

INSTITUTUL DE MATEMATICA "SIMION STOILOW" AL ACADEMIEI ROMANE



CENTRE FRANCOPHONE  
EN MATHÉMATIQUES  
BUCAREST

Atelier de travail en *Equations aux Dérivées Partielles*

***Espaces fonctionnels appliqués aux EDP:  
quand Lévy, Besov, Morrey et Campanato se rencontrent***

**Diego Chamorro**

(Université d'Évry-Val-d'Essonne)

**Abstract:** Il s'agira d'étudier la régularité des solutions d'une équation de transport-diffusion dont l'opérateur de diffusion est donné par un opérateur de type Lévy et où le transport est non-linéaire. Pour cela, on utilisera une caractérisation moléculaire des espaces fonctionnels. Ce résultat se trouve dans l'intersection des EDP, des probabilités (avec les opérateurs de type Lévy) de l'analyse harmonique.

**Joi 25 mai 2017, ora 14:00, sala 306 -307 "C. Bănică"**

# Espaces fonctionnels appliqués aux EDP: quand Lévy, Besov, Morrey et Campanato se rencontrent

Diego Chamorro (& S. Menozzi)

25/05/2017 – București

Université d'Evry



- 1 Introduction
- 2 Une E.D.P. de transport-diffusion
- 3 Les Théorèmes
- 4 Idée de la preuve
- 5 Perspectives

Le **Laplacien**: entre **analyse**, **E.D.P.** et **probabilités**

$$\Delta(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f \quad (f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$$

## Le Laplacien: entre analyse, E.D.P. et probabilités

$$\Delta(f) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} f \quad (f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R})$$

- Au niveau de Fourier  $\widehat{\Delta(f)} = -c|\xi|^2 \widehat{f}$
- Equation de la chaleur ( $u : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ )

$$\partial_t u(t, x) - \Delta u(t, x) = 0,$$

dont la solution fondamentale est une **gaussienne**:

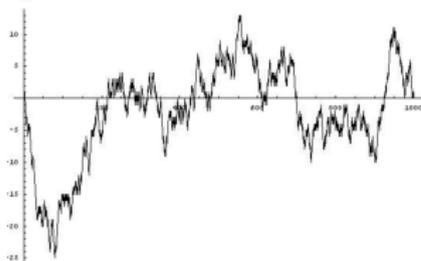
$$g_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} \text{ si } t > 0.$$

## Le mouvement Brownien

- Les gaussiennes sont des densités de probabilité: si  $X \sim \mathcal{N}(\sigma, m)$  alors

$$\mathbb{P}(X \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} g_{\sigma}(x - m) dx$$

- Le mouvement Brownien est une marche aléatoire particulière

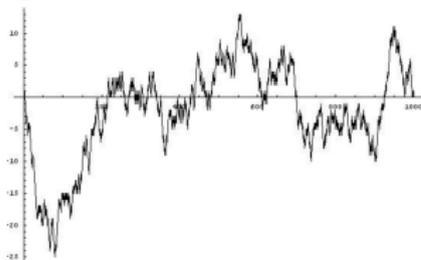


## Le mouvement Brownien

- Les gaussiennes sont des densités de probabilité: si  $X \sim \mathcal{N}(\sigma, m)$  alors

$$\mathbb{P}(X \leq \alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} g_{\sigma}(x - m) dx$$

- Le mouvement Brownien est une marche aléatoire particulière



⇒ Le Laplacien est le *générateur infinitésimal* du mouvement Brownien.

## Laplacien Fractionnaire?

$$\sqrt{(-\Delta)}(f) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(f)$$

## Laplacien Fractionnaire?

$$\sqrt{(-\Delta)}(f) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(f)$$

- Fourier:

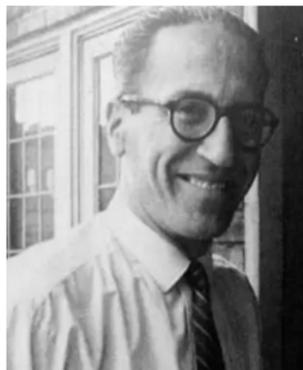
$$(\sqrt{(-\Delta)}(f))^\wedge = c|\xi|\hat{f}$$

- E.D.P.:

$$\partial_t u(t, x) + \sqrt{(-\Delta)}u(t, x) = 0$$

la solution fondamentale est le  
**noyau de Poisson**

$$p_t(x) = ct(t^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$



A. Calderón (1920-1998)

## Laplacien Fractionnaire?

$$\sqrt{(-\Delta)}(f) = (-\Delta)^{\frac{1}{2}}(f)$$

- Fourier:

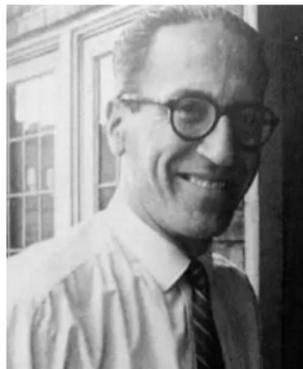
$$(\sqrt{(-\Delta)}(f))^{\wedge} = c|\xi|\hat{f}$$

- E.D.P.:

$$\partial_t u(t, x) + \sqrt{(-\Delta)}u(t, x) = 0$$

la solution fondamentale est le  
**noyau de Poisson**

$$p_t(x) = ct(t^2 + |x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}$$



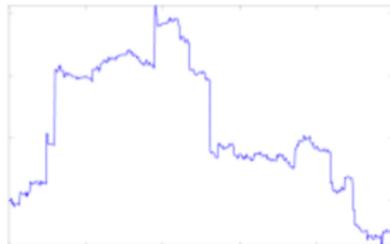
A. Calderón (1920-1998)

Quel est le processus stochastique  
 associé?

## Processus de Lévy



P. Lévy (1886-1971)



- Si  $0 < \alpha < 2$  les opérateurs  $(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}$  sont des **générateurs infinitésimaux** de processus de Lévy (processus  $\alpha$ -stables).

