Rapport de stage de l'année 2017 pour le Centre Francophone en Mathématiques

Béthencourt Loïc

Elève ingénieur Ecole Centrale de Lyon

Tuteur à l'IMAR : Cimpean Iulian

Ce document est un court rapport des activités effectuées au cours de l'année 2017 dans le cadre du stage effectué à l'Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine (IMAR). Le stage ayant commencé le 1er Décembre 2017, ce rapport explique ce qui a été fait lors de ce premier mois de stage et il est donc à mettre en lien avec le rapport qui sera rendu pour l'année 2018.

1 - Problème étudié

Nous avons choisi avec mon tuteur Iulian de travailler sur le problème de filtrage. Ce problème est un problème très bien connu, qui a fait l'objet de nombreuses études depuis longtemps et qui connaît aussi de nombreuses applications. Ce sujet étant complètement inconnu pour moi, la première chose fut donc, avec des articles et livres recommandés par mon tuteur, de me documenter sur ce dernier. Voici la liste de ma documentation initiale :

- [1] Bayesian Filtering and Smoothing – Simo Särkkä
- [2] A Tutorial on Particle Filters for Online Nonlinear/Non-Gaussian Bayesian Tracking – Sanjev Arulampalam, Simon Maskell, Neil Gordon and Tim Clapp
- [3] A Tutorial on Particle Filtering and Smoothing : Fifteen years later – Arnaud Doucet, Adam M. Johansen

Le but de mes recherches était de se focaliser sur une application de filtrage précise, et d'essayer d'améliorer les performances d'un filtre sur ce problème, plutôt que d'essayer de s'attaquer au problème de filtrage dans son entièreté. J'ai donc choisi de travailler sur le « tracking problem », qui cherche à localiser une cible mouvante (ou plusieurs), à partir d'observations qu'on a de cette (ces) dernière(s). Ce problème a été l'objet d'énormément d'articles et de recherches, il y a donc de la matière dessus. Je me suis surtout appuyé sur le papier suivant qui explique entre autres, le problème de tracking, et donne de réelles applications à ce dernier :

[4] Particle Filters for Positioning, Navigation and Tracking – Gustafsson, Gunnarsson, Bergman, Forssell, Jansson, Karlsson, Nordlund

Enfin, je cite ce dernier papier qui est l'article à l'orgine du « Resample Move » :

[5] Following a moving target – Monte Carlo inference for dynamic Bayesian models – Walter R. Gilks and Carlo Berzuini

2 – Filtrage Bayésien

Je vais essayer de présenter succinctement dans cette partie ce que j'ai appris de mes lectures, ce qui correspond principalement au travail que j'ai effectué pendant ce mois de Décembre. Le problème est le suivant : étant donnée une suite de signaux et d'observations soumise à une dynamique et des perturbations aléatoires, comment à partir des observations estimer au mieux le signal. Mathématiquement, cela se modélise par une équation d'états, comme suivant :

$$\begin{cases} x_k = f_k(x_{k-1}, v_{k-1}) \\ y_k = g_k(x_k, w_k) \end{cases}$$

Où x_k est le signal, y_k l'observation, v_k et w_k sont des bruits aléatoires. Le modèle est markovien dans le sens où :

$$\begin{cases} p(x_k | x_{1:k-1}, y_{1:k-1}) = p(x_k | x_{k-1}) \\ p(y_k | x_{1:k}, y_{1:k-1}) = p(y_k | x_k) \end{cases}$$

Le but est donc d'estimer la densité suivante : $p(x_k | y_{1:k})$ pour tout k. Je vais dans la suite expliquer et vulgariser les algorithmes principaux permettant d'estimer cette densité.

