CENTRE FRANCOPHONE EN MATHEMATIQUES BUCAREST

Transitions de phase et équations non locales

25 - 27 Avril 2018

Les hamiltoniens effectifs de Peierls-Onsager en tant que OPD magnétiques

Radu Purice

IMAR

basé sur des travaux communs avec

Horia Cornean, Bernard Helffer et Viorel Iftimie

Plan de l'éxposé:

1. Introduction.
2. Calcul de Weyl magnétique.
3. Principaux résultats.
4. Idées des démonstrations.
   - La 'quasi'-bande de Bloch d'énergie $[0, \widetilde{b}]$.
   - Réduction à la 'quasi'-bande de Bloch d'énergie $[0, \widetilde{b}]$.
   - Réduction au cas du champ magnétique constant ϵB_0.
   - La 'quasi'-fonction de Bloch en champ magnétique constant ϵB_0.
   - Comportement local de la 'quasi'-fonction de Bloch magnétique.
   - Démonstration du Théorème B.

Consderons dans l'espace linéaire $\mathcal{X} := \mathbb{R}^d$ l'opérateur de Laplace

$$-\Delta\phi := -\sum_{1\leq j\leq d} \partial_{x_j}^2 \phi, \quad \forall \phi \in \mathscr{S}(\mathcal{X}).$$

Une procedure standard permet de lui associer un opérateur auto-adjoint dans $\mathcal{H} := L^2(\mathcal{X})$:

$$-\Delta : \mathscr{H}^2(\mathcal{X}) \to \mathcal{H}$$

avec $\mathscr{H}^2(\mathcal{X})$ l'espace de Sobolev d'ordre 2 sur $\mathbb{R}^d$.

C'est opérateur est associé à l'observable énérgie cinétique d'une particule non-relativiste de masse 2 libre dans l'espace affin associé à $\mathbb{R}^d$.

Soit maintenant un sous-groupe discret $\Gamma \subset \mathcal{X}$ isomorphe à $\mathbb{Z}^d$ engendré par d vecteurs linéairement independants $\{e_1, \ldots, e_d\} \subset \mathcal{X}$.

Supposons donnée une fonction $V \in BC^\infty(\mathcal{X}; \mathbb{R})$ qui est Γ-périodique. On dénote aussi par $V \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ l'opérateur continu de multiplication avec la fonction V dans $L^2(\mathcal{X})$.
Alors l'opérateur différentiel:

$$-\Delta + V : \mathscr{S}(\mathcal{X}) \to \mathscr{S}(\mathcal{X})$$

admet aussi une extension auto-adjointe

$$H_0 : \mathscr{H}^2(\mathcal{X}) \to \mathcal{H}.$$

C'est opérateur est associé à l'observable énérgie totale d'une particule non-relativiste de masse 2 se déplaçant dans l'espace affin associé à $\mathbb{R}^d$ sous l'influence du potentiel V.

La cellule unité.

$$E := \left\{ \sum_{1 \leq j \leq d} x_j \mathbf{e}_j \in \mathcal{X} \;\mid\; x_j \in [-1/2, 1/2), \forall j \in \{1, \ldots, d\} \right\}.$$

Elle induit la decomposition unique suivante:

$$\mathcal{X} \ni x \mapsto ([x], \{x\}) \in \Gamma \times \mathcal{E},$$

$$x = [x] + \{x\}, \; [x]_j := \sup\{k \in \mathbb{Z} \mid k \leq x_j + 1/2\}.$$

Les structures duales.

Soit $\mathcal{X}^*$ le dual def $\mathcal{X}$ et $\{\mathbf{e}_j^*\}_{1\leq j\leq d} \subset \mathcal{X}^*$ *la base duale* définie par

$$\mathbf{e}_j^*(\mathbf{e}_k) \;=\; 2\pi\delta_{jk}$$

Le reseau duale:

$$\Gamma_* \;:=\; \left\{ \sum_{1\leq j\leq d} \gamma_j \mathbf{e}_j^* \in \mathcal{X}^* \;\mid\; \gamma_j \in \mathbb{Z}, \forall j \in \{1, \ldots, d\} \right\}$$

avec la projection canonique

$$\mathfrak{p}_* : \mathcal{X}^* \to \mathcal{X}^*/\Gamma_* \cong \mathbb{T}_*.$$

et la cellule unité duale:

$$E_* \;:= \left\{ \sum_{1\leq j\leq d} \xi_j \mathbf{e}_j \in \mathcal{X}^* \;\mid\; \xi_j \in [-1/2, 1/2), \forall j \in \{1, \ldots, d\} \right\}.$$

Les transformations de Fourier.

- $\mathcal{F}_{\mathcal{X}} : \mathscr{S}(\mathcal{X}) \rightarrow \mathscr{S}(\mathcal{X}^*)$ avec $X^* \cong \mathbb{R}^d$ l'espace dual de $\mathcal{X}$:

$$\big(\mathcal{F}_{\mathcal{X}}\phi\big)(\xi) := (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathcal{X}} dx\, e^{-i<\xi,x>}\phi(x)$$

ayant une extension unitaire $L^2(\mathcal{X}) \overset{\sim}{\rightarrow} L^2(\mathcal{X}^*)$.

- $\mathcal{F}_{\Gamma} : \ell^1(\Gamma) \rightarrow C(\mathbb{T}_*)$ avec $\mathbb{T}_* \cong \mathcal{X}^*/\Gamma_*$ le groupe dual de Γ.

$$\big(\mathcal{F}_{\mathcal{X}}\underline{u}\big)(\theta) := (2\pi)^{-d/2}\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i<\theta,\gamma>}\underline{u}_{\gamma}$$

ayant une extension unitaire $\ell^2(\Gamma) \overset{\sim}{\rightarrow} L^2(\mathbb{T}_*)$.

La representation de Bloch-Floquet.

Définissons l'espace:

$$\mathscr{F} := \left\{ \hat{F} \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X} \times \mathcal{X}^*) \mid \tau_\gamma \hat{F} = \sigma_{-\gamma} \hat{F} \ \forall \gamma \in \Gamma, \tau_{\gamma^*} \hat{F} = \hat{F} \ \forall \gamma^* \in \Gamma^* \right\}$$

$$\sigma_\gamma(\xi) := e^{-i<\xi,x>},\ [\tau_\gamma f](x,\xi) := f(x+\gamma,\xi),\ [\tau_{\gamma^*} f](x,\xi) := f(x,\xi+\gamma^*)$$

avec la norme hilbertienne $\left\|\hat{F}\right\|^2 := \int_E \int_{E_*} \left|\hat{F}(x,\xi)\right|^2 d\xi\, dx$
et la transformation unitaire de *Bloch-Floquet*:

$$\mathscr{U}_\Gamma : L^2(\mathcal{X}) \to \mathscr{F}, \quad \left(\mathscr{U}_\Gamma f\right)(x,\xi) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \sigma_\gamma(\xi) f(x+\gamma).$$

Pour tout $\theta \in \mathbb{T}_*$ on definit: $\mathscr{F}_\theta := \left\{ f \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathcal{X}) \mid \tau_\gamma f = \sigma_{-\gamma}(\theta) f \right\}$
avec la norme hilbertienne $\|f\|^2_{\mathscr{F}_\theta} = \int_E |f(x)|^2 dx$.
Soit $\left\{ \mathscr{V}_\theta : \mathscr{F}_\theta \ni f \mapsto \sigma_\theta f \in L^2(\mathbb{T}) \right\}_{\theta \in \mathbb{T}_*}$, avec $\sigma_\theta(x) := e^{-i<\theta,x>}$.

L'integrale directe hilbertienne.

Alors $\mathscr{F}$ devient un fibré de fibre type $L^2(\mathbb{T})$ sur $\mathbb{T}_*$ et aussi une integrale directe Hilbertienne:

$$\mathscr{F} \cong \int_{\mathbb{T}_*}^{\oplus} \mathscr{F}_\theta \, d\theta$$

avec $$\mathscr{U}_\Gamma H_0 \mathscr{U}_\Gamma^{-1} = \int_{\mathbb{T}_*}^{\oplus} H_0\big|_{\mathscr{F}_\theta} \, d\theta.$$

Théorème

$H_0\big|_{\mathscr{F}_\theta}$, défini comme restriction de l'extension par dualité à $\mathscr{S}'(\mathcal{X})$, engendre un opérateur auto-adjoint:

$$\hat{H}_0(\theta) : \mathscr{F}_\theta^2 := \{f \in \mathscr{F}_\theta \mid (\mathbb{1} - \Delta) f \in \mathscr{F}_\theta\} \to \mathscr{F}_\theta$$

et sa résolvante est un opérateur compact.

Structure spectrale de Bloch.

Il existe une famille de fonctions continues

$$\mathbb{T}_* \ni \theta \mapsto \lambda_j(\theta) \in \mathbb{R}, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

telles que $\lambda_j(\theta) \leq \lambda_{j+1}(\theta)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{T}_*$ et on a

$$\sigma\big(\hat{H}_0(\theta)\big) = \bigcup_{j \in \mathbb{N}^*} \{\lambda_j(\theta)\}.$$

Chaque λ_j est de classe C^∞ sur tout domaine où elle a multiplicité constante.