## Ingrédient 1: Opérateurs de type Lévy

Il s'agit d'une généralisation du Laplacien fractionnaire

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(f)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+\alpha}} dy$$

## Ingrédient 1: Opérateurs de type Lévy

Il s'agit d'une généralisation du Laplacien fractionnaire

$$(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}}(f)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f(x) - f(y)}{|x - y|^{n+\alpha}} dy$$

### Définition (Opérateurs de type Lévy)

On note  $\mathcal{L}^\alpha$  l'opérateur

$$\mathcal{L}^\alpha(f)(x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} (f(x) - f(y)) \pi(x - y) dy$$

où  $\pi(y) \sim |y|^{-(n+\alpha)}$  si  $0 < |y| < 1$  et  $\pi(y) \sim |y|^{-(n+\delta)}$  si  $|y| > 1$ .

⇒ Propriétés de régularisation similaires à un Laplacien fractionnaire.

## Ingrédient 2: Espaces de Fonctions

## Ingrédient 2: Espaces de Fonctions

### Espaces Fonctionnels (I) - Espaces de Besov

Ce sont des espaces qui généralisent les espaces de **Sobolev**.

- Si  $0 < s < 2$ ,  $1 \leq p, q \leq +\infty$

$$\|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f(\cdot + y) + f(\cdot - y) - 2f(\cdot)\|_{L^p}^q}{|y|^{n+sq}} dy \right)^{1/q} < +\infty.$$

## Ingrédient 2: Espaces de Fonctions

### Espaces Fonctionnels (I) - Espaces de Besov

Ce sont des espaces qui généralisent les espaces de **Sobolev**.

- Si  $0 < s < 2$ ,  $1 \leq p, q \leq +\infty$

$$\|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f(\cdot + y) + f(\cdot - y) - 2f(\cdot)\|_{L^p}^q}{|y|^{n+sq}} dy \right)^{1/q} < +\infty.$$

- Si  $0 < s < 1$ ,  $p = q$  on a :

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{s,p}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} dx dy \right)^{1/p} < +\infty.$$



O. Besov (1933-)

⇒ Ces espaces mesurent la régularité des fonctions.

## Propriétés (Besov)

- Si  $0 < s < 1$  et  $p = q = +\infty$  on a  $\dot{B}_{\infty}^{s,\infty} = \dot{C}^s$  (espace de Hölder)
- On a  $\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{\dot{B}_q^{s-\alpha,p}} = \|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}}$

## Propriétés (Besov)

- Si  $0 < s < 1$  et  $p = q = +\infty$  on a  $\dot{B}_{\infty}^{s,\infty} = \dot{C}^s$  (espace de Hölder)
- On a  $\|(-\Delta)^{\frac{\alpha}{2}} f\|_{\dot{B}_q^{s-\alpha,p}} = \|f\|_{\dot{B}_q^{s,p}}$

Théorème (D.Ch. & PG. Lemarié ('12) + D.Ch & S. Menozzi ('15))

- Soit  $\mathcal{L}^\alpha$  un opérateur de type Lévy de régularité  $0 < \alpha < 2$ .
- Si  $2 \leq p < +\infty$ , on a l'inégalité

$$\|f\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{2},p}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^{p-2} f(x) \mathcal{L}^\alpha f(x) dx$$

⇒ Première rencontre entre Besov et Lévy.

## Espaces Fonctionnels (II) - Espaces de Morrey-Campanato

C'est une généralisation des espaces  
**Lebesgue** et de **Hölder**

Si

$$\bar{f}_{B(x_0, r)} = \frac{1}{|B(x_0, r)|} \int_{B(x_0, r)} f(y) dy$$

est la moyenne de  $f$  sur  $B(x_0, r)$



Ch. Morrey (1907-1984)



S. Campanato (1930-2005)

On définit les espaces  $M^{q,a}(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq q < +\infty$ ,  $0 \leq a < n + q$  par  
 l'expression

$$\|f\|_{M^{q,a}} = \sup_{\substack{x_0 \in \mathbb{R}^n \\ 0 < r < 1}} \left( \frac{1}{r^a} \int_{B(x_0, r)} |f(x) - \bar{f}_{B(x_0, r)}|^q dx \right)^{1/q} + \sup_{\substack{x_0 \in \mathbb{R}^n \\ r \geq 1}} \left( \frac{1}{r^a} \int_{B(x_0, r)} |f(x)|^q dx \right)^{1/q} < +\infty$$

## Propriétés (Morrey-Campanato)

- Si  $0 \leq a < n$  on obtient des espaces de Morrey

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset M^{q,a}(\mathbb{R}^n) \quad \text{con } p = \frac{qn}{n-a}.$$

- Si  $a = n$  on obtient l'espace  $bmo(\mathbb{R}^n)$
- Si  $n < a < n + q$  alors  $M^{q,a}(\mathbb{R}^n) \simeq C^\lambda(\mathbb{R}^n)$  avec  $\frac{a-n}{q} = \lambda$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ .

## Propriétés (Morrey-Campanato)

- Si  $0 \leq a < n$  on obtient des espaces de Morrey

$$L^p(\mathbb{R}^n) \subset M^{q,a}(\mathbb{R}^n) \quad \text{con } p = \frac{qn}{n-a}.$$

- Si  $a = n$  on obtient l'espace  $bmo(\mathbb{R}^n)$
- Si  $n < a < n + q$  alors  $M^{q,a}(\mathbb{R}^n) \simeq C^\lambda(\mathbb{R}^n)$  avec  $\frac{a-n}{q} = \lambda$  et  $\lambda \in ]0, 1[$ .

