



INSTITUTUL DE MATEMATICA
"SIMION STOILOW"
AL ACADEMIEI ROMANE



CENTRE FRANCOPHONE
EN MATHÉMATIQUES
BUCAREST

ECOMath

Atelier de travail en Stochastique et EDP 14, 15 Septembre 2018, Bucarest, Roumanie

Conférenciers Invités:

Lucian Beznea (Bucarest)

Victor-Emmanuel Brunel (Cambridge, Massachusetts)

Iulian Cîmpean (Bucarest)

Mădălina Deaconu (Nancy)

Samuel Herrmann (Dijon)

Antoine Lejay (Nancy)

Carlo Marinelli (Londres)

Mihai N. Pascu (Braşov)

Ionel Popescu (Atlanta et Bucarest)

Oana Stamate (Bucarest)

Aurel Răşcanu (Iaşi)

Anton Thalmaier (Luxembourg)

Julian Tugaut (Saint Etienne)

Atelier de travail organisé dans le cadre du
Centre Francophone en Mathématiques Bucarest et GDRI ECO-Math,
par l'Institut de Mathématique "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine,
avec le support partiel de Bitdefender

L'atelier commencera vendredi, le 14 septembre 2018, à 09:00,
à l'Institut de Mathématique "Simion Stoilow", Amfiteatrul "Miron Nicolescu"

Atelier de travail en Stochastique et EDP 14, 15 Septembre 2018, Bucarest, Roumanie

à l'Institut de Mathématique "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine, Amfiteatrul "Miron Nicolescu"

| Vendredi, le 14 septembre 2018 | | Samedi, le 15 septembre 2018 | |
|-------------------------------------|--------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 09:00-09:50 | Madalina Deaconu | 09:00-09:50 | Victor-Emmanuel Brunel |
| 09:50-10:40 | Anton Thalmaier <i>Café</i> | 09:50-10:40 | Julian Tugaut <i>Café</i> |
| 11:00-11:50 | Samuel Herrmann | 11:00-11:30 | Oana Stamate |
| 11:50-12:40 | Antoine Lejay | 11:30-12:00 | Iulian Cimpean |
| <i>Déjeuner</i> | | 12:00-12:30 | Lucian Beznea |
| 14:30-15:20 | Carlo Marinelli | 12:30-13:00 | Ionel Popescu |
| <i>Café</i> | | <i>Déjeuner</i> | |
| 15:40-16:30 | Aurel Rascanu | | |
| 16:30-17:20 | Mihai N. Pascu | | |
| 19:00 <i>Dîner de la conférence</i> | | | |

Liste des exposés

- Lucian Beznea** : Fonctions invariantes, super et quasi-martingales d'un processus de Markov
Victor-Emmanuel Brunel : Concentration des ensemble de niveaux de la profondeur de Tukey
Iulian Cimpean : Fonctionnelles quasi-martingales et leurs décompositions Doob-Meyer
Madalina Deaconu : Risque de couverture des options dans un marché financier avec actif suivant un modèle exponentiel-Lévy - minimisation de la CVaR
Samuel Herrmann : Simulation du temps nécessaire au mouvement brownien pour sortir d'un domaine bornée
Antoine Lejay : Simulation des processus en milieux discontinus
Carlo Marinelli : Sur une classe d'EDP monotones stochastiques avec bruit semimartingale
Mihai N. Pascu : Une nouvelle tentative d'attaquer la conjecture "Hot Spots": couplage à distance fixe du MBR et mesure harmonique itérée
Ionel Popescu : From classical inequalities to free inequalities and back to classical inequalities
Aurel Rascanu : EDSR multivoques: L_p - formulation faible variationnelle ($1 < p < 2$)
Oana Stamate : Mouvement de Rosenblatt Laplace
Anton Thalmaier : Brownian motion, gradient estimates and Ricci flow
Julian Tugaut : Bassins d'attraction pour l'équation des milieux granulaires