Il existe une famille de fonctions mesurables

$$\mathbb{T}_* \ni \theta \mapsto \phi_j(\theta) \in \mathscr{F}_\theta, \quad \forall j \in \mathbb{N}^*$$

telles que $\hat{H}_0(\theta)\phi_j(\theta) = \lambda_j(\theta)\phi_j(\theta)$ pour tout $j \in \mathbb{N}^*$ et $\theta \in \mathbb{T}_*$.
Soit $\hat{\pi}_j(\theta) := |\phi_j(\theta)\rangle\langle\phi_j(\theta)|$ le projecteur orthogonal associé.

Le champ magnétique.

- Le champ magnétique est decrit par une 2-forme fermée sur $\mathcal{X}$:

$$B : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^d \wedge \mathbb{R}^d, \qquad dB = 0.$$

- Étant définit sur un espace affin, B est aussi exacte, et donc il existe une 1-forme $A : \mathcal{X} \to \mathbb{R}^d$ t.q $B = dA$.
- Transformations de jauge: $A \mapsto A' = A + d\Phi$; on a $B = dA = dA'$.
- La jauge transversale:

$$A_j(x) \ := \ - \sum_{1 \leq k \leq d} x_k \int_0^1 B_{jk}(sx) s ds.$$

Hypothèse B0.

$$B_{jk} \in BC^\infty(\mathcal{X}), \qquad A_j \in C^\infty_{\text{pol}}(\mathcal{X}).$$

Le couplage minimal.

Un système quantique en champ magnétique (*Le couplage minimal*):

$$D_j := -i\partial_{x_j} \;\; \rightsquigarrow \;\; D_j^A := -i\partial_{x_j} - A_j(x). \tag{CM}$$

Une particule non-relativiste dans un potentiel périodique V
et un champ magnétique $B = dA$, dans l'espace euclidien de dimension d
est décrit par l'extension auto-adjointe de l'opérateur

$$\sum_{1\leq j\leq d} \big(D_j^A\big)^2 + V : \mathscr{S}(\mathcal{X}) \to \mathscr{S}(\mathcal{X})$$

$$H^A \; : \mathscr{H}_A^2(\mathcal{X}) := \Big\{ u \in L^2(\mathcal{X}) \mid \sum_{1\leq j\leq d} \big(D_j^A\big)^2 u \in L^2(\mathcal{X}) \Big\} \to \mathscr{H}.$$

Substitution de Peierls.

Soit

- H_0, $B = dA$ verifiant l'Hypothèse B et H^A comme plus haut.
- $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle borné tel que $\exists k \in \mathbb{N},\ I \cap \sigma(H^A) = I \cap \lambda_k(\mathbb{T}_*)$
- $E_I(H^A)$ le projecteur spectrale de H^A associé à $I \subset \mathbb{R}$.
- $\widetilde{\lambda}_k : \mathcal{X}^* \to \mathbb{R}$ l'extension périodique de $\lambda_k : \mathbb{T}_* \to \mathbb{R}$.

Substitution de Peierls.

$$H^A\, E_I(H^A) \ \approx \widetilde{\lambda}_k\big(D^A\big)$$

comme opérateurs dans $\mathcal{H} := L^2(\mathcal{X})$.

Calcul de Weyl magnétique.

Définition

Pour toute fonction test $\Phi \in \mathscr{S}(\Xi)$ l'integrale oscillante suivante défini un opérateur linéaire continu sur $\mathscr{S}(\mathcal{X})$:

$$\big(\mathfrak{Op}^A(\Phi)f\big)(x) := (2\pi)^{-n/2} \int_\Xi e^{i<\eta, x-y>} \Lambda^A(x,y) \Phi\big(\frac{x+y}{2}, \eta\big) f(y) dy\, d\eta$$

$\Lambda^A(x,y) := \exp\big\{-i\int_{[x,y]} A\big\}$.

Covariance de jauge.

$$A' = A + d\varphi \quad \Rightarrow \quad \mathfrak{Op}^{A'}(f) = e^{i\varphi(Q)} \mathfrak{Op}^A(f) e^{-i\varphi(Q)}.$$

Remarque:

1. $\Lambda^A(x,y)\Lambda^A(y,z) = \Lambda^A(x,z) \exp\Big\{-i\int_{<x,y,z>} B\Big\} \equiv \Lambda^A(x,z)\Omega^B(x,y,z)$,
2. $|\Omega^B(x,y,z) - 1| \le C\|B\|_\infty |(y-x) \wedge ((z-x)|$.

Calcul de Weyl magnétique - 2

Proposition.

Pour $\Phi \in \mathscr{S}(\Xi)$ l'opérateur $\mathfrak{Op}^A$ admet une extension continue $\mathscr{S}'(\mathcal{X}) \to \mathscr{S}(\mathcal{X})$ et l'application $\mathfrak{Op}^A : \mathscr{S}(\Xi) \to \mathbb{B}\big(\mathscr{S}'(\mathcal{X}); \mathscr{S}(\mathcal{X})\big)$ est un isomorphisme linéaire et topologique qui induit un isomorphisme linéaire et topologique $\mathfrak{Op}^A : \mathscr{S}'(\Xi) \to \mathbb{B}\big(\mathscr{S}(\mathcal{X}); \mathscr{S}'(\mathcal{X})\big)$.

Proposition.

Pour tout symbole de Hörmander $F \in S^0_0(\Xi)$ on a $\mathfrak{Op}^A(F) \in \mathbb{B}\big(L^2(\mathcal{X})\big)$ et il existe deux constantes $C > 0$ et $p \in \mathbb{N}^*$, dependant que de la dimension $d \geq 2$ de $\mathcal{X}$ telles que:

$$\|\mathfrak{Op}^A(F)\|_{\mathbb{B}(L^2(\mathcal{X}))} \leq C \sup_{(x,\xi)\in\Xi} \sup_{|a|\leq p} \sup_{|b|\leq p} \big|\big(\partial_x^a \partial_\xi^b F\big)(x,\xi)\big|.$$

.

Classes de symboles de Hörmander.

Pour tous $s \in \mathbb{R}$ et $\rho \in [0,1]$, on considère les espaces

$$S^s_\rho(\Xi) := \{F \in C^\infty(\Xi) \mid \nu^{s,\rho}_{n,m}(F) < +\infty\,, \forall (n,m) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}\}\,,$$

avec $$\nu^{s,\rho}_{n,m}(f) := \sup_{(x,\xi)\in\Xi} \sum_{|\alpha|\leq n} \sum_{|\beta|\leq m} \left| \langle \xi \rangle^{-s+\rho m} \big(\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi f\big)(x,\xi) \right|.$$

$$S^\infty_\rho(\Xi) := \bigcup_{s\in\mathbb{R}} S^s_\rho(\Xi),$$

$$S^{-\infty}(\Xi) := \bigcap_{s\in\mathbb{R}} S^s_\rho(\Xi),$$

$$S^-_\rho(\Xi) := \bigcup_{s<0} S^s_\rho(\Xi).$$

Calcul de Weyl magnétique - 3

Définition.

Soit l'application bilinéaire et invariante de jauge:

$$\mathscr{S}(\Xi)\times\mathscr{S}(\Xi)\ni(f,g)\mapsto f\sharp^B g\in\mathscr{S}(\Xi),\quad \mathfrak{Op}^A(f\sharp^B g):=\mathfrak{Op}^A(f)\mathfrak{Op}^A(g).$$

Explicitement:

$$(f\sharp^B g)(X)=(2\pi)^{-2d}\int_\Xi\int_\Xi e^{-2i\sigma^\circ(Y,Z)}e^{-i\int_{T(x,y,z)}B}f(X-Y)g(X-Z)dYdZ,$$

avec $T(x,y,z)$ le triangle de sommets $x-y-z, x+y-z, x-y+z$.

Noyaux integraux des opérateurs magnétiques.

Pour toute distribution tempérée $F \in \mathscr{S}'(\Xi)$ l'opérateur de Weyl associé $\mathfrak{Op}(F)$ a un noyau distribution $K_F \in \mathscr{S}'(\mathcal{X} \times \mathcal{X})$ donné par

$$K_F(x,y) = \big(\mathfrak{W}F\big)(x,y) := (2\pi)^{-d} \int_{\mathcal{X}^*} e^{i<\xi,(x-y)>} F\big((x+y)/2, \xi\big) d\xi.$$

Proposition

L'opérateur $\mathfrak{Op}^A(F)$ a le noyau distribution suivant:

$$K_F^A(x,y) = \Lambda^A(x,y)\big(\mathfrak{W}F\big)(x,y) = \Lambda^A(x,y)K_F(x,y).$$

Calcul de Weyl magnétique - 4

Remarque.

$H^A = \mathfrak{Op}^A(h_0)$ pour $h_0(x,\xi) := \xi^2 + V(x)$ et $h_0 \in S^2_1(\Xi)$.

Théorème.

La resolvante de H^A en $\mathfrak{z} \notin \sigma(H^A)$, s'écrit comme

$$\left(H^A - \mathfrak{z}\right)^{-1} = \mathfrak{Op}^A(r^B_{\mathfrak{z}}(h))$$

avec $r^B_{\mathfrak{z}}(h) \in S^{-2}_1(\mathcal{X})$ un symbole indépendant de jauge.