$\implies$  Les espaces de Morrey-Campanato décrivent des situations **irrégulières** et **régulières** en fonction du paramètre  $a$

$$\begin{array}{ccccc}
 M^{q,a} & \longrightarrow & bmo & \longrightarrow & C^\lambda \\
 0 \leq a < n & \longrightarrow & a = n & \longrightarrow & n < a < n + q
 \end{array}$$

# L'équation

## Transport-Diffusion

- Soit  $\theta : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$  avec  $n \geq 2$
- Soit  $\mathcal{L}^\alpha$  un opérateur de type Lévy de régularité  $0 < \alpha < 2$  (Diffusion).
- Soit  $A_{[\theta]}(t, x) = [A_1(\theta)(t, x), \dots, A_n(\theta)(t, x)]$  un vecteur d'intégrales singulières (Transport) *i.e.*

$$A_i(\theta)(t, x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \kappa_i(x - y) \theta(t, y) dy$$

## Transport-Diffusion

- Soit  $\theta : [0, +\infty[ \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $n \geq 2$
- Soit  $\mathcal{L}^\alpha$  un opérateur de type Lévy de régularité  $0 < \alpha < 2$  (Diffusion).
- Soit  $A_{[\theta]}(t, x) = [A_1(\theta)(t, x), \dots, A_n(\theta)(t, x)]$  un vecteur d'intégrales singulières (Transport) *i.e.*

$$A_i(\theta)(t, x) = v.p. \int_{\mathbb{R}^n} \kappa_i(x - y) \theta(t, y) dy$$

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^\alpha \theta(t, x) = 0, \\ \operatorname{div}(A_{[\theta]}) = 0, \\ \theta(0, x) = \theta_0(x), \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

⇒ C'est une équation de transport-diffusion non linéaire

# Objectif

## Objectif

On veut étudier la **régularité** (Hölder)  
des solutions de cette équation.

## Propriétés de l'équation (I)

- (i) Si la donnée initiale vérifie  $\theta_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 < p < +\infty$
- (ii) Si le Transport est borné dans les espaces de Morrey

$$\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{q,a})} \leq C \|\theta\|_{L^\infty(M^{q,a})}$$

## Propriétés de l'équation (I)

- (i) Si la donnée initiale vérifie  $\theta_0 \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 < p < +\infty$
- (ii) Si le Transport est borné dans les espaces de Morrey

$$\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{q,a})} \leq C \|\theta\|_{L^\infty(M^{q,a})}$$

⇒ existence de solutions faibles  $\theta \in L^\infty(L^p)$

⇒ on a un principe du maximum

$$\|\theta(t, \cdot)\|_{L^p} \leq \|\theta_0\|_{L^p}$$

## Théorème (D. Ch. & S. Menozzi ('15))

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^\alpha \theta(t, x) = 0$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^\alpha$
- (ii) Si le *transport* est borné dans  $M^{q,a}$

Si on a la relation

$$\frac{a - n}{q} = 1 - \alpha$$

alors les solutions de cette EDP sont Hölder régulières.

## Théorème (D. Ch. & S. Menozzi ('15))

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^\alpha \theta(t, x) = 0$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^\alpha$
- (ii) Si le *transport* est borné dans  $M^{q,a}$

Si on a la relation

$$\frac{a - n}{q} = 1 - \alpha$$

alors les solutions de cette EDP sont Hölder régulières.

$$bmo \iff \mathcal{L}^1 = (-\Delta)^{1/2}$$

## Théorème (D. Ch. & S. Menozzi ('15))

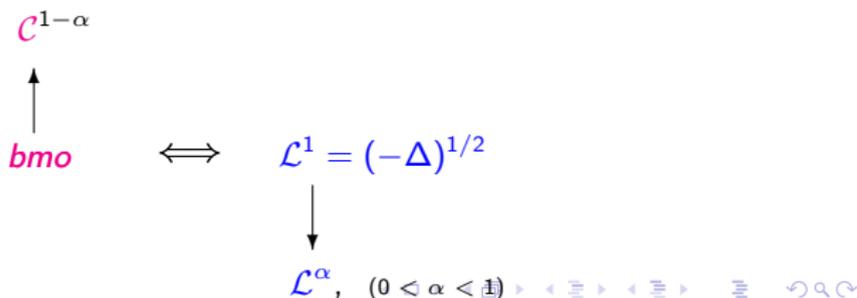
$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^\alpha \theta(t, x) = 0$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^\alpha$
- (ii) Si le *transport* est borné dans  $M^{q,a}$

Si on a la relation

$$\frac{a-n}{q} = 1 - \alpha$$

alors les solutions de cette EDP sont Hölder régulières.



## Théorème (D. Ch. & S. Menozzi ('15))

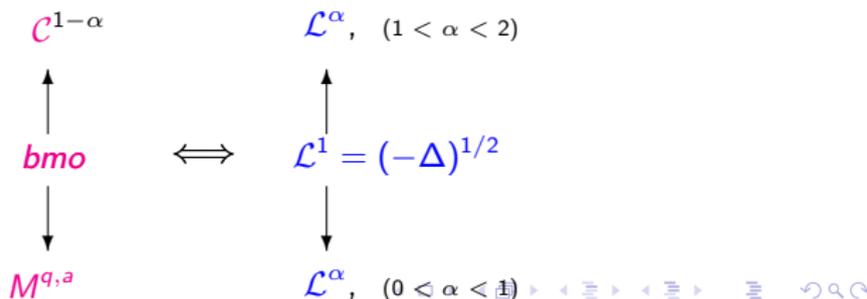
$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^\alpha \theta(t, x) = 0$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^\alpha$
- (ii) Si le *transport* est borné dans  $M^{q,a}$

Si on a la relation

$$\frac{a-n}{q} = 1 - \alpha$$

alors les solutions de cette EDP sont Hölder régulières.



Est-il possible de casser cette relation?

$$\frac{a - n}{q} = 1 - \alpha$$

Est-il possible de casser cette relation?

$$\frac{a - n}{q} = 1 - \alpha$$

⇒ Dans le cas général (linéaire) **non** (contre exemples)

Est-il possible de casser cette relation?

$$\frac{a - n}{q} = 1 - \alpha$$

⇒ Dans le cas général (linéaire) **non** (contre exemples)

⇒ Dans un cadre **non linéaire** c'est possible. . .

