$Q(x, x') = \mathbb{P}(X_{t+1} = x' | X_t = x), \quad x, x' \in \{c, h\};$$

- **Noyau d'émission** Ψ de R sachant X :

$$\psi(x, dr) = \mathbb{P}(R_t \in dr | X_t = x) dr, \quad x \in \{c, h\}, r \in \mathbb{R}.$$

Modèle de Markov caché

Un modèle de Markov caché (X, R) est entièrement caractérisé par

- **Loi initiale** ρ de X :

$$\rho(x) = \mathbb{P}(X_0 = x), \quad x \in \{c, h\};$$

- **Matrice de transition** Q de X :

$$Q(x, x') = \mathbb{P}(X_{t+1} = x' | X_t = x), \quad x, x' \in \{c, h\};$$

- **Noyau d'émission** Ψ de R sachant X :

$$\psi(x, dr) = \mathbb{P}(R_t \in dr | X_t = x) dr, \quad x \in \{c, h\}, r \in \mathbb{R}.$$

Procédure de classification à partir de (R_1, \dots, R_t) :

- Problème d'apprentissage : Détermination de (ρ, Q, Ψ) ;
- Problème de reconnaissance : Estimation de (X_1, \dots, X_t) .

Problème d'apprentissage (algorithme de Baum-Welsh) pour l'action BNP

- **Loi initiale** ρ de X :

$$\rho(c) = 4.97 \cdot 10^{-05} \quad \rho(h) = 1 - \rho(c).$$

- **Matrice de transition** Q de X :

$$\begin{pmatrix} Q(c, c) & Q(c, h) \\ Q(h, c) & Q(h, h) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.979 & 0.021 \\ 0.007 & 0.993 \end{pmatrix}.$$

- Moyennes et variances par ligne du **noyau d'émission** ψ :

$$\begin{pmatrix} \mathbb{E}[\psi(c, R)] & \text{Var}(\psi(c, R)) \\ \mathbb{E}[\psi(h, R)] & \text{Var}(\psi(h, R)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.12 & 0.18 \\ 0.05 & 0.02 \end{pmatrix} \times 10^{-2}.$$

Problème de reconnaissance (algorithme de Viterbi) pour l'action BNP

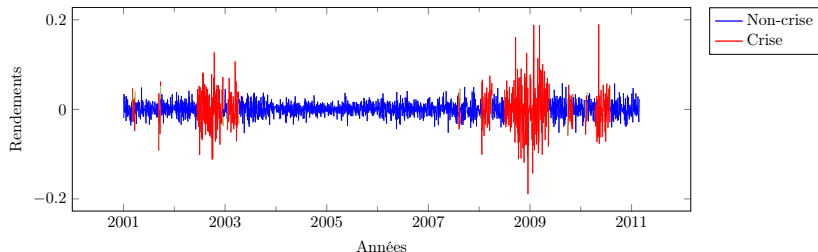


Figure : Classification des rendements de BNP en périodes de crise et de hors-crise.

Problème de reconnaissance - algorithme de Viterbi : Étant donnés les paramètres (ρ, Q, Ψ) du modèle et une suite d'observations (R_1, \dots, R_t) trouver la suite des états cachés (X_1, \dots, X_t) (maximiser la loi conditionnelle de la suite des états X par rapport aux observations R).

Notre modèle des lois puissances à changement de régimes

La loi de la **queue de distribution des pertes** est donnée par

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(L_t \geq x) &= \mathbb{P}(L_t \geq x | X_t = c) \mathbb{P}(X_t = c) + \mathbb{P}(L_t \geq x | X_t = h) \mathbb{P}(X_t = h) \\ &= C_c x^{-\alpha_c} \mathbb{P}(X_t = c) + C_h x^{-\alpha_h} (1 - \mathbb{P}(X_t = c))\end{aligned}$$

pour $x \geq x_0$,

où

$$\begin{cases} (C_c, \alpha_c) \text{ param. lois puissances pour } \text{crise}; \\ (C_h, \alpha_h) \text{ param. lois puissances pour } \text{hors-crise}. \end{cases}$$

Procédure d'estimation de la VaR

- Nous fixons $t_0 = 1500$ afin d'avoir suffisamment de données pour l'estimation du MMC.
- Pour $t \geq t_0$,
 1. Estimer $(\rho^{1:t}, Q^{1:t}, \psi^{1:t})$ à partir de (R_1, \dots, R_t) .
 2. Estimer (X_1, \dots, X_t) .
 3. Estimer (C_c, α_c) sur les dernières 252 données **crise** dans (R_1, \dots, R_t) .
 4. Estimer (C_h, α_h) sur les dernières 252 données **hors-crise** dans (R_1, \dots, R_t) .
 5. Calculer la probabilité d'être le lendemain en état de crise à partir des paramètres du MMC

$$\begin{aligned} p_{t+1} &:= \mathbb{P}(X_{t+1} = c) \\ &= \mathbb{P}(X_{t+1} = c | X_t = c) \mathbb{P}(X_t = c) + \mathbb{P}(X_{t+c} = c | X_t = h) \mathbb{P}(X_t = h) \\ &= Q^{0:t}(c, c) \delta_t^{0:t}(c) + Q^{0:t}(h, c) \delta_t^{0:t}(h), \end{aligned}$$

- La $\widehat{VaR}_t^{(a)}$ est ainsi solution de

$$1 - a = \mathbb{P}(L_{t+1} \geq x) = p_{t+1} C_c x^{-\alpha_c} + (1 - p_{t+1}) C_h x^{-\alpha_h}.$$