- Dans le cas linéaire et gaussien, on peut dériver un filtre optimal dans le sens où il minimise l'erreur au carré. C'est le fameux **filtre de Kalman**.
- Si l'équation d'états n'est pas linéaire, on peut toujours la linéariser et ensuite appliquer le filtre de Kalman. C'est ce que font les filtres suivants : **Extended Kalman Filter** et **Unscented Kalman Filter**.
- **L'algorithme SIS** (Sequential Importance Sampling). Cet algorithme fait partie de la catégorie des filtres particulaires dans le sens où ils sont basés sur la méthode de Monte Carlo. Cette méthode permet de représenter une distribution par une somme de diracs concentrés en des points (particules) échantillonnés de la distribution cible. Ici, nous ne connaissons pas cette distribution, l'algorithme SIS consiste à échantillonner ces points grâce à une densité alternative, et d'assigner à chaque particule des poids, et ce, de manière récursive. La densité alternative en question est très importante, et il existe de manière théorique une densité alternative optimale. Malheureusement, cette dernière n'est tout le temps connu selon les modèles.
- L'algorithme précédent souffre d'un problème de dégénérescence. En effet la variance des poids augmente avec le temps, et donc après quelques itérations, tout le poids se concentre dans quelques particules. Pour remédier à ce problème, **l'algorithme SIR** (Sequential Importance Resampling) ajoute une étape de rééchantillonage qui permet d'avoir des particules censées être distribuées selon la densité cible, et des poids égaux, et donc de ne plus avoir de problème de dégénérescence. Les particules ayant un faible poids avant le rééchantillonnage ont peu de chance d'être encore présentes après. Par conséquence, le « resampling step » fait perdre de la diversité aux particules (sample impoverishment), c'est l'inconvénient majeur de cette méthode.
- Pour remédier à cette perte de diversité, on peut appliquer aux particules le « Resample move » [5], qui est simplement un algorithme MCMC (Markov Chain Monte Carlo) ayant pour mesure invariante, la mesure associée à la densité cible.

- Enfin, il existe aussi des filtres ne s'appuyant que sur des méthodes MCMC, utilisant principalement l'algorithme de Metropolis Hastings, assurant que l'algorithme converge bien vers la distribution cible.

Il faut garder à l'esprit que ces algorithmes ont pour but d'avoir des applications réelles et qu'ils doivent donc pouvoir « tourner » en temps réels. Pour les filtres particulaires, il faut qu'ils soient le plus précis possible, avec le moins de particules possibles. Leur avantage est qu'on peut les paralléliser pour la plupart (sauf l'étape de rééchantillonnage), néanmoins si le problème possède beaucoup de dimensions, le nombre de particules nécessaire explose.

3 – Simulation

Ce premier mois de stage a été aussi le mois de mes premières simulations. Tout d'abord, pour se faire la main, j'ai simulé sur Python des exemples basiques comme la marche aléatoire gaussienne ou le « pendulum tracking », exemples que l'on peut retrouver dans le livre [1]. Enfin j'ai eu le temps d'implémenter le « tracking problem », dont la dynamique est simplement dérivée des lois de Newton [4].

$$x_k = \begin{pmatrix} p_k \\ v_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I & T.I \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_{k-1} \\ v_{k-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{T^2}{2}.I \\ T.I \end{pmatrix} e_k$$

Où p_k est le vecteur position au temps k, $v_k$le vecteur vitesse et e_k un bruit gaussien. Les observations sont la distance et l'angle entre l'observateur et la cible.

$$y_k = \begin{pmatrix} \tan^{-1} \frac{p_k^2}{p_k^1} \\ \sqrt{(p_k^1)^2 + (p_k^2)^2} \end{pmatrix} + v_k$$

Où v_k est un bruit gaussien. Le but de ces simulations était donc de voir comment se comporter les différents filtres sur ce problème et de pouvoir observer de manière directe leurs limites. Et il s'avère que ces limites sont très visibles, l'algorithme perd généralement le fil à moins qu'on ne choisisse un nombre énorme de particules.

Enfin nous avons aussi essayer de voir comment se comporter les filtres lorsqu'on confine la cible dans une certaine zone (disque, rectangle …), et qu'elle se réfléchit lorsqu'elle sort de cette zone. Ce problème est compliqué et très peu évoqué dans la littérature, et nous n'avons pas abouti à grand-chose.

4 – Activités de l'IMAR

Pendant ce premier mois, je suis allé à un « seminar » qui était le dernier sur le sujet « Branching Processes associated with Newmann non-linear flows » présenté par le directeur Lucian Beznea. Il présentait le théorème de Schoenberg, qui résulte principalement de l'algèbre linéaire, et permet certainement d'achever les preuves faîtes dans les « seminar » précédents. Cela m'a surtout permis de voir comment les chercheurs travaillent entre eux et partagent leurs connaissances. Enfin j'ai assisté à la conférence mensuelle de l'IMAR présenté par Petru Mironescu intitulée « Maps with values into Manifolds ».

Conclusion

Ce premier mois fut à la fois un mois d’adaptation à la vie de chercheur dans une institut, et à la fois intense car il a fallu assimiler tous ces papiers et articles, et s’adapter aux objets mathématiques présents, à la notation un peu étrange parfois de la statistique bayésienne. Enfin les simulations m’ont permis de concrétiser ce que j’ai lu et d’améliorer ma compréhension et mon intuition des algorithmes.