**Idée:** utiliser l'information supplémentaire  $A_{[\theta]} = f(\theta)$

## Propriétés (II)

Une étude plus poussée du **principe du maximum**

$$\|\theta(t, \cdot)\|_{L^p} + \underbrace{\int_0^t \int_{\mathbb{R}^n} |\theta(s, x)|^{p-2} \theta(s, x) \mathcal{L}^\alpha \theta(s, x) dx ds}_{\|\theta\|_{\dot{B}_p^{\alpha, p}} \leq} \leq \|\theta_0\|_{L^p} < +\infty$$

⇒ Contrôle de la quantité  $\|\theta\|_{\dot{B}_p^{\alpha, p}}$ : la solution appartient à un espace de Besov

⇒ On va exploiter cette information supplémentaire

# Les Théorèmes

## Théorème (1)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $M^{q,a}$

## Théorème (1)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $M^{q,a}$
- (iii) Si le *transport* est borné en  $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}$ :

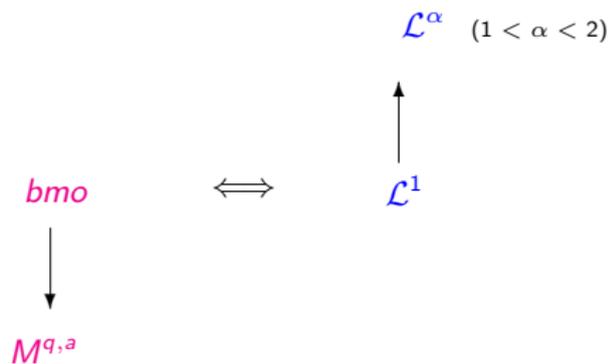
$$\|A_{[\theta]}\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}} \leq C \|\theta\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}}$$

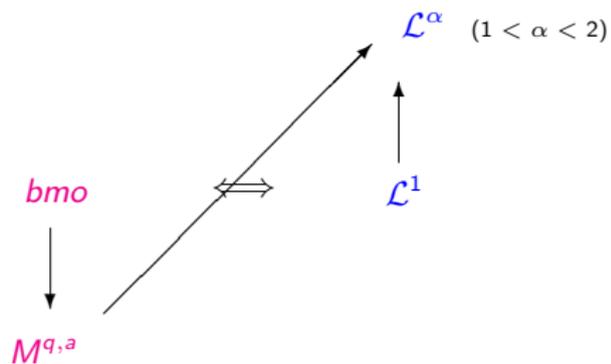
- (iv) Si  $p = \frac{qn}{n-a}$ , et  $1 < \alpha_0 = \frac{p+n}{p+1} < 2$ ,

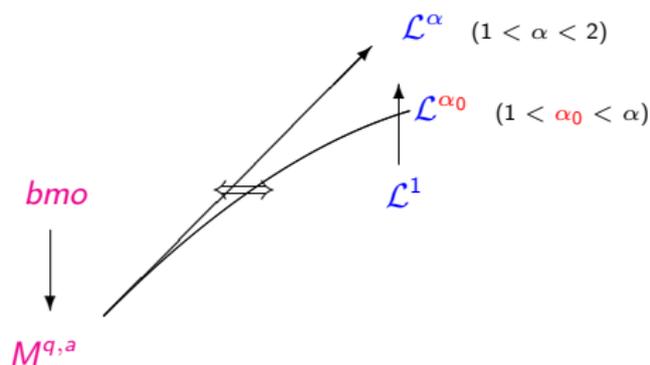
alors les solutions sont régulières et on "casse" l'équilibre.

La condition Besov est *générale*

⇒ Première rencontre entre Lévy, Besov et Morrey-Campanato

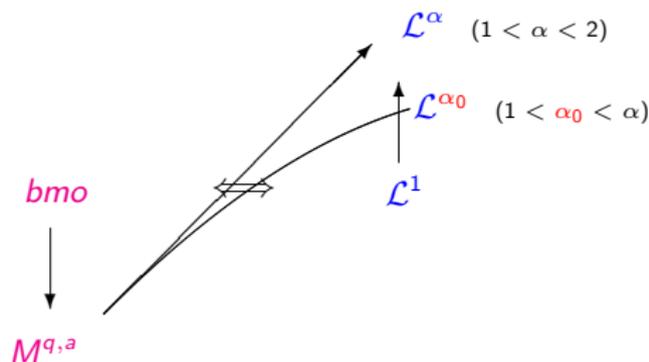






⇒ L'information **Besov** permet de casser l'équilibre

⇒ Ceci reste vrai dans l'“intervalle”  $[M^{q,a}, bmo]$



- ⇒ L'information Besov permet de casser l'équilibre
- ⇒ Ceci reste vrai dans l' "intervalle"  $[M^{q,a}, bmo]$
- ⇒ ... mais tout s'écrase si on considère  $bmo$

(  $bmo \simeq p = +\infty$  et on perd l'information Besov  $\dot{B}_p^{\frac{\alpha}{p}, p}$  )

## Théorème (2)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p$$

(i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$

## Théorème (2)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^P$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $L^P$ - $M^{P,a}$

$$\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{P,a})} \leq C \|\theta\|_{L^\infty(L^P)}$$

## Théorème (2)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $L^p$ - $M^{p,a}$

$$\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{p,a})} \leq C \|\theta\|_{L^\infty(L^p)}$$

- (iii) Si le *transport* est borné en  $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}$  :  $\|A_{[\theta]}\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}} \leq C \|\theta\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}}$
- (iv) Si  $0 \leq a < \alpha_0 = \frac{p+n}{p+1}$ ,

alors les solutions sont régulières et on "casse" l'équilibre.

