Inégalité de Hardy et théorie des espaces de fonctions

Atelier Espaces de fonctions et théorie des opérateurs

Petru Mironescu

Université Lyon 1, CNRS & IMAR

IMAR, 18 décembre 2017

- Si $1 \le q < \infty$, $0 < r < \infty$ et $g : (0,\infty) \to [0,\infty]$ mesurable,

$$\left(\int_0^\infty t^{-r-1}\left(\int_0^t g(u)\,du\right)^q dt\right)^{1/q} \le \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty u^{-r+q-1}(g(u))^q\,du\right)^{1/q},$$

$$\left(\int_0^\infty t^{r-1}\left(\int_t^\infty g(u)\,du\right)^q dt\right)^{1/q} \le \frac{q}{r}\left(\int_0^\infty u^{r+q-1}(g(u))^q du\right)^{1/q}$$

- Choix « usuel » $q = p > 1$, $r = p-1$, $g = |f|'$, $f \in W^{1,p}((0,\infty))$, $f(0) = 0$:

$$\int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^p}\,dt \le \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int_0^\infty |f'(u)|^p\,du$$

- Si $1 \le p < \infty$, $0 < \lambda < 1$ et $f : J = (a, b) \to \mathbb{R}$ mesurable,

$$\int_J \frac{|f(t)|^p}{\operatorname{dist}(t, \{a, b\})^\lambda}\, dt \le C_{p,\lambda} \int_J \int_J \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+\lambda}}\, dxdy$$

  sous une hypothèse « qui élimine les constantes non nulles » :
  - $\displaystyle\int_J f(x)\, dx = 0$ si J borné
  - $f(x) = O(x^{-2})$ à l'infini si J non borné

- Cas particulier utile : si $f \in C_c^\infty([0, \infty))$, alors

$$\int_0^\infty \frac{|f(t)|^p}{t^\lambda}\, dt \le C_{p,\lambda} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{|f(x) - f(y)|^p}{|x - y|^{1+\lambda}}\, dxdy$$

- Même inégalité si $\lambda > 1$ (sous de bonnes hypothèses), mais pas si $\lambda = 1$

- Donnés des espaces de fonctions X et Y, quelles (cn, cs, cns) sont les fonctions Φ telles que la composition T_Φ, $f \xmapsto{T_\Phi} \Phi \circ f$ envoie (continûment) X sur Y ?
- Si $0 < s \leq 1$ et $1 \leq p < \infty$, et si Φ Lipschitz, $\Phi(0) = 0$, alors T_Φ envoie continûment $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ vers $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ · Igari 1965 Φ Lipschitz est nécessaire · Marcus, Mizel 1979 Continuité si $s = 1$
- Dahlberg 1979 Si $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, $1 < p < \infty$ et $mp < n$ et si $T_\Phi(W^{m,p}(\mathbb{R}^n)) \subset W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$, alors $\Phi(t) = ct$ · Sickel 1989, 1997 pour $W^{s,p}$, $1 + 1/p < s < n/p$
- Si $s > 0$, $1 \leq p < \infty$, $sp > n$, ℓ entier $\geq s$, $\Phi \in C^\ell(\mathbb{R})$, $\Phi(0) = 0$, alors T_Φ envoie continûment $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ vers $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$

- $\Phi(t) = |t|$ Bourdaud, Meyer 1991 Si $1 \le p < \infty$, $1 \le q \le \infty$, $1 < s < 1 + 1/p$ et $\Phi(t) := |t|$, alors T_Φ envoie continûment $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ vers $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$
- Preuve par interpolation nonlinéaire à partir du cas $B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n) = W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$
- Dans $W^{s,p}$: réduction à $n = 1$
- Ingrédient clé dans $W^{s,p}(\mathbb{R})$: inégalité de Hardy fractionnaire
- Si $q > p$, réduction dimensionnelle impossible : « non restriction » dans les espaces de Besov si $q > p$ · M, Russ, Sire 2017, Brasseur 2017