Hypothèses:

Hypothèse A:

- $B = B_\Gamma + B_{\epsilon,\kappa} = B_\Gamma + \epsilon B_0 + \kappa\epsilon B_\epsilon,\qquad (\epsilon,\kappa) \in [0,\epsilon_0] \times [0,1],$
- $B_\Gamma = dA_\Gamma$, $\big(A_\Gamma\big)_j \in BC^\infty(\mathcal{X})$ est Γ-périodique, $\quad \forall j \in \{1,\ldots,d\},$
- $B_0 = dA_0$, $A_0(x)_j = (1/2) \sum_{1 \leq j \leq d} (B_0)_{jk} x_k \quad \forall j \in \{1,\ldots,d\},$
- $B_\epsilon = dA_\epsilon,$
- $H_\Gamma := \sum_{1 \leq j \leq d} \big(D_j^{A_\Gamma}\big)^2 + V = \mathfrak{Op}^{A_\Gamma}(h_0),$
- $H^{\epsilon,\kappa} := \mathfrak{Op}^{A^{\epsilon,\kappa}}(h_0), \qquad A^{\epsilon,\kappa} := A_\Gamma + \epsilon A_0 + \kappa\epsilon A_\epsilon.$

Hypothèse B:

L'opérateur Γ-périodique H_Γ a une première fonction de Bloch $\lambda_0 : \mathbb{T}_* \to \mathbb{R}$ avec un minimum absolue unique et non-dégénéré en $\theta_0 \in \mathbb{T}_*$ et on peut supposer $\lambda_0(\theta_0) = 0$.

Conséquences:

Il existe $\widetilde{b} > 0$ t.q.:

- Pour tout $0 < b \leq \widetilde{b}$ l'ensemble $\Sigma_b := \lambda_0^{-1}([0, b)) \subset \mathbb{T}_*$ est difféomorphe à une boule ouverte dans $\mathbb{R}^d$, a une frontière lisse et contient θ_0 .
- La fonction λ_0 est lisse sur Σ_b et a une Hessienne positive.
- Pour θ en dehors de Σ_b on a $\hat{H}_\Gamma(\theta) \geq b$.

On voit que $H^0 \equiv H^{0,0} = H_\Gamma$.

Théorème A.

Il existe $b \in (0, \widetilde{b})$ et une fonction réelle et lisse $\lambda^{\epsilon}\colon \mathbb{T}_* \to \mathbb{R}$ t.q.:

1. $\forall k \in \mathbb{N}$, $\exists C_k > 0$ t.q. $\forall \theta \in \Sigma_b$ et $|\alpha| = k$
$$\left|\left(\partial^\alpha \lambda^{\epsilon}\right)(\theta) - \left(\partial^\alpha \lambda_0\right)(\theta)\right| \leq C_k\, \epsilon\,.$$
2. $\lambda^{\epsilon}(\theta) \geq b/2$ en dehors de Σ_b si ϵ est assez petit.
3. $\forall K \geq 1$, $\exists C_0 > 0$ et $(\epsilon_0, \kappa_0) \in (0, \widetilde{b}) \times (0, 1)$, t.q. $\forall (\epsilon, \kappa) \in (0, \epsilon_0] \times (0, \kappa_0]$,
$$d_H\left(\sigma\left(H^{\epsilon,\kappa}\right)\bigcap[0, K\epsilon]\,,\, \sigma\left(\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(\widetilde{\lambda^{\epsilon}})\right)\bigcap[0, K\epsilon]\right) \;\leq\; C_0\left(\kappa\epsilon + \epsilon^2\right).$$

$d_H(M_1, M_2)$ est la distance de Hausdorff entre M_1 et M_2,
(pour des sous-ensembles M_1, M_2 de $\mathbb{R}$)
et $\widetilde{\lambda^{\epsilon}} : \mathcal{X}^* \to \mathbb{R}$ est l'extension périodique de $\lambda^{\epsilon}\colon \mathbb{T}_* \to \mathbb{R}$ considérée comme distribution sur Ξ constante le long de $\mathcal{X} \times \{0\}$.

Théorème B.

On va supposer que d=2 et $A_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}A(\epsilon x)$.
Pour tout entier $N \geq 1$, il existe des constantes positives C_0, C_1, C_2 , et des paramètres $(\epsilon_0, \kappa_0) \in (0, \widetilde{b}/N) \times (0, 1)$, t.q. pour toute paire $(\epsilon, \kappa) \in (0, \epsilon_0] \times (0, \kappa_0]$ il existe $a_0 < b_0 < a_1 < \cdots < a_N < b_N$, avec $a_0 = \inf\{\sigma(H^{\epsilon,\kappa})\}$ pour lesquels:

$$\sigma(H^{\epsilon,\kappa}) \cap [a_0, b_N] \subset \bigcup_{k=0}^{N} [a_k, b_k] , \quad \dim\big(\mathrm{Ran} E_{[a_k,b_k]}(H^{\epsilon,\kappa})\big) = +\infty ,$$

$$b_k - a_k \leq C_0\epsilon\big(\kappa + C_1\,\epsilon^{1/5}\big) \text{ pour } 0 \leq k \leq N , \tag{1}$$

$$\text{et } a_{k+1} - b_k \geq \frac{1}{C_2}\epsilon , \text{ pour } 0 \leq k \leq N-1 . \tag{2}$$

Localisation du projecteur propre de Bloch.

On considère la fenêtre d'énergies $[0, \widetilde{b}] \subset \mathbb{R}$.
Soit $\mathscr{K} := L^2(\mathbb{T})$ et $\widetilde{\pi}_j(\theta) := \mathscr{V}_\theta \hat{\pi}_j(\theta) \mathscr{V}_\theta^{-1} \in \mathbb{B}(\mathscr{K})$, $\forall j \in \mathbb{N}$, $\forall \theta \in \mathbb{T}_*$.

- On choisit $u_0 \in \widetilde{\pi}_0(\theta_0)\mathscr{K}$ avec $\|u_0\|_{\mathscr{K}} = 1$.
- Soit $b \in (0, \widetilde{b})$ t.q. $\|\widetilde{\pi}_0(\theta) - \widetilde{\pi}_0(\theta_0)\|_{\mathbb{B}(\mathscr{K})} < 1/2$ et l'opérateur unitaire d'entrelacement de Sz. Nagy
$$\mathscr{R}(\theta, \theta_0) : \widetilde{\pi}_0(\theta_0)\mathscr{K} \to \widetilde{\pi}_0(\theta)\mathscr{K}.$$
- Il définit une fonction lisse de $\theta \in \Sigma_b$.
- Définissons $\widetilde{\phi}_0(\theta) := \mathscr{R}(\theta, \theta_0)u_0$, fonction lisse $\Sigma_b \to \mathscr{K}$.
- Alors $\|\widetilde{\phi}_0(\theta)\|_{\mathscr{K}} = 1$ pour tout $\theta \in \Sigma_b$.

Pour tout $\theta \in \Sigma_b$ le vecteur propre $\widetilde{\phi}_0(\theta, \cdot) \in \mathscr{K}$ est une fonction lisse sur $\mathbb{T}$ à cause de la régularité elliptique de $\mathscr{V}_\theta \hat{H}_\Gamma(\theta) \mathscr{V}_\theta^{-1}$ considéré comme opérateur différentiel sur la variété compacte $\mathbb{T}$.

Extension lisse du projecteur propre.

Proposition C

Il existe une section lisse globale $\hat{\psi}_0 : \mathbb{T}^* \to \int_{\mathbb{T}_*} \mathscr{F}_\theta \, d\theta$, t.q.:

- $\hat{\psi}_0(\theta) = \mathscr{V}_\theta^{-1} \widetilde{\phi}_0(\theta)$ pour tout $\theta \in \Sigma_b$,
- $\|\hat{\psi}_0(\theta)\|_{\mathscr{F}_\theta} = 1$ pour tout $\theta \in \mathbb{T}_*$.

Démonstration:

- Soit $\{f_1, f_2\} \subset C_0^\infty(\mathring{E})$ t.q. $\|f_j\|_{L^2(E)} = 1$ et $f_1(x)f_2(x) = 0 \; \forall x \in E$.
- Pour tout $\theta \in \mathbb{T}_*$ définissons $\hat{f}_j(\theta) \in \mathscr{F}_\theta$, $(j = 1, 2)$ par: $\hat{f}_j(\theta, \gamma + x) := e^{-i<\theta,\gamma>} f_j(x), \; \forall (\theta, \gamma, x) \in \mathbb{T}_* \times \Gamma \times E$.
- Alors $\hat{f}_1(\theta, x)\hat{f}_2(\theta, x) = 0 \; \forall x \in \mathcal{X}$ et $\|\hat{f}_1(\theta)\|_{L^2(E)} = \|\hat{f}_2(\theta)\|_{L^2(E)} = 1$.

Remarque: due a leurs ortogonalité, un des deux vecteurs $\hat{f}_j(\theta_0) \in \mathscr{F}_{\theta_0}$ n'est pas parallèle avec $\mathscr{V}_{\theta_0}^{-1} \widetilde{\phi}(\theta_0) \in \mathscr{F}_{\theta_0}$.

Démonstration Proposition C (suite)

On peut donc supposer que:

$$|\langle \hat{\phi}_0(\theta_0), \hat{f}_1(\theta_0)\rangle_{\mathscr{F}_{\theta_0}}| \leq 1/\sqrt{2}\,.$$

La continuité en θ implique qu'il existe une boule $B_r(\theta_0) \subset \overline{\Sigma}_b$ t.q.:

$$|\langle \hat{\phi}_0(\theta), \hat{f}_1(\theta)\rangle_{\mathscr{F}_{\theta}}| \leq 3/4\,, \quad \forall \theta \in B_r(\theta_0)\,.$$

Soit

- $g \in C_0^\infty(\Sigma_b; [0,1])$ avec support dans $B_r(\theta_0)$ et $g = 1$ dans $B_{r/2}(\theta_0)$.
- $\hat{\psi}(\theta, x) := g(\theta)\hat{\phi}_0(\theta, x) + (1 - g(\theta))\hat{f}_1(\theta, x)$.