La condition Lebesgue-Morrey **n'est pas générale**

## Théorème (2)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[\theta]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $L^p$ - $M^{p,a}$

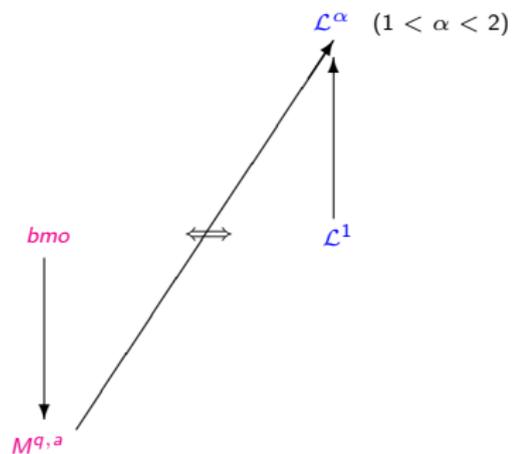
$$\|A_{[\theta]}\|_{L^\infty(M^{p,a})} \leq C \|\theta\|_{L^\infty(L^p)}$$

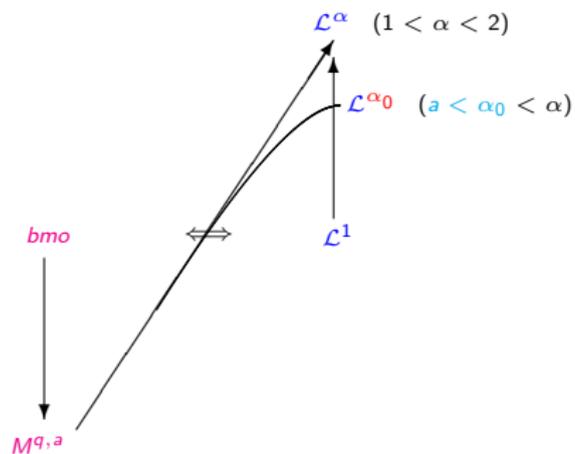
- (iii) Si le *transport* est borné en  $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}$  :  $\|A_{[\theta]}\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}} \leq C \|\theta\|_{\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}}$
- (iv) Si  $0 \leq a < \alpha_0 = \frac{p+n}{p+1}$ ,

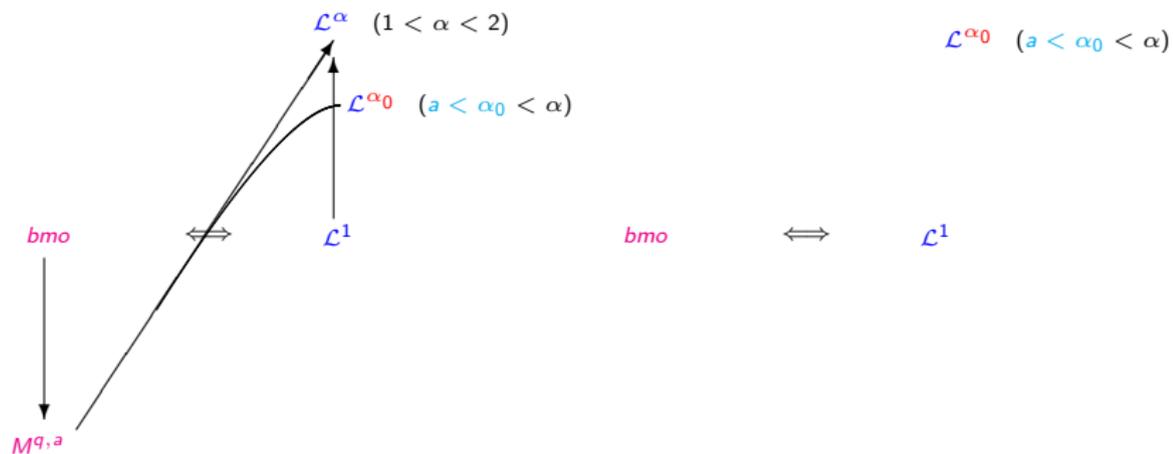
alors les solutions sont régulières et on "casse" l'équilibre.

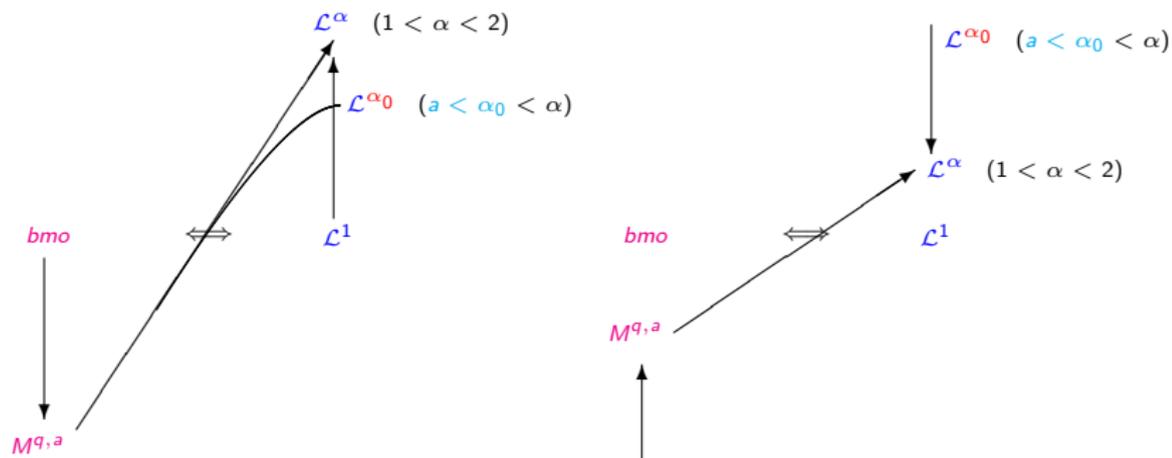
La condition Lebesgue-Morrey **n'est pas générale**