- $\Phi(t) = |t|^a$ M 2015 Si $1 < p < \infty$, $0 < a < 1$ et $\Phi(t) := |t|^a$, alors T_Φ envoie continûment $W^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ vers $W^{a,p/a}(\mathbb{R}^n)$
- Ingrédient clé : inégalité de Hardy
- Plus généralement, si $1 < p < \infty$, Φ paire, $\Phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ concave croissante bijective, $\Psi : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\Psi := \Phi^{-1}$ et

$$F(t) := \int_0^t \left(\int_0^s [\Psi'(\tau)]^{1-1/p} [\Psi''(\tau)]^{1/p} \, d\tau \right)^p ds, \ \forall\, t \geq 0,$$

alors

$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{F(|\Phi(u(y)) - \Phi(u(x))|)}{|y-x|^{n+p}} \, dxdy \leq C_{p,\Phi,n} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(x)|^p \, dx$$

- Gagliardo 1957 Si $1 \leq p < \infty$ et $U \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$, alors $u := \operatorname{tr} U$ $\in W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^n)$ et $|u|_{W^{1-1/p,p}} \leq C_{p,n}\|\nabla U\|_{L^p}$ · Théorème direct
- Gagliardo 1957 Si $u \in W^{1-1/p,p}(\mathbb{R}^n)$, alors il existe $U \in W^{1,p}(\mathbb{R}^{n+1}_+)$ avec $u = \operatorname{tr} U$ et $\|\nabla U\|_{L^p} \leq C'_{p,n}|u|_{W^{1-1/p,p}}$ · Théorème inverse
- Peetre 1979 Si $p = 1$, l'opérateur $u \mapsto U$ ne peut pas être linéaire
- L'inégalité de Hardy est l'ingrédient clé dans la preuve du théorème direct

- Uspenskii 1961 Si $s>0$, $1\le p<\infty$, ℓ entier $>s$ et $U\in C_c^\infty(\mathbb{R}_+^{n+1})$, alors $u:=\operatorname{tr} U$ vérifie

$$|u|^p_{B^s_{p,p}} \le C_{s,p,\ell,n} \sum_{|\alpha|=\ell} \int_0^\infty \varepsilon^{p(\ell-s)-1} \|\partial^\alpha U(\cdot,\varepsilon)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, d\varepsilon$$ · Théorème direct

- Uspenskii 1961 Si $s>0$, $1\le p<\infty$, ℓ entier $>s$ et si $u\in B^s_{p,p}(\mathbb{R}^n)$, alors il existe un U avec $u=\operatorname{tr} U$ et

$$\sum_{|\alpha|=\ell} \int_0^\infty \varepsilon^{p(\ell-s)-1} \|\partial^\alpha U(\cdot,\varepsilon)\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}\, d\varepsilon \le C'_{s,p,\ell,n} |u|^p_{B^s_{p,p}}$$ · Théorème inverse

- On peut toujours chosir $u\mapsto U$ linéaire
- M, Russ 2015 Extension à $B^s_{p,q}$, $1\le q<\infty$. Pas toutes les dérivées d'ordre ℓ requises dans le théorème direct. Plus de dérivée contrôlées dans le théorème inverse. Applications au calcul fonctionnel