Alors $\|\hat{\psi}(\theta)\|^2_{L^2(E)} \geq 1/8$ et $\hat{\psi}_0(\theta, \cdot) := \hat{\psi}(\theta, \cdot)\|\hat{\psi}(\theta)\|^{-1} \in \mathscr{F}_\theta$ est une extension lisse de $\hat{\phi}_0$ à une section globale sur $\mathbb{T}_*$.

$\square$

La 'quasi'-fonction de Wannier libre.

Définition

- On appelle $\psi_0 := \mathscr{U}_\Gamma^{-1}\hat{\psi}_0 \in L^2(\mathcal{X})$ la *'quasi'-fonction de Wannier libre*.
- $\forall\gamma \in \Gamma: \ \psi_\gamma := \mathscr{T}_{-\gamma}\psi_0 \in L^2(\mathcal{X})$, forment *le 'quasi'-repère de Wannier libre pour la fenêtre d'énergies* $[0, \widetilde{b}]$.
- Soit $\pi \in \mathbb{B}(\mathscr{H})$ le projecteur orthogonal sur l'espace linéaire fermé $$\mathscr{H}_0 := \overline{\mathrm{Span}\{\psi_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\}} \subset L^2(\mathcal{X}).$$

Proposition

- $\psi_0 \in \mathscr{S}(\mathcal{X})$.
- La famille $\{\psi_\gamma : \ \gamma \in \Gamma\} \subset L^2(\mathcal{X})$ est orthonormale.
- $\pi\mathscr{H} \subset \mathscr{D}(H^0)$ et donc, les produits $H^0\pi$ et πH^0 définissent des opérateurs bornés sur $\mathscr{H} = L^2(\mathcal{X})$.

Le 'quasi'-repère de Wannier magnétique.

Définition

1. $\mathring{\phi}^{\epsilon}_{\gamma}(x) := \Lambda^{\epsilon}(x,\gamma)\psi_0(x-\gamma), \quad \Lambda^{\epsilon}(x,y) := e^{-i\int_{[x,y]}(A_\Gamma+\epsilon A_0)},$
   $\mathbb{G}^{\epsilon}_{\alpha\beta} := \langle\mathring{\phi}^{\epsilon}_{\alpha}\,,\,\mathring{\phi}^{\epsilon}_{\beta}\rangle_{\mathcal{H}}\,,\ \mathbb{F}^{\epsilon} := \big(\mathbb{G}^{\epsilon}\big)^{-1/2} \in \mathbb{B}\big(\ell^2(\Gamma)\big),$
2. $\phi^{\epsilon}_{\gamma}(x) := \mathbb{F}^{\epsilon}_{\alpha\gamma}\mathring{\phi}^{\epsilon}_{\alpha}$, $\pi^{\epsilon} := \sum_{\gamma\in\Gamma}|\phi^{\epsilon}_{\gamma}\rangle\langle\phi^{\epsilon}_{\gamma}|\,,$
3. $\mathring{\phi}^{\epsilon,\kappa}_{\gamma}(x) := \Lambda^{\epsilon,\kappa}(x,\gamma)\psi^{\epsilon}_0(x-\gamma) \quad \Lambda^{\epsilon,\kappa}(x,y) := e^{-i\int_{[x,y]}[A_\Gamma+\epsilon(A_0+\kappa A_\epsilon)]},$
   $\mathbb{G}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha\beta} := \langle\mathring{\phi}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha}\,,\,\mathring{\phi}^{\epsilon,\kappa}_{\beta}\rangle_{\mathcal{H}}\,,\ \ \mathbb{F}^{\epsilon,\kappa} := \big(\mathbb{G}^{\epsilon,\kappa}\big)^{-1/2} \in \mathbb{B}\big(\ell^2(\Gamma)\big),$
4. $\phi^{\epsilon,\kappa}_{\gamma} := \sum_{\alpha\in\Gamma}\mathbb{F}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha\gamma}\mathring{\phi}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha}\,, \quad \pi^{\epsilon,\kappa} := \sum_{\gamma\in\Gamma}|\phi^{\epsilon,\kappa}_{\gamma}\rangle\langle\phi^{\epsilon,\kappa}_{\gamma}|.$
5. $\psi^{\epsilon}_0(x) := \sum_{\alpha\in\Gamma}\mathbb{F}^{\epsilon}_{\alpha\,0}\Omega^{\epsilon}(\alpha,0,x)\psi_0(x-\alpha),\ \widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(x,y) := e^{-i\kappa\epsilon\int_{[x,y]}A_\epsilon}.$

Remarque: Nous avons les relations:

$$\phi^{\epsilon}_{\gamma}(x) = \Lambda^{\epsilon}(x,\gamma)\psi^{\epsilon}_0(x-\gamma), \quad \mathring{\phi}^{\epsilon,\kappa}_{\gamma}(x) = \widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(x,\gamma)\phi^{\epsilon}_{\gamma}(x).$$

Propriétés de localisation.

$\exists \epsilon_0 > 0$ t.q.:

1. $\forall m \in \mathbb{N}, \; \exists C_m > 0$ t.q.:

$$< \alpha - \beta >^m \left| \mathbb{F}^{\epsilon}_{\alpha\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right| \leq \; C_m \, \epsilon \, , \; \forall (\alpha, \beta) \in \Gamma^2 \, , \forall \epsilon \in [0, \epsilon_0].$$

2. $\forall m \in \mathbb{N}$ et $\forall a \in \mathbb{N}^2$, il existe $C_{m,a} > 0$ t.q.:

$$\sup_{x \in \mathcal{X}} < x >^m \left| \big(\partial^a \psi_0^{\epsilon}\big)(x) - \big(\partial^a \psi_0\big)(x) \right| \; \leq \; C_{m,a} \epsilon \, , \quad \forall \epsilon \in [0, \epsilon_0] \, .$$

3. $\forall m \in \mathbb{N}$, il existe $C_m > 0$ t.q.:

$$\sup_{(\alpha,\beta) \in \Gamma^2} < \alpha - \beta >^m \left| \mathbb{F}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha,\beta} - \delta_{\alpha\beta} \right| \leq C_m \, \kappa\epsilon \, , \; \forall (\epsilon, \kappa) \in [0, \epsilon_0] \times [0, 1] \, .$$

4. $\exists \epsilon_0 > 0$ t.q. pour tout $(\epsilon, \kappa) \in [0, \epsilon_0] \times [0, 1]$ on a l'inclusion

$$\pi^{\epsilon,\kappa} \mathcal{H} \subset \mathcal{D}(H^{\epsilon,\kappa}) \, ,$$

et donc $H^{\epsilon,\kappa} \pi^{\epsilon,\kappa} \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ et $\pi^{\epsilon,\kappa} H^{\epsilon,\kappa}$ a une fermeture bornée.

Symboles des projecteurs de la 'quasi'-bande de Bloch magnétique.

On démontre que:

- $\pi^\epsilon = \mathfrak{Op}^\epsilon(p_\epsilon)$ est Γ-périodique et $p_\epsilon \in S^{-\infty}(\Xi)$.
- $\pi^{\epsilon,\kappa} = \mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(p_{\epsilon,\kappa})$ et $p_{\epsilon,\kappa} \in S^{-\infty}(\Xi)$.

Proposition

Il existe $\epsilon_0 > 0$ t.q. pour toute semi-norme ν définissant la topologie de Fréchet sur $S^{-\infty}(\Xi)$, il existe $C_\nu > 0$ t.q. on a les estimations

$$\nu(p^\epsilon - p) \leq C_\nu\, \epsilon \text{ and } \nu(p^{\epsilon,\kappa} - p^\epsilon) \leq C_\nu\, \kappa\epsilon\,, \ \forall(\epsilon,\kappa) \in [0,\epsilon_0] \times [0,1]\,.$$

La déformation arbitraire introduit dans la définition de la 'quasi'-fonction de Wannier libre ne permet pas d'espérer la petitesse de la norme du commutateur $\left[H^{\epsilon,\kappa}, \pi^{\epsilon,\kappa}\right]$.

Réduction à la 'quasi'-bande de Bloch d'énergie $[0, \widetilde{b}]$.

On va considérer les opérateurs auto-adjoints:

$$H^{\epsilon,\kappa} \text{ et sa projection } \pi^{\epsilon,\kappa} H^{\epsilon,\kappa} \pi^{\epsilon,\kappa}.$$

On va comparer les parties de leurs spectres contenus dans l'intervale $[0, \widetilde{b}]$, en utilisant une variante de *l'argument Schur-Feshbah*.

L'argument abstrait.

Soit:

- H un opérateur auto-adjoint positif (pas necessairement borné);
- Π un projecteur orthogonal t.q. les produits $H\Pi$ et ΠH sont bornés dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ et supposons que
$$\exists \beta > 0 \text{ t.q. } \Pi^\perp H \Pi^\perp \geq 2\beta \Pi^\perp.$$

Alors $\Pi^\perp(H - E)\Pi^\perp$ inversible comme opérateur dans $\Pi^\perp\mathcal{H}$, $\forall E \in [0, 2\beta)$ et soit $R_\perp(E) \in \mathcal{L}(\Pi^\perp\mathcal{H})$ cet inverse ($\sup_{E\in[0,\beta]} \|R_\perp(E)\| \leq \beta^{-1}$).