Atelier de travail en Stochastique et EDP

Bucarest, Septembre 14, 15, 2018

RÉSUMÉS

FONCTIONS INVARIANTES, SUPER ET QUASI-MARTINGALES D'UN PROCESSUS DE MARKOV

Lucian Beznea (Bucarest, e-mail: lucian.beznea@imar.ro)

On identifie l'espace linéaire engendré par les fonctions excessives d'un processus de Markov avec l'ensemble des fonctions quasimartingales lorsque on les compose avec le processus. On donne des applications aux formes de semi-Dirichlet. On fournit un résultat unificateur qui clarifie les relations entre les fonctions harmoniques, co-harmoniques, invariantes, co-invariantes, martingales et co-martingales, en montrant que dans le cas conservatif elles sont toutes les mêmes. D'après des travaux communs avec Iulian Cîmpean (Bucarest) et Michael Röckner (Bielefeld).

CONCENTRATION DES ENSEMBLE DE NIVEAUX DE LA PROFONDEUR DE TUKEY

Victor-Emmanuel Brunel (Cambridge, Massachusetts, email: vebrunel@mit.edu)

La profondeur de Tukey est un outil important en statistique multivariée, car elle généralise la notion de quantiles en dimension quelconque. Dans cet exposé, nous nous intéressons aux ensembles de niveau de la profondeur de Tukey, que l'on peut voir comme des ensembles quantiles multivariés. L'enveloppe convexe de points aléatoires dans l'espace Euclidien en est un exemple. Nous montrons que pour un niveau donné, l'ensemble de niveau empirique associé à un échantillon de n points iid se concentre, en distance de Hausdorff, autour de l'ensemble de niveau théorique correspondant, à une vitesse qui ne dépend pas de la dimension de l'espace ambiant. Les outils essentiels à la preuve de ce résultat proviennent de la programmation linéaire semi-infinie et de la théorie des processus empiriques.

QUASI-MARTINGALE FUNCTIONALS AND THEIR DOOB-MEYER DECOMPOSITIONS

[FONCTIONELLES QUASI-MARTINGALES ET LEURS DÉCOMPOSITIONS DOOB-MEYER]

Iulian Cîmpean (Bucarest, e-mail: iulian.cimpean@imar.ro)

In the theory of Dirichlet forms, Fukushima decomposition is crucial for developing a nice stochastic calculus with respect to the associated Markov process, which for example can be employed to pass from martingale problems to associated S(P)DEs in both finite and infinite dimensions. However, this decomposition is not completely understood in general, like in the case of non-sectorial semi-Dirichlet forms, and our aim is to show that a recently developed quasimartingale technique can be used to tackle the general situation. Joint work with L. Beznea.

RISQUE DE COUVERTURE DES OPTIONS DANS UN MARCHÉ FINANCIER AVEC ACTIF SUIVANT UN MODÈLE EXPONENTIEL-LÉVY - MINIMISATION DE LA CVAR

Mădălina Deaconu (Nancy, e-mail: madalina.deaconu@inria.fr)

Nous étudions dans cet exposé la couverture des options sous une contrainte budgétaire sur le capital initial, dans un marché incomplet. L'actif sous-jacent est modélisé par un processus stochastique de type exponentiel-Lévy. Pour mesurer le risque de couverture nous considérons la CVaR en cherchant la CVaR minimale sous l'ensemble des stratégies auto-financées. Nous construisons une approximation de la CVaR minimale fondée sur la relaxation de la contrainte du problème dual. Nous illustrons numériquement les résultats par des techniques d'inversion de Fourier sur le modèle de Merton. Ces résultats sont issus d'un travail en collaboration avec A. Lejay (Inria Nancy et IECL) et K. Salhi (Natixis / Ingeniance Paris).