- M, Russ 2015 On peut utiliser la théorie des espaces à poids comme « boîte noire » pour (re)trouver avec peu de technologie des propriétés du calcul fonctionnel
- Si $s>0$, $1\le p<\infty$, $1\le q<\infty$ et $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R})$, avec $\Phi^{(j)}(0)=0$, $j=0,\dots,[s]$, alors T_Φ envoie continûment $W^{s,p}\cap L^\infty(\mathbb{R}^n)$ vers $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ · Meyer 1981 avec des paraproduits
- Si $0<s<2$, $1<p<\infty$, et $\Phi\in C^2_c(\mathbb{R})$, $\Phi(0)=0$, alors T_Φ envoie continûment le cône positif de $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ vers $B^s_{p,q}(\mathbb{R}^n)$ · Maz'ya 1972 dans $W^{2,p}$ · Bourdaud, Meyer 1991 par interpolation non linéaire
- Si $s>1$, $1\le p<\infty$, ℓ entier $\ge s$, $\Phi\in C^\ell_c(\mathbb{R})$, $\Phi(0)=0$, alors T_Φ envoie continûment $W^{s,p}\cap W^{1,sp}(\mathbb{R}^n)$ dans $W^{s,p}(\mathbb{R}^n)$ · Brezis, M 2001 avec des paraproduits

- Cadre $N \subset \mathbb{R}^m$ sous-variété compacte connexe, $\pi : E \to N$ revêtement de N, B la boule unité de $\mathbb{R}^n$, X espace de fonctions. Peut-on relever toute $u \in X(B; N)$ comme $u = \pi \circ \varphi$, avec $\varphi \in X(B; E)$?
- Exemples standard

  $N = \mathbb{S}^1$, $E = \mathbb{R}$, $\pi(t) = e^{\imath t}$: φ est une phase de u

  $N = \mathbb{RP}^2$, $E = \mathbb{S}^2$, $\pi(x) = \widehat{x} = \{x, -x\}$: φ est une orientation de u

  $N = \mathbb{S}^1$, $E = \mathbb{S}^1$, $\pi(z) = z^2$: φ est une racine carrée de u
- Si E est le revêtement universel, réponse complète dans $W^{s,p}(B; N)$ · Bourgain, Brezis, M 2000 si $N = \mathbb{S}^1$, · Bethuel, Chiron 2007, M, Van Schaftingen 2018 le cas général
- Réponse complète pour la racine carrée dans $W^{s,p}(B; \mathbb{S}^1)$ · M 2008, modulo un résultat de · Brezis, M 2015
- Réponse partielle pour la phase dans $B^s_{p,q}(B; \mathbb{S}^1)$ · M, Russ, Sire 2017

- Si $s > 0$, $1 \leq p < \infty$, $1 \leq q < \infty$ et $sp = n$, alors les fonctions u de $B^s_{p,q}(B; \mathbb{S}^1)$ se relèvent
- Idée de preuve : remonter à $B \times (0,1)$ par une « bonne » extension U
- Alors $|U| \geq 1/2$ sur $B \times (0, \delta)$ · Schoen, Uhlenbeck 1982, Boutet de Monvel, Gabber 1991, Brezis, Nirenberg 1995
- La fonction lisse $w := U/|U|$ a une phase lisse ψ sur $B \times (0, \delta)$
- Estimer ψ en fonction de w, U, u et utiliser la théorie des espaces de Sobolev à poids pour estimer $\varphi := \operatorname{tr} \psi$

- La factorisation est un substitut au relèvement quand les fonctions de $W^{s,p}(B;\mathbb{S}^1)$ ne se relèvent pas
- Si $s>0$ et $1\le p<\infty$, alors toute fonction $u\in W^{s,p}(B;\mathbb{S}^1)$ s'écrit comme $u=e^{\imath\psi}v$, avec $\psi\in W^{s,p}$, $v\in B^{sp}_{1,1}$ + contrôle · Bourgain, Brezis 2003, Bourgain, Brezis, M 2004, M 2010, 2018
- Idées de la preuve
  - Trouver des formules pour ψ et v, faisant intervenir une « bonne » extension U de u
  - Estimer des extensions de ψ et v en fonction de U
  - Utiliser, en plus de la théorie des espaces de Sobolev à poids, l'information géométrique $u:B\to\mathbb{S}^1$ pour contrôler ψ et v : si

$$d(x):=\inf\{\varepsilon>0;\,|U(x,\varepsilon)|\le