Le résultat de Feshbah-Schur:

Soit: $S(E) := \Pi(H - E\mathbf{1})\Pi \; - \; \Pi H \Pi^\perp R_\perp(E) \Pi^\perp H \Pi \; \in \; \mathbb{B}(\Pi\mathcal{H})$.

Alors pour $E \in [0, \beta]$:

$(H - E\mathbf{1})$ inversible dans $\mathcal{H}$ **si et seulement si** $S(E)$ inversible dans $\Pi\mathcal{H}$

et alors on a que $S(E)^{-1} = \Pi\big(H - E\mathbf{1}\big)^{-1}\Pi$

L'argument abstrait - 2.

Y a pas d'hypothèse de petitesse pour la norme de $\Pi H \Pi^\perp \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$!
Mais: On suppose $E > 0$ petit (d'ordre ϵ).
et on tient compte que suite à l'équation de la resolvante:

$$R_\perp(E) = R_\perp(0) + R_\perp(0)^2 + E^2 R_\perp(0)^2 R_\perp(E).$$

Définition:

- $Y := \Pi + \Pi H \Pi^\perp R_\perp(0)^2 \Pi^\perp H \Pi.$ $\qquad (Y \geq \Pi)$
- $\widetilde{H} := Y^{-1/2} \left[\Pi H \Pi - \Pi H \Pi^\perp R_\perp(0) \Pi^\perp H \Pi \right] Y^{-1/2} \in \mathbb{B}(\Pi \mathcal{H}).$

Remarque: $S(E) = Y^{1/2} \big(\widetilde{H} - E\mathbf{1} \big) Y^{1/2} + E^2 \Pi H R_\perp(0) R_\perp(E) R_\perp(0) H \Pi.$

Proposition I:

$\forall \beta' \in [0, \beta]$ on a

$$d_H\{\sigma(H) \cap [0, \beta'], \sigma(\widetilde{H}) \cap [0, \beta']\} \leq \|H\Pi\|^2 \, (\beta')^2 \beta^{-3}.$$

Démonstration de la Proposition I.

Si $E \in [0, \beta'] \cap \rho(\widetilde{H})$.

Remarquons que:
$S(E) = Y^{1/2}\{\mathbf{1} + Y^{-1/2}\Pi HX(E)H\Pi Y^{-1/2}(\widetilde{H} - E)^{-1})\}(\widetilde{H} - E)Y^{1/2}$ et
$\|Y^{-1/2}\Pi HX(E)H\Pi Y^{-1/2}(\widetilde{H} - E)^{-1}\| \leq \frac{\beta'^2\|H\Pi\|^2\beta^{-3}}{\mathrm{dist}(E,\sigma(\widetilde{H}))}$, pour $E \in [0, \beta']$.

Donc: $\mathrm{dist}(E, \sigma(\widetilde{H})) > \beta'^2\|H\Pi\|^2\beta^{-3}$ implique $E \in \rho(H)$.

$E \in \sigma(H) \cap [0, \beta']$ implies $\mathrm{dist}\big(E, \sigma(\widetilde{H}) \cap [0, \beta')\big) > \beta'^2\|H\Pi\|^2\beta^{-3}$.

Si $E \in [0, \beta'] \cap \rho(H)$.

Alors: $S(E)$ inversible dans $\Pi\mathscr{H}$ et $S(E)^{-1} = \Pi\big(H - E\mathbf{1}\big)^{-1}\Pi$.
Mais $Y^{1/2}\big(\widetilde{H} - E\mathbf{1}\big)Y^{1/2} = S(E) - E^2\Pi HR_\perp(0)R_\perp(E)R_\perp(0)H\Pi$.
Donc: $\mathrm{dist}(E, \sigma(H)) > \beta'^2\|H\Pi\|^2\beta^{-3}$ implique $\widetilde{H} - E\mathbf{1}$ inversible.

$E \in \sigma(\widetilde{H}) \cap [0, \beta']$ implique $\mathrm{dist}\big(E, \sigma(H) \cap [0, \beta')\big) > \beta'^2\|H\Pi\|^2\beta^{-3}$.

Proposition II.

Il existe $\epsilon_0 > 0$ et $\beta \in (0, \widetilde{b}/4)$ t.q. $\forall(\epsilon, \kappa) \in [0, \epsilon_0] \times [0, 1]$ les opérateurs $(H^{\epsilon,\kappa}, \pi^{\epsilon,\kappa})$ verifient les hypothèses de l'argument abstrait précédent:

1. $H^{\epsilon,\kappa}\pi^{\epsilon,\kappa}$ et $\pi^{\epsilon,\kappa}H^{\epsilon,\kappa}$ sont bornés sur $\mathscr{H}$, uniformement en ϵ et κ .
2. $(\mathbf{1} - \pi^{\epsilon,\kappa})H^{\epsilon,\kappa}(\mathbf{1} - \pi^{\epsilon,\kappa}) \geq 2\beta\,(\mathbf{1} - \pi^{\epsilon,\kappa})$.

Notations:

- $R_\perp^{\epsilon,\kappa}(E)$ l'inverse de $(\mathbf{1} - \pi^{\epsilon,\kappa})H^{\epsilon,\kappa}(\mathbf{1} - \pi^{\epsilon,\kappa})$ dans $(\mathbf{1} - \pi^{\epsilon,\kappa})\mathscr{H}$.
- $Y^{\epsilon,\kappa} := \pi^{\epsilon,\kappa} + \pi^{\epsilon,\kappa}H^{\epsilon,\kappa}R_\perp^{\epsilon,\kappa}(0)^2H^{\epsilon,\kappa}\pi^{\epsilon,\kappa}$.
- $$\widetilde{H}^{\epsilon,\kappa} := \left[Y^{\epsilon,\kappa}\right]^{-1/2}\left[\pi^{\epsilon,\kappa}H^{\epsilon,\kappa}\pi^{\epsilon,\kappa} - \pi^{\epsilon,\kappa}H^{\epsilon,\kappa}R_\perp^{\epsilon,\kappa}(0)H^{\epsilon,\kappa}\pi^{\epsilon,\kappa}\right]\left[Y^{\epsilon,\kappa}\right]^{-1/2}.$$

Démonstration de la Proposition II.

La première conclusion a déja été remarquée *(dia 27)*.

Soit $b' < b < \widetilde{b}$ et $g \in C_0^\infty(\Sigma_b)$ t.q. $0 \leq g(\theta) \leq 1$ et $g(\theta) = 1$ sur $\Sigma_{b'}$.

$$\hat{K}^0(\theta) := \hat{H}^0(\theta) + g(\theta)\hat{\pi}(\theta)\,, \qquad K^0 := \mathscr{U}_\Gamma^{-1}\left(\int_{E^*}^{\oplus} \hat{K}^0(\theta)\, d\theta\right)\mathscr{U}_\Gamma\,,$$

$$W^0 := K^0 - H^0, \quad w := \mathfrak{S}(W^0), \quad W^{\epsilon,\kappa} := \mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(w),$$

$$K^{\epsilon,\kappa} := H^{\epsilon,\kappa} + W^{\epsilon,\kappa}\,.$$

Alors $\qquad K^0 \geq b'\mathbb{1} \;\Rightarrow \pi^\perp H^0 \pi^\perp = \pi^\perp K^0 \pi^\perp \geq b'\pi^\perp$.
Par continuité spectrale [CP-15]

$$\exists \epsilon_0 > 0 \text{ t.q. } K^{\epsilon,\kappa} \geq (3/4)b' \;\forall(\epsilon,\kappa) \in [0,\epsilon_0] \times [0,1].$$

Par définition $W^0 = \pi W^0 \pi$ et

$$\left\|\pi^{\epsilon,\kappa} W^{\epsilon,\kappa} \pi^{\epsilon,\kappa} - W^{\epsilon,\kappa}\right\| \leq C\,\epsilon,\; \forall(\epsilon,\kappa) \in [0,\epsilon_0] \times [0,1]$$

Le choix $\beta = b'/4$ finit la démonstration.

Première Conclusion:

Le choix $\beta' = K\epsilon$ et $\beta \in (\beta', \widetilde{b}/4)$ nous permet de conclure que:

$\forall K \geq 1$, $\exists C_0 > 0$ et $(\epsilon_0, \kappa_0) \in (0, \widetilde{b}) \times (0, 1)$, t.q.
$\forall (\epsilon, \kappa) \in (0, \epsilon_0] \times (0, \kappa_0]$,

$$d_H\left(\sigma\big(H^{\epsilon,\kappa}\big)\bigcap[0, K\epsilon]\,,\,\sigma\big(\widetilde{H}^{\epsilon,\kappa}\big)\bigcap[0, K\epsilon]\right) \leq C_0\big(\kappa\epsilon + \epsilon^2\big).$$

$d_H(M_1, M_2)$ est la distance de Hausdorff entre M_1 et M_2,
(pour des sous-ensembles M_1, M_2 de $\mathbb{R}$)

Réduction au cas $\kappa = 0$.

$$\left\langle \phi^{\epsilon,\kappa}_{\alpha}\,,\,\pi^{\epsilon,\kappa}\widetilde{H}^{\epsilon,\kappa}\pi^{\epsilon,\kappa}\phi^{\epsilon,\kappa}_{\beta}\right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \Lambda^{\epsilon,\kappa}(\cdot,\alpha)\mathcal{T}_{-\alpha}\psi^{\epsilon}_{0}\,,\,\widetilde{H}^{\epsilon,\kappa}\Lambda^{\epsilon,\kappa}(\cdot,\beta)\mathcal{T}_{-\beta}\psi^{\epsilon}_{0}\right\rangle_{\mathcal{H}}$$