⇒ **Compétition** entre **Lévy**, **Besov** et **Morrey-Campanato**

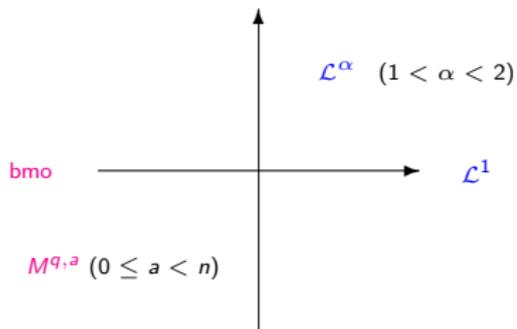


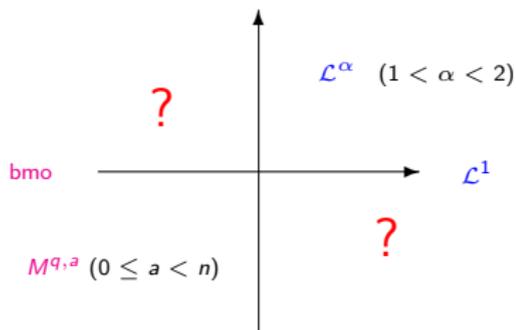






Si **Morrey-Campanato/Lebesgue** est plus régulier, l'information **Besov** ne sert plus





Est-il possible rompre l'équilibre si  $0 < \alpha < 1$ ?

## Théorème (Régularisation)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{-\varepsilon/2} \theta]})(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p \quad 0 < \varepsilon < 1$$

## Théorème (Régularisation)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{-\varepsilon/2} \theta]})(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p \quad 0 < \varepsilon < 1$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $M^{q,a}$

## Théorème (Régularisation)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{-\varepsilon/2} \theta]})(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p \quad 0 < \varepsilon < 1$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $M^{q,a}$
- (iii) Si le *transport* est borné en  $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}$

## Théorème (Régularisation)

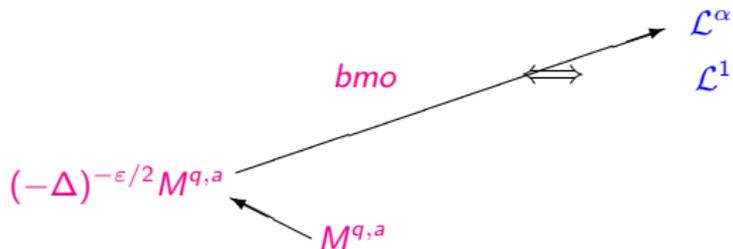
$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{-\varepsilon/2} \theta]})(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p \quad 0 < \varepsilon < 1$$

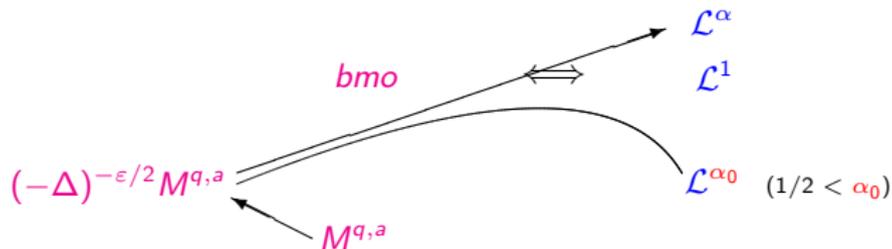
- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
  - (ii) Si le *transport* est borné en  $M^{q,a}$
  - (iii) Si le *transport* est borné en  $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}$
  - (iv) Si  $p = \frac{qn}{q\varepsilon + n - a}$ , et  $1/2 < \alpha = \frac{n+p(1-\varepsilon)}{p+1} < 2$ .
- alors les solutions sont régulières.

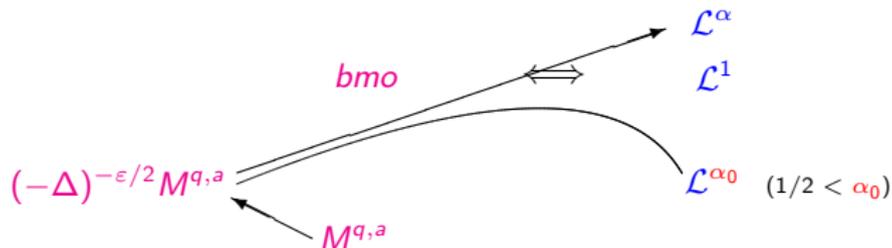
⇒ La régularisation avec  $(-\Delta)^{-\varepsilon/2}$  permet  $1/2 < \alpha < 1$ .

$bmo$   $\iff$   $\mathcal{L}^1$

$M^{q,a}$







$\Rightarrow$  Effet régularisant de  $(-\Delta)^{-\epsilon/2}$

## Théorème (Singularisation)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{\alpha_0} + \varepsilon/2] \theta})(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p \quad 0 < \varepsilon < 1$$

## Théorème (Singularisation)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{\alpha_0} + \varepsilon/2]\theta})(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p \quad 0 < \varepsilon < 1$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $M^{q,a}$

## Théorème (Singularisation)

$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{\alpha_0} + \varepsilon/2] \theta})(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p \quad 0 < \varepsilon < 1$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
- (ii) Si le *transport* est borné en  $M^{q,a}$
- (iii) Si le *transport* est borné en  $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}$

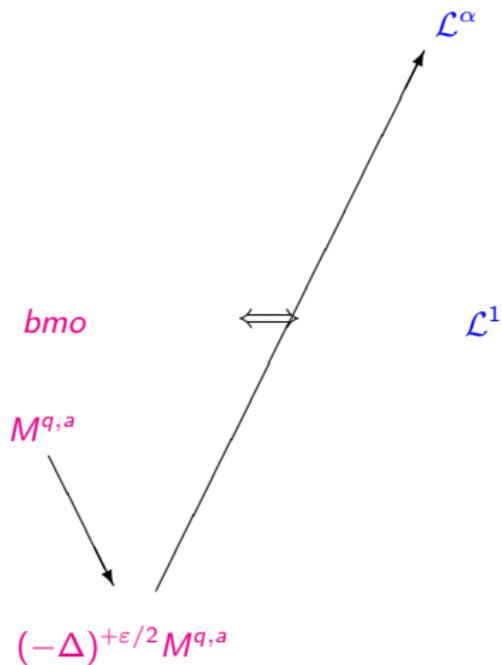
## Théorème (Singularisation)