SIMULATION DU TEMPS NÉCESSAIRE AU MOUVEMENT BROWNIEN POUR SORTIR D'UN DOMAINE BORNÉ

Samuel Herrmann (Dijon, e-mail: samuel.herrmann@u-bourgogne.fr)

Tout d'abord je présenterai différentes méthodes de simulation des premiers temps de passage (FPT) à travers une frontière curviligne pour le mouvement brownien unidimensionnel et étendrai les résultats liés au mouvement brownien à d'autres processus de diffusion unidimensionnels. L'intérêt majeur de ces méthodes est d'éviter à la fois l'utilisation de schémas de discrétisation temporelle et les méthodes d'inversion de séries numériques. Les algorithmes présentés reposent soit sur une procédure itérative soit sur une méthode de rejet. La seconde partie de l'exposé concernera le problème multidimensionnel: la simulation du temps nécessaire au mouvement brownien pour quitter un domaine borné d-dimensionnel. Je présenterai

un schéma numérique particulièrement efficace pour l'approximation du temps de sortie ainsi qu'une application au problème aux limites pour l'équation de la chaleur. C'est un travail en collaboration avec M. Deaconu (INRIA), S. Maire (Université de Toulon), E. Tanré (INRIA), C. Zucca (Université de Turin).

SIMULATION DES PROCESSUS EN MILIEUX DISCONTINUS

Antoine Lejay (Nancy, e-mail: Antoine.Lejay@univ-lorraine.fr)

De nombreux défis sont encore posés par la compréhension et la simulation des processus de diffusion associés à des équations aux dérivées partielles dont les coefficients présentent des discontinuités.

D'une part, la structure de telles processus reste encore à exhiber dans de nombreux cas de figure, bien qu'en dimension un, la situation soit maintenant bien comprise. Dans ce cadre, ces diffusions forment une sous-classe de solutions différentielles stochastiques faisant intervenir le temps local. D'autre part, connaître la structure de ces diffusions ne donne pas nécessairement des moyens de les simulations de façon simple. Il convient de trouver ainsi des représentations qui sont utilisables pour discrétiser le processus.

Dans cet exposé, nous présenterons des résultats récents concernant la modélisation du milieu à coefficients discontinus faisant intervenir un opérateur sous forme divergence ou sous forme non-divergence et des interfaces modélisées par des barrières perméables ou semi-perméables.

D'après des travaux communs avec Lionel Lenôtre (Nancy), et Géraldine Pichot (Paris).

SUR UNE CLASSE D'EDP MONOTONE STOCHASTIQUE AVEC BRUIT SEMIMARTINGALE

Carlo Marinelli (Londres, e-mail: cm1310@gmail.com)

On obtient l'existence et l'unicité de solutions fortes pour une classe de équations d'évolution stochastiques semilinéaires avec semimartingale directrice Hilbertienne et dérive donnée par la somme d'un opérateur maximal monotone linéaire et d'un opérateur de superposition associé à un fonction monotone (aléatoire et dépendent du temps) définie sur toute la droite réelle. On suppose seulement que cette fonction vérifie une condition de symétrie très faible, mais son croissance à l'infini peut être arbitraire. La solution est obtenue par des estimations *a priori* sur les solutions à des équations régularisées, interprétées à la fois comme des équations stochastiques ainsi que des équations déterministes à coefficients aléatoires, et par des propriétés de compacité convenables. Un rôle essentiel est joué par un inégalité maximale due à Métivier et Pellaumail.

UNE NOUVELLE TENTATIVE D'ATTAQUER LA CONJECTURE DE "HOT SPOTS": COUPLAGE À DISTANCE FIXE DU MBR ET MESURE HARMONIQUE ITÉRÉE

Mihai N. Pascu (Braşov, e-mail: mihai.pascu@unitbv.ro)

Dans cet exposé on présentera deux nouvelles idées, l'objectif étant la résolution de la conjecture de "Hot Spots" de J. Rauch (un principe de maximum pour la deuxième fonction propre de Neumann pour le Laplacien sur un domaine convexe borné).