Soit $A^{\epsilon} := A_{\Gamma} + \epsilon A_0$, $H^{\epsilon} := \mathfrak{Op}^{A^{\epsilon}}(h_0)$ et $\pi^{\epsilon} = \sum_{\gamma\in\Gamma}|\phi^{\epsilon}_{\gamma}\rangle\langle\phi^{\epsilon}_{\gamma}|$
et les opérateurs de bande d'énérgie $[0,\widetilde{b}]$ associés à π^{ϵ}:

- $R^{\epsilon}_{\perp}(E)$ l'inverse de $(\mathbf{1}-\pi^{\epsilon})H^{\epsilon}(\mathbf{1}-\pi^{\epsilon})$ dans $(\mathbf{1}-\pi^{\epsilon})\mathcal{H}$.
- $Y^{\epsilon} := \pi^{\epsilon} + \pi^{\epsilon}H^{\epsilon}R^{\epsilon}_{\perp}(0)^2H^{\epsilon}\pi^{\epsilon}$.
- $\widetilde{H}^{\epsilon} := \left[Y^{\epsilon}\right]^{-1/2}\left[\pi^{\epsilon}H^{\epsilon}\pi^{\epsilon} - \pi^{\epsilon}H^{\epsilon}R^{\epsilon}_{\perp}(0)H^{\epsilon}\pi^{\epsilon}\right]\left[Y^{\epsilon}\right]^{-1/2}$.

$\Lambda^{\epsilon,\kappa} = \widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}\Lambda^{\epsilon}$ car $A^{\epsilon,\kappa} = \epsilon A_0 + \kappa A_{\epsilon}$.

Corrections d'orthonormalisation:

- $\left|\sum_{\alpha'\in\Gamma}\sum_{\beta'\in\Gamma}\overline{\mathbb{F}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha'\alpha}}\mathbb{F}^{\epsilon,\kappa}_{\beta'\beta}\mathfrak{H}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha',\beta'} - \mathfrak{H}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha,\beta}\right| \leq C_m\kappa\epsilon < \alpha-\beta >^{-m}$.

  pour toute famille de coefficients $\mathfrak{H}^{\epsilon,\kappa}_{\alpha,\beta}$.

Première estimation: pour le symbole différentiel h_0.

- $(-i\nabla - A^{\epsilon,\kappa}(x))^2\widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(x,\tilde{\beta}) = \widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(x,\tilde{\beta})\Big(-i\nabla - A^{\epsilon}(x) + \kappa a_\epsilon(x,\tilde{\beta})\Big)^2$,
  où:
  $$a_\epsilon(x,\beta)_j = \sum_k (x-\gamma)_k \int_0^1 \epsilon B_{jk}\big(\epsilon\beta + s\epsilon(x-\beta)\big)s\,ds \ \text{ for } j = 1,2\,,$$
  et on observe que: $|a_\epsilon(x,\beta)| \leq C\epsilon < x-\beta >$.
- De plus
  $$\widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(x,\tilde{\alpha})^{-1}\widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(x,\tilde{\beta}) = \widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(\tilde{\alpha},\tilde{\beta})\,\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(\tilde{\alpha},x,\tilde{\beta})\,,$$
  $$|\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(\tilde{\alpha},x,\tilde{\beta}) - \mathbb{1}| \leq C\,\kappa\epsilon\,|x-\tilde{\alpha}|\,|x-\tilde{\beta}|\,.$$
- Finalement nous tenons compte de la décroissance de $\mathcal{T}_\alpha\psi_0^\epsilon$ et $\mathcal{T}_\beta\psi_0^\epsilon$.

Deuxième estimation: pour les symboles S^-_1.

- Soit $F \in S^-_1(\Xi)$, $\Big[\widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(\alpha',\cdot)\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(F)\widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(\cdot,\beta')u\Big](x) =$

$$= \widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(\alpha',\beta')\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(\alpha',x,\beta')\int_{\mathcal{X}} dy\, \widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(x,y,\beta')\Lambda^{\epsilon}(x,y)K_F(x,y)u(y)$$

,

- on utilise les estimations

$$\left|\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(\alpha',x,\beta') - 1\right| \leq C\kappa\epsilon\,|x-\alpha'|\,|x-\beta'|,$$

$$\left|\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(x,x+z,\beta') - 1\right| \leq C\kappa\epsilon\,|z|\,|x-\beta'|.$$

- Finalement nous tenons compte de la décroissance de $\mathcal{T}_\alpha\psi^\epsilon_0$, $\mathcal{T}_\beta\psi^\epsilon_0$, et la décroissance orthogonale à la diagonale pour le noyau intégral de $\mathfrak{Op}(F)$.

Deuxième conclusion.

Soit

$$X^\epsilon := H^\epsilon\big(Y^\epsilon\big)^{-1/2} + \big[\big(Y^\epsilon\big)^{-1/2} - \mathbb{1}\big] H^\epsilon\big(Y^\epsilon\big)^{-1/2} + + \big(Y^\epsilon\big)^{-1/2} H^\epsilon R^\epsilon_\perp H^\epsilon\big(Y^\epsilon\big)^{-1/2}.$$

Proposition B.

$$\left\langle \phi^{\epsilon,\kappa}_\alpha \,,\, \pi^{\epsilon,\kappa}\widetilde{H}^{\epsilon,\kappa}\pi^{\epsilon,\kappa}\phi^{\epsilon,\kappa}_\beta \right\rangle_{\mathscr{H}} = \widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(\alpha,\beta)\left\langle \phi^\epsilon_\alpha \,,\, \mathfrak{Op}^\epsilon(h_\circ)\phi^\epsilon_\beta\right\rangle_{\mathscr{H}} +$$

$$+\widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(\alpha,\beta)\left\langle \phi^\epsilon_\alpha \,,\, X^\epsilon\phi^\epsilon_\beta\right\rangle_{\mathscr{H}} + \mathscr{O}(\kappa\epsilon)$$

Soit $x^\epsilon \in S^{-\infty}(\Xi)$ tel que $X^\epsilon = \mathfrak{Op}^{A^\epsilon}(x^\epsilon)$.

La 'quasi'-fonction de Bloch magnétique.

Définissons:

$$\mathfrak{h}^\epsilon := h_\circ + x^\epsilon$$

$$k^\epsilon(\gamma) := \left\langle \phi^\epsilon_\gamma \,,\, \mathfrak{Op}^\epsilon(\mathfrak{h}^\epsilon)\phi^\epsilon_0 \right\rangle_{\mathcal{H}}$$

$$\lambda^\epsilon(\theta) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i<\theta,\gamma>} k^\epsilon(\gamma).$$

$$\mathscr{M}^{\epsilon,\kappa}(\alpha,\beta) := \Lambda^{\epsilon,\kappa}(\alpha,\beta) k^\epsilon(\alpha-\beta) = \left\langle \phi^{\epsilon,\kappa}_\alpha \,,\, \mathfrak{Op}^\epsilon(\mathfrak{h}^\epsilon)\phi^{\epsilon,\kappa}_\beta \right\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Proposition C.

La distance de Hausdorff entre les spectres de $\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(\lambda^\epsilon) \in \mathbb{B}(\mathcal{H})$ et l'opérateur hermitien associé à la matrice magnétique $\mathscr{M}^{\epsilon,\kappa}(\alpha,\beta)$ définie par $\pi^{\epsilon,\kappa}\mathcal{H}$ dans la base orthonormale $\{\phi^{\epsilon,\kappa}_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}$ est de l'ordre $\kappa\epsilon$.

On a démontré le point (3) du Théorème A.

Démonstration de la Proposition C.

Considerons les trois opérateurs unitaires suivants:

- $\mathscr{W}_\Gamma : L^2(\mathcal{X}) \to \ell^2(\Gamma) \otimes L^2(\mathcal{E}), \quad \big(\mathscr{W}_\Gamma u\big)(\gamma, \{x\}) := u(\gamma + \{x\})$.
- $\mathscr{U}_\epsilon \in \mathbb{U}\big(\ell^2(\Gamma) \otimes L^2(\mathcal{E})\big), \quad \big(\mathscr{U}_\epsilon \Phi\big)(\alpha, \{x\}) := \Lambda^\epsilon(\{x\}, \alpha)\Phi(\alpha, \{x\})$.
- $\mathscr{V}_{\epsilon,\kappa} \in \mathbb{U}\big(\ell^2(\Gamma) \otimes L^2(\mathcal{E})\big), \ \big(\mathscr{V}_{\epsilon,\kappa}\Phi\big)(\alpha, \{x\}) :=$
  $:= \widetilde{\Lambda}^{\epsilon,\kappa}(\alpha, \alpha + \{x\})\Phi(\alpha, \{x\})$.

et encore $\qquad \mathscr{W}^{\epsilon,\kappa} := \mathscr{V}_{\epsilon,\kappa}\mathscr{U}_\epsilon\mathscr{W}_\Gamma : L^2(\mathcal{X}) \to \ell^2(\Gamma) \otimes L^2(\mathcal{E})$.