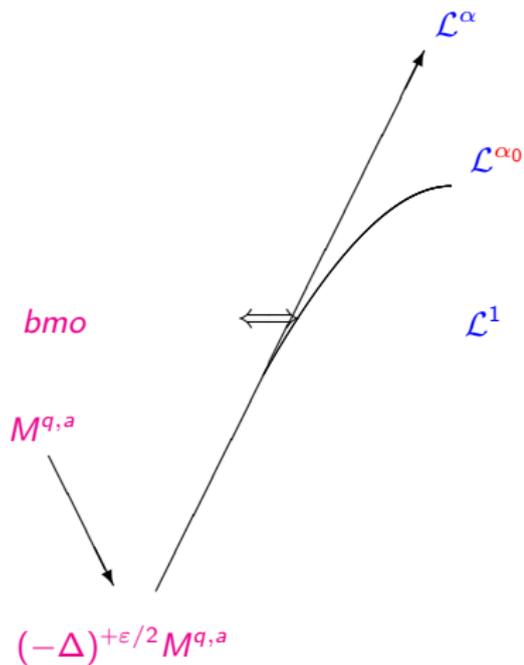
$$\partial_t \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{+\varepsilon/2} \theta]})(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0 \quad \theta_0 \in L^p \quad 0 < \varepsilon < 1$$

- (i) Si la *diffusion* est un opérateur de type Lévy  $\mathcal{L}^{\alpha_0}$
  - (ii) Si le *transport* est borné en  $M^{q,a}$
  - (iii) Si le *transport* est borné en  $\dot{B}_p^{\frac{\alpha_0}{p}, p}$
  - (iv) Si  $1 < \alpha = \frac{n+p(1+\varepsilon)}{p+1} < 2$ .
- alors les solutions sont régulières.

⇒ **Singularisation** avec  $(-\Delta)^{+\varepsilon/2}$

$$bmo \iff \mathcal{L}^1$$
$$M^{q,a}$$





# Idée de la preuve

## Idée principale: la dualité

### Définition (Espaces de Hölder)

Si  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $\theta \in C^\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ) si

$$\|\theta\|_{C^\gamma} = \|\theta\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|\theta(x) - \theta(y)|}{|x - y|^\gamma} < +\infty$$

## Idée principale: la dualité

### Définition (Espaces de Hölder)

Si  $\theta : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , alors  $\theta \in C^\gamma$  ( $0 < \gamma < 1$ ) si

$$\|\theta\|_{C^\gamma} = \|\theta\|_{L^\infty} + \sup_{x \neq y} \frac{|\theta(x) - \theta(y)|}{|x - y|^\gamma} < +\infty$$

### Théorème (dualité Hardy-Hölder (Goldberg '79))

Si  $0 < \gamma < 1$  et  $0 < \sigma < 1$  t.q.  $\sigma = \frac{n}{n+\gamma}$

$\Rightarrow$  L'espace dual d'un espace de **Hardy**  $h^\sigma$  est un espace de **Hölder**  $C^\gamma$ .

$\Rightarrow \theta \in C^\gamma$  ssi pour tout  $g \in h^\sigma$  on a  $\langle \theta, g \rangle_{C^\gamma \times h^\sigma} < +\infty$

## Caractérisation moléculaire des espaces de Hardy

### Définition (Espaces de Hardy)

Si  $\mathbf{g} \in h^\sigma$  alors

$$\mathbf{g} = \sum_{j \in \mathbb{N}} \lambda_j \psi_j$$

où  $\sum_{j \in \mathbb{N}} |\lambda_j|^\sigma < +\infty$  et  $(\psi_j)_{j \in \mathbb{N}}$  sont des *r-molécules*.

## Définition (Molécules)

- ( $0 < r < 1$ ):

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(x)| |x - x_0|^\omega dx \leq r^{\omega-\gamma}, \text{ avec } x_0 \in \mathbb{R}^n \quad + \quad \|\psi\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{r^{n+\gamma}} \quad (1)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \psi(x) dx = 0$$

- ( $1 \leq r < +\infty$ ): Condition (1)

$\implies$  (1) implique ( $1 \leq p < +\infty$ )

$$\|\psi\|_{L^p} \leq \frac{1}{r^{(n-\frac{n}{p}+\gamma)}}$$

## Astuce: Transfert

Théorème (Kiselev & Nazarov ('10))

$\implies$  Si  $\theta$  sol. Eq.  $\partial_t \theta + \nabla \cdot (v\theta) + \mathcal{L}(\theta) = 0$

$\implies$  Si  $\psi$  sol. Eq. avec  $\psi_0$  une molécule.

$$\partial_t \psi + \nabla \cdot (v\psi) + \mathcal{L}(\psi) = 0$$

alors il y a **conservation du crochet de dualité**

$$\begin{array}{c} \langle \theta_0, \psi(t, \cdot) \rangle \\ \downarrow \quad \uparrow \\ \langle \theta(t, \cdot), \psi_0 \rangle \end{array}$$

⇒ Pour étudier la régularité des solutions...

$$|\langle \theta(t, \cdot), \psi_0 \rangle| = |\langle \theta_0, \psi(t, \cdot) \rangle| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^1}$$

⇒ Pour étudier la régularité des solutions...

$$|\langle \theta(t, \cdot), \psi_0 \rangle| = |\langle \theta_0, \psi(t, \cdot) \rangle| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^1}$$