L'idée principale est suggérée par un résultat précédent de l'auteur [JFA 11], dans lequel on a prouvé certaines inégalités concernant l'élément diagonal $p_{\mathbb{U}}(t, x, x)$ du noyau Neumann de la chaleur, dans le disque unité. À son tour, cela a permis de résoudre une autre conjecture (la monotonie radiale de $p_{\mathbb{U}}(t, x, x)$, c.a.d. la conjecture de Laugesen-Morpurgo), ce qui implique la conjecture de "Hot Spots".

Inspiré par ces résultats, on a l'intention de dériver une limite pour la diagonale du noyau de chaleur de Neumann sur un domaine D convexe général. La première idée est de construire un couplage "à distance fixé" de RBM (voir les résultats avec I. Popescu dans les papiers [JTP 18] et [SPA 16], où on a démontré que cela est possible pour le BM sur des variétés sans frontière, en satisfaisant certaines conditions supplémentaires). À son tour, cela donnera une représentation pour l'élément diagonal du noyau de la chaleur $p_{\mathbb{U}}(t, x, x)$.

Dans la construction du couplage qu'on a envisagé, la distance entre les deux BM est fixée (sauf pour les moments où ils sont proches de la frontière), et l'angle du vecteur formé par eux est variable. Cet angle ne peut changer que lors de la réflexion à la frontière se produit, ce qui conduira à envisager une extension de la mesure harmonique classique (on a introduit le terme *mesure harmonique itérée*), c'est la deuxième idée on parlera.

On espère que les "bonnes" propriétés de la monotonie de cette mesure, combinée avec la borne de $p_D(t, x, x)$ conduiront à une conjecture généralisée de Laugesen-Morpurgo pour un domaine convexe, ce qui implique la conjecture de "Hot Spots". D'après des travaux communs avec I. Popescu (résultats partiels).

FROM CLASSICAL INEQUALITIES TO FREE INEQUALITIES AND BACK TO CLASSICAL INEQUALITIES

[PASSER DES INÉGALITÉS CLASSIQUES AUX INÉGALITÉS LIBRES ET REVENIR AUX INÉGALITÉS CLASSIQUES]

Ionel Popescu (Atlanta et Bucarest, e-mail: ioionel@gmail.com)

We will show how classical inequalities combined with random matrix leads to free inequalities. Used in combinations with unitary matrices one gets some inequalities on the circle. However here there are some interesting new phenomena as opposed to the case of inequalities on the line. More precisely the fact that the circle acts on itself manifests in the inequalities obtained. Motivated by this we will conjecture some inequalities in the classical case and we give some evidence for them.

EDSR MULTIVOQUES: L^p - FORMULATION FAIBLE VARIATIONNELLE ($1 < p < 2$)

Aurel Răşcanu (Iaşi, e-mail: aurel.rascanu@uaic.ro)

Considérons l'équation différentielle stochastique rétrograde multivoque :

$$\begin{cases} Y_t + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} dK_s = \eta + \int_{t \wedge \tau}^{\tau} H(s, Y_s, Z_s) dQ_s - \int_{t \wedge \tau}^{\tau} Z_s dB_s, \text{ a.s., } t \geq 0, \\ dK_s \in \partial_y \Psi(s, Y_s) dQ_s = \partial \varphi(Y_t) dt + \partial \psi(Y_t) dA_t, \text{ on } [0, \infty), \end{cases} \quad (0.1)$$

où $\partial \varphi$ et $\partial \psi$ sont les sous-différentielles de deux fonctions semi-continues inférieurement convexes positives φ et ψ respectivement, $Q_t = t + A_t$, $\{A_t\}_{t \geq 0}$ est un processus stochastique continu progressivement mesurable et τ est un temps d'arrêt. La variable aléatoire $\eta : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^m$ est \mathcal{F}_τ -mesurable tel que $\mathbb{E}|\eta|^p < \infty$. On suppose des hypothèses standard sur $H(s, Y_s, Z_s) dQ_s = F(s, Y_s, Z_s) ds + G(s, Y_s) dA_s$ (i.e.: monotonie par rapport à y et Lipschitz par rapport à z). Suite à la définition de la sous-différentielle, les équations (0.1) s'appellent aussi inéquations différentielles stochastiques rétrogrades (IVSR).