L'opérateur $\mathscr{W}^{\epsilon,\kappa}\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(\lambda^\epsilon)(\mathscr{W}^{\epsilon,\kappa})^{-1}$
a le noyau intégral suivant

$$\mathfrak{K}^{\epsilon,\kappa}\big((\alpha, \{x\}), (\beta, \{y\})\big) =$$
$$\Lambda^{\epsilon,\kappa}(\alpha, \beta)\left(\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(\alpha, \alpha + \{x\}, \beta + \{x\})\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(\alpha, \beta + \{x\}, \beta)\right) k^\epsilon(\alpha - \beta)\delta_0(\{x\} - \{y\}).$$

$$\left|\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(\alpha, \alpha + \{x\}, \beta + \{x\}) - 1\right| \leq C\kappa\epsilon|\alpha - \beta|, \quad \left|\widetilde{\Omega}^{\epsilon,\kappa}(\alpha, \beta + \{x\}, \beta) - 1\right| \leq C\kappa\epsilon|\alpha - \beta|.$$

La 'quasi'-fonction de Bloch magnétique au voisinage de 0.

Proposition D.

Pour tout $b \in (0, \widetilde{b})$ il existe $\epsilon_0 > 0$ et $C > 0$ t.q.
$\forall \theta \in \Sigma_b$ et $\forall \epsilon \in [0, \epsilon_0]$:

$$|\lambdabar^{\epsilon}(\theta) - \lambda_0(\theta)| \leq C\,\epsilon.$$

Ça démontre les points (1)-(2) du Théorème A.

Démonstration de la Proposition D - 1.

Rappelons que:

$$\lambda^{\epsilon}(\theta) := \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i<\theta,\gamma>} \left\langle \phi^{\epsilon}_{\gamma}\,,\, \mathfrak{Op}^{\epsilon}(\mathfrak{h}^{\epsilon})\phi^{\epsilon}_{0}\right\rangle_{\mathcal{H}}\,,\ \mathfrak{h}^{\epsilon} = h_{\circ} + x^{\epsilon}.$$

Alors:

$$\lambda^{\epsilon}(\theta) - \langle\phi^{\epsilon}_{\gamma}, \mathfrak{Op}^{\epsilon}(h_{\circ})\phi^{\epsilon}_{0}\rangle_{\mathcal{H}}\Big) =$$

$$= \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i<\theta,\gamma>}\Big(\langle\phi^{\epsilon}_{\gamma}, \mathfrak{Op}^{\epsilon}(\mathfrak{h}^{\epsilon})\phi^{\epsilon}_{0}\rangle_{\mathcal{H}} - \langle\phi^{\epsilon}_{\gamma}, \mathfrak{Op}^{\epsilon}(h_{\circ})\phi^{\epsilon}_{0}\rangle_{\mathcal{H}}\Big) =$$

$$= \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i<\theta,\gamma>}\langle\tau_{\gamma}\psi_0, X\psi_0\rangle_{\mathcal{H}} + \mathscr{O}(\epsilon) = \widetilde{X}(\theta) + \mathscr{O}(\epsilon)$$

avec $Z := H^0\big(Y^{-1/2} - \mathbb{1}\big) + \big(Y^{-1/2} - \mathbb{1}\big)H^0 + \big(Y^{-1/2} - \mathbb{1}\big)H^0\big(Y^{-1/2} - \mathbb{1}\big)$

$$+Y^{-1/2}\pi H^0\pi^{\perp}R_{\perp}\pi^{\perp}H^0\pi Y^{-1/2} = \mathscr{V}_{\Gamma}^{-1}\left(\int^{\oplus}_{\mathbb{T}_*} d\theta\,\widetilde{Z}(\theta)\right)\mathscr{V}_{\Gamma}$$

$$Y = \pi H^0\pi^{\perp}R^2_{\perp}\pi^{\perp}H^0\pi = \mathscr{V}_{\Gamma}^{-1}\left(\int^{\oplus}_{\mathbb{T}_*} d\theta\,\widetilde{Y}(\theta)\right)\mathscr{V}_{\Gamma}$$

Démonstration de la Proposition D - 2.

Mais $\pi H^0 \pi^\perp = \mathscr{V}_\Gamma^{-1} \left(\int_{\mathbb{T}_*}^{\oplus} d\theta\, \widetilde{K}(\theta) \right) \mathscr{V}_\Gamma$
et pour tout $\theta \in \Sigma_b$ on a que:

$$\widetilde{K}(\theta) = |\hat{\phi}_0(\theta)\rangle\langle\hat{\phi}_0(\theta)| \Big(\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\theta) |\hat{\phi}_n(\theta)\rangle\langle\hat{\phi}_n(\theta)| \Big) \big(\mathbb{1} - |\hat{\phi}_0(\theta)\rangle\langle\hat{\phi}_0(\theta)| \big) = 0.$$

Donc $\widetilde{Y}(\theta) = \mathscr{O}(\epsilon),\ \forall\theta \in \Sigma_b$ et $\widetilde{X}(\theta) = \mathscr{O}(\epsilon),\ \forall\theta \in \Sigma_b$.

Finalement
$$\sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i<\theta,\gamma>} \left\langle \phi^\epsilon_\gamma \,,\, \mathfrak{Op}^\epsilon(h_\circ)\phi^\epsilon_0 \right\rangle_{\mathcal{H}} - \lambda_0(\theta) =$$
$$= \sum_{\gamma\in\Gamma} e^{-i<\theta,\gamma>} \left\langle \psi_\gamma \,,\, H^0 \psi_0 \right\rangle_{\mathcal{H}} - \lambda_0(\theta) + \mathscr{O}(\epsilon) =$$
$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda_n(\theta) \left| \left\langle \hat{\psi}_0(\theta) \,,\, \hat{\phi}_n(\theta) \right\rangle_{\mathscr{F}_\omega} \right|^2 - \lambda_0(\theta) + \mathscr{O}(\epsilon) =$$
$$= \mathscr{O}(\epsilon), \quad \forall\theta \in \Sigma_b.$$

Analyse spectrale de $\mathfrak{Op}^{A^{\epsilon,\kappa}}(\lambda^{\epsilon})$ en $d=2$ et B_ϵ lentement variable.

A partir d'ici $d=2$ **et** $A_\epsilon(x)=\epsilon^{-1}A(\epsilon x)$**. Donc** $B_\epsilon(x)=B(\epsilon x)$.

1. On va approcher le spectre de $\mathfrak{Op}^{A^{\epsilon,\kappa}}(\lambda^{\epsilon})$ par le spectre d'un hamiltonien Landau défini à l'aide de la Hessienne de la fonction λ^{ϵ} pres de son minimum absolu.
2. L'outil qu'on utilise pour le controle de l'ensemble resolvant est le symbole d'un inverse approché pour $\mathfrak{Op}^{A^{\epsilon},\kappa}(\lambda^{\epsilon})$.
3. L'analyse pseudodiffrentielle est basée sur le calcul avec des symboles a variation spatiale lente.

Symboles a variation lente.

Définition

Pour tout $(m,\rho) \in \mathbb{R} \times [0,1]$ et $\epsilon_0 > 0$, on dénote par $S^m_\rho(\Xi)^\bullet$ une famille de symboles $\{F^\epsilon\}_{\epsilon\in[0,\epsilon_0]}$ satisfaisant les propriétés suivantes:

1. $F^\epsilon \in S^m_\rho(\Xi)\,, \forall \epsilon \in [0,\epsilon_0]$;
2. $\exists \lim_{\epsilon\searrow 0} F^\epsilon := F^0 \in S^m_\rho(\Xi)$ dans la topologie de $S^m_\rho(\Xi)$;
3. $\forall (\alpha,\beta) \in \mathbb{N}^2 \times \mathbb{N}^2,\ \exists C_{\alpha\beta} > 0$ t.q.
$$\sup_{\epsilon\in(0,\epsilon_0]} \epsilon^{-|\alpha|} \left\| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F^\epsilon \right\|_\infty \leq C_{\alpha\beta}\,.$$

La topologie de $S^m_\rho(\Xi)^\bullet$ est définie par les semi-normes:

$$F^\bullet \mapsto \tilde{\nu}^{m,\rho}_{p,q}(F^\bullet) := \sup_{\epsilon\in[0,\epsilon_0]} \epsilon^{-p} \sum_{|\alpha|=p} \sum_{|\beta|=q} \sup_{(x,\xi)\in\Xi} <\xi>^{-(m-q\rho)} \left| \left(\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta F^\epsilon\right)(x,\xi) \right|$$

avec $(p,q) \in \mathbb{N}^2$.

Symboles a variation lente.

Definissons $\widetilde{F}^\epsilon(x,\xi) := F^\epsilon(\epsilon^{-1}x,\xi)$

Remarque

$\{F^\epsilon\}_{\epsilon\in[0,\epsilon_0]} \subset S^m_\rho(\Xi)$ appartient à $S^m_\rho(\Xi)^\bullet$ si et seulement si on a que

$$F^\epsilon(x,\xi) = \widetilde{F}^\epsilon(\epsilon x,\xi)$$

pour un ensemble borné

$$\{\widetilde{F}^\epsilon\}_{\epsilon\in[0,\epsilon_0]} \subset S^m_\rho(\Xi)$$

t.q.

$$\exists \lim_{\epsilon\searrow 0} \widetilde{F}^\epsilon(0,\cdot) := F^0 \in S^m_\rho(\Xi) \bigcap C^\infty_{\text{pol}}(\mathcal{X}^*).$$

Symboles a variation lente.

Considerons $B_{\epsilon,\kappa}(x) = \epsilon B_0 + \kappa\epsilon B(\epsilon x)$.

Proposition

Si $f^\bullet \in S^m_\rho(\Xi)^\bullet$ et $g^\bullet \in S^p_\rho(\Xi)^\bullet$, alors $\{f^\epsilon \sharp^{B_{\epsilon,\kappa}} g^\epsilon\}_{\epsilon\in[0,\epsilon_0]}$ appartient à $S^{m+p}_\rho(\Xi)^\bullet$ uniformément par rapport à $\kappa \in [0,1]$.