### Théorème

*Pour toute donnée initiale moléculaire  $\psi_0$ , la solution  $\psi(t, x)$  est contrôlée en norme  $L^1$  pour  $t > T_0$ .*

- grandes molécules ⇒ principe du maximum

$$\|\psi\|_{L^1} \leq \frac{1}{r^\gamma}$$

⇒ Pour étudier la régularité des solutions...

$$|\langle \theta(t, \cdot), \psi_0 \rangle| = |\langle \theta_0, \psi(t, \cdot) \rangle| \leq \|\theta_0\|_{L^\infty} \|\psi(t, \cdot)\|_{L^1}$$

### Théorème

*Pour toute donnée initiale moléculaire  $\psi_0$ , la solution  $\psi(t, x)$  est contrôlée en norme  $L^1$  pour  $t > T_0$ .*

- grandes molécules ⇒ principe du maximum

$$\|\psi\|_{L^1} \leq \frac{1}{r^\gamma}$$

- petites molécules

## Déformation des molécules (I)

- Pour une petite molécule de taille  $r$ :

$$\int |\psi(0, x)| |x - x_0|^\omega dx \leq r^{\omega-\gamma}$$
$$\|\psi(0, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{r^{n+\gamma}}$$

- Au temps  $s$  on obtient une molécule de taille  $(r + s)$ :

$$\int |\psi(s, x)| |x - x_s|^\omega dx \leq (r^\alpha + Ks)^{(\omega-\gamma)/\alpha}$$
$$\|\psi(s, \cdot)\|_{L^\infty} \leq \frac{1}{(r^\alpha + Ks)^{(n+\gamma)/\alpha}}$$

**Idée:** la vitesse est **irrégulière**, le déplacement du centre de la molécule  $x_0$  est donnée par une moyenne

$$\begin{cases} x'(s) = \bar{v}_{B(x(s),r)} = \frac{1}{|B(x(s),r)|} \int_{B(x(s),r)} v(s_0, y) dy, & s \in [0, s_0], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

⇒ Les espaces de **Morrey-Campanato** vont apparaître avec cette régularisation

**Idée:** la vitesse est **irrégulière**, le déplacement du centre de la molécule  $x_0$  est donnée par une moyenne

$$\begin{cases} x'(s) = \bar{v}_{B(x(s),r)} = \frac{1}{|B(x(s),r)|} \int_{B(x(s),r)} v(s_0, y) dy, & s \in [0, s_0], \\ x(0) = x_0. \end{cases}$$

⇒ Les espaces de **Morrey-Campanato** vont apparaître avec cette régularisation

$$x'(s) = \bar{v}_{B(x(s),r)} = v * \varphi, \quad s \in [0, s_0]$$

⇒ Les espaces de **Besov** vont apparaître avec cette régularisation

## Déformation des molécules (II)

On fait “**fondre**” la norme  $L^1$  des molécules

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\psi(S_0, x)| |x - x_{S_0}|^\omega dx \leq C_1 + \|\psi(S_0, \cdot)\|_{L^\infty} \leq C_2$$

$$\implies \|\psi(S_0, \cdot)\|_{L^1} \leq C_3$$

$\implies$  on obtient alors un contrôle de la norme  $L^1$ . ■

⇒ Autre type d'opérateurs? / autre type de transport?  
SQG (transformées de Riesz en particulier)

⇒ Autre type d'opérateurs? / autre type de transport?  
SQG (transformées de Riesz en particulier)

⇒ Contrôle en temps?  
La régularité en temps et en espace sont reliées (équation de la chaleur)

$$\partial_t f \iff \Delta f$$

⇒ Autre type d'opérateurs? / autre type de transport?  
SQG (transformées de Riesz en particulier)

⇒ Contrôle en temps?  
La régularité en temps et en espace sont reliées (équation de la chaleur)

$$\partial_t f \iff \Delta f$$

⇒ Utilisation de dérivées fractionnaires en temps

$$D_t^\sigma \theta(t, x) - \nabla \cdot (A_{[(-\Delta)^{\sigma+1/2}]} \theta)(t, x) + \mathcal{L}^{\alpha_0} \theta(t, x) = 0$$

avec  $0 < \sigma < 1$  et  $D^\sigma$  est la dérivée de Caputo

$$D^\sigma \psi(t) = \int_0^t \frac{1}{(t-s)^\sigma} \psi'(s) ds$$

- L. CAFFARELLI & A. VASSEUR. *Drift diffusion equations with fractional diffusion and the quasi-geostrophic equation*, Annals of Math., Vol 171 (2010), No 3, 1903-1930.
- P. CONSTANTIN & J. WU. *Regularity of Hölder continuous solutions of the supercritical quasi-geostrophic equation*, Annales de l'Institut Henri Poincaré. Analyse non linéaire. Vol 25, N°6, 1103-1110 (2008).
- L. SILVESTRE, V. VICOL & A. ZLATOS *On the loss of continuity for super-critical drift-diffusion equations*, Archive of Rational Mechanics and Analysis 207 (2013), No 3, 845-877.
- D. CHAMORRO & P. G. LEMARIÉ-RIEUSSET. *Quasi-geostrophic equation, nonlinear Bernstein inequalities and  $\alpha$ -stable processes*, Revista Matemática Iberoamericana (2011).
- A. CORDOBA & D. CORDOBA. *A maximum principle applied to quasi-geostrophic equations*, Commun. Math. Phys. 249, 511-528 (2004).
- A. KISELEV & F. NAZAROV. *A variation on a theme of Caffarelli and Vasseur*, Zapiski Nauchnykh Seminarov POMI, Vol. 370, 58-72, (2009).
- D. CHAMORRO & S. MENOZZI. *Fractional operators with singular drift: Smoothing properties and Morrey-Campanato spaces*, Rev. Mat. Iberoam. 32, no. 4, 1447-1501 (2016).
- D. CHAMORRO & S. MENOZZI. *Nonlinear singular drifts: when Besov meets Morrey and Campanato* (2016)