Dans le cas $p \geq 2$, les IVSR (0.1) ont été étudiés par Maticiuc & Răşcanu dans l'article *Backward Stochastic Variational Inequalities on Random Interval* (Inégalités variationnelles stochastiques rétrogrades sur l'intervalle aléatoire), Bernoulli 21 1166–1199,(2015), en utilisant une pénalisation de Moreau-Yosida pour les opérateurs sous-différentiels; une solution forte est obtenue (même dans le cadre des espaces d'Hilbert) qui est un triplet (Y, Z, K) avec K un processus stochastique continue à variation bornée satisfaisant (0.1).

Dans le cas de $p \in (1, 2)$, nous avons été contraints d'introduire une formulation faible de la solution, car nous n'avons pas d'estimation pour obtenir un processus stochastique K à variation bornée. La formule d'Itô pour $(|M_t - Y_t|^2 + \delta)^{p/2}$ avec M une semimartingale de la forme

$$M_t = \gamma - \int_0^t N_r dQ_r + \int_0^t R_r dB_r$$

et l'inégalité sous-différentielle

$$\langle M_s - Y_s, dK_s \rangle \leq [\Psi(s, M_s) - \Psi(s, Y_s)] dQ_s$$

produit une inégalité pour (Y, Z) satisfaite pour tout M ; cette inégalité sera prise comme la définition de la solution faible variationnelle dans une formulation adaptée à l'espace L^p . L'existence et l'unicité de cette solution faible variationnelle (Y, Z) sont prouvées.

Les résultats seront publiés dans un travail conjoint avec **Lucian Maticiuc**.

MOUVEMENT DE ROSENBLATT LAPLACE

Oana Stamate (Bucarest, e-mail: oana.lupascu@yahoo.com)

On donne quelques propriétés d'une transformation aléatoire du temps d'un processus stochastique dans le deuxième chaos de Wiener. Cette modification est obtenue en subordonnant par un processus stochastique à valeur réelle et positives, avec des incréments indépendants et stationnaires. En particulier, on étudie le mouvement de Rosenblatt Laplace obtenu par subordination d'un processus de Rosenblatt à un processus de Gamma. D'après un travail commun avec C. Tudor.

MOUVEMENT BROWNIEN, ESTIMÉS DU GRADIENT ET FLOT DE RICCI

Anton Thalmaier (Luxembourg, e-mail: anton.thalmaier@uni.lu)

Nous discuterons des travaux récents caractérisant la courbure de Ricci et le flot de Ricci sur des variétés en termes d'inégalités fonctionnelles pour des semi-groupes de chaleur. L'observation que la courbure de Ricci bornée sur une variété Riemannienne contrôle l'analyse sur l'espace des chemins, de manière analogue à comment les bornes inférieures de la courbure de Ricci contrôlent l'analyse de la variété, a donné un nouvel élan au sujet. Les inégalités fonctionnelles permettent en particulier de caractériser les variétés d'Einstein et les solitons de Ricci. La présentation inclura des extensions de ces méthodes aux variétés évoluant sous des flots géométriques.

BASSINS D'ATTRACTION POUR L'ÉQUATION DES MILIEUX GRANULAIRES

Julian Tugaut (Saint Etienne, e-mail: tugaut@math.cnrs.fr)

Dans cet exposé, nous donnons des résultats désormais classiques pour un exemple typique de l'équation des milieux granulaires: la non-unicité des probabilités invariantes et la convergence en temps long vers l'une de ces trois mesures. Ensuite, nous fournissons des conditions suffisantes assurant que la solution de l'équation des milieux granulaires converge vers la probabilité invariante avec une espérance strictement positive.