Proposition

Si $f^\bullet \in S^m_\rho(\Xi)^\bullet$ et si l'inverse $(f^\epsilon)^- \equiv (f^\epsilon)^-_{B_{\epsilon,\kappa}} \in S^{-m}_\rho(\Xi)$ existe pour tout $\epsilon \in [0,\epsilon_0]$, alors $\{(f^\epsilon)^-\}_{\epsilon\in[0,\epsilon_0]} \in S^{-m}_\rho(\Xi)^\bullet$.

Etude de $\lambda\!\!\!-^{\epsilon}$.

Proposition

Il existe $\epsilon_0 > 0, b \in (0, \widetilde{b}]$ et pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ il existe $\rho^\epsilon \in BC^\infty(\mathbb{T}_*)$ uniformement par rapport à $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$ t.q.

$$\forall \theta \in \Sigma_b : \quad \lambda\!\!\!-^{\epsilon}(\theta) = \lambda_0(\theta) + \epsilon \rho^\epsilon(\theta), \quad \rho^\epsilon(\theta) - \rho^0(\theta) = \mathscr{O}(\epsilon).$$

- Il suit que considerant λ_ϵ comme fonction Γ_*-periodique sur $\mathcal{X}^*$, pour $\epsilon > 0$ assez petit, elle va aussi avoir un minimum absolu non-dégénéré $\theta^\epsilon \in \mathcal{X}^*$ voisin à $0 \in \mathcal{X}^*$.
- $\exists \epsilon_0 > 0$ t.q. pour tout $\epsilon \in [0, \epsilon_0]$, on peut choisir un système de coordonnées sur un voisinage de $\theta^\epsilon \in \mathcal{X}^*$ qui diagonalise la matrice (positive définie) de la Hessienne a^ϵ de $\lambda\!\!\!-^{\epsilon}$. On dénote par $0 < m_1^\epsilon \leq m_2^\epsilon$ ses valeurs propres.
- On dénote par $0 < m_1 \leq m_2$ les deux valeurs propres de la matrice Hessienne a_{jk} de λ_0 dans 0.

$$m_j^\epsilon = m_j + \epsilon\mu_j + \mathscr{O}(\epsilon^2) \text{ pour } j = 1, 2\,,$$

- On se propose de comparer les parties inférieures des spectres de $\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(\lambda^\epsilon)$ et de $\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(h_{m^\epsilon})$ où:

$$h_{m^\epsilon}(\xi) := m_1^\epsilon\xi_1^2 + m_2^\epsilon\xi_2^2,$$

defini un symbole elliptique de classe $S_1^2(\Xi)$ qui est constant sur $\mathcal{X}$.

- En ce qui concerne le spectre de $\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(h_{m^\epsilon})$ on le compare avec celui du hamiltonien de Landau en champ magnétique constant $\mathfrak{Op}^{\epsilon,0}(h_{m^\epsilon})$ et on obtient que:

Proposition

Pour tout compacte M dans $\mathbb{R}$, ils existent $\epsilon_K > 0\,,\ C > 0$ et $\kappa_K \in (0, 1]\,$, t.q. pour tout $(\epsilon, \kappa) \in [0, \epsilon_K] \times [0, \kappa_K]\,$, le spectre de $\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(h_{m^\epsilon})$ dans la region ϵM est contenu dans des bandes de largeur $C\kappa\epsilon$ centrées sur les niveaux de Landau $\{(2n + 1)\,\epsilon\, m^\epsilon\, B_0\}_{n\in\mathbb{N}}\,$.

Localisation autour du minimum.

- Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ une fonction paire et t.q. $0 \leq \chi \leq 1$, supp $\chi \subset (-2, +2)$ et $\chi(t) = 1$ pour $t \in [-1, +1]$.
- Pour $\delta > 0$ définissons $g_{1/\delta}(\xi) := \chi\big(h_{m^\epsilon}(\delta^{-1}\xi)\big), \quad \forall \xi \in \mathcal{X}^*$.
- Soit δ^0 t.q. $D(0, \sqrt{2m_1^{-1}\delta^0}) \subset \overset{\circ}{E}_*$ où on dénote par $D(0, \rho)$ le disque de rayon $\rho > 0$ centré en $0 \in \overset{\circ}{E}_*$ (l'intérieur de E_*).
- Pour tout $\delta \in (0, \delta_0]$ on a que $g_{1/\delta} \in C_0^\infty(E_*)$. On peut le prolonger par 0 et le considérer comme élément de $C_0^\infty(\mathcal{X}^*)$.
- A chaque $\delta \in (0, \delta_0]$ on associe $\delta^\circ := \sqrt{m_1/2m_2}\,\delta$ verifiant $g_{1/\delta^\circ} = g_{1/\delta}\, g_{1/\delta^\circ}$.

Pour tout $\delta \in (0, \delta_0]$ on peut définir:

$$\widetilde{g}_{1/\delta}(\xi) := \sum_{\gamma \in \Gamma^*} g_{1/\delta}(\xi - \gamma),$$

la continuation Γ_*-*periodique* de $g_{1/\delta}$ à $\mathcal{X}^*$.

Une localisation ϵ-dépendente.

Hypothèse:

$$\epsilon = \delta^{\mu}\,,\ \text{avec } \mu \in (2,3).$$

Cette hypothèse implique le comportement suivant près du minimum suposé être en $0 \in E_*$:

$$\lambda^{\epsilon}(\xi) g_{1/\delta}(\xi) = g_{1/\delta}(\xi)\, h_{m^\epsilon}(\xi) + \mathcal{O}(\delta^3), \quad \text{avec } \delta^3 \ll \epsilon.$$

En dehors du voisinage du minimum on va utiliser l'estimation suivante:

Proposition

$\exists \epsilon_0 > 0$ t.q. pour $(\epsilon, \kappa, \delta) \in [0, \epsilon_0] \times [0,1] \times (0, \delta_0]$, $\exists C'(\epsilon, \delta) > 0$ t.q.:

$$\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}\big(\lambda^{\epsilon} + (\delta^{\circ})^2\, \widetilde{g}_{1/\delta^{\circ}}\big) \geq \big(C'\,\delta^2 - C'(\epsilon,\delta)\,\epsilon\big)\ \mathbb{1}.$$

Le symbole du 'quasi-inverse'.

- Soit $\mu = 2,5 \in (2,3)$ et un compacte $K \subset \mathbb{C}$ t.q.:

$$K \subset \mathbb{C} \setminus \{(2n+1)m\,B_0\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

- Ils existent $\epsilon_K > 0$ et $\kappa_K \in [0,1]$ t.q. pour tout $(\epsilon, \kappa) \in [0, \epsilon_K] \times [0, \kappa_K]$ et tout $a \in K$, le nombre $\epsilon a \in \mathbb{C}$ appartient à l'ensemble résolvant de $\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(h_{m^\epsilon})$.
- Soit $r^{\epsilon,\kappa}(\epsilon a) \in S^{-2}_1(\Xi)$ t.q. $\big(\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(h_{m^\epsilon}) - \epsilon a\big)^{-1} = \mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}\big(r^{\epsilon,\kappa}(\epsilon a)\big)$.

Le 'quasi-inverse'

Pour $a \in K$ on définit la distribution de $\mathscr{S}'(\mathcal{X}^*)$ donnée par:

$$\widetilde{r}_\lambda(\epsilon a) := \sum_{\gamma^* \in \Gamma_*} \mathcal{T}_{\gamma^*}\big(g_{1/\delta}\ \sharp^{\epsilon,\kappa}\ r^{\epsilon,\kappa}(\epsilon a)\big) + \big(1 - \widetilde{g}_{1/\delta}\big)\ \sharp^{\epsilon,\kappa}\ r_{\delta,\epsilon,\kappa}(\epsilon a)\,, \quad \delta = \epsilon^{1/\mu}.$$

L'opérateur 'quasi-inverse'.

Proposition

- Une fois choisis μ et K comme plus haut, ile existent $C > 0$, $\kappa_0 \in (0,1]$ et $\epsilon_0 > 0$ t.q. pour $(\kappa, \epsilon, a) \in [0, \kappa_0] \times (0, \epsilon_0] \times K$, le symbole $\widetilde{r}_\lambda(\epsilon a)$ définit un élément de $S^{-2}_1(\Xi)$ qui vérifie l'égalité:

$$\big(\lambda_\epsilon - \epsilon a\big) \sharp^{\epsilon,\kappa} \widetilde{r}_\lambda(\epsilon a) \;=\; 1 + \mathfrak{r}_{\delta,a}$$

  avec les estimations:

$$\|\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(\widetilde{r}_\lambda(\epsilon a))\| \leq C\epsilon^{-1}, \quad \|\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(\mathfrak{r}_{\delta,a})\| \;\leq\; C\;\epsilon^{2/5}.$$

- Pour tout $N > 0$, ils existent C, ϵ_0 et κ_0 t.q. le spectre de $\mathfrak{Op}^{\epsilon,\kappa}(\lambda_\epsilon)$ contenu dans $[0, (2N+2)mB_0\epsilon]$ est contenu dans des bandes centrées autour des points $(2n+1)mB_0\epsilon$, $0 \leq n \leq N$, et ayant une largeur plus petite que $C\,(\epsilon\kappa + \epsilon^{7/5})$.

Merci pour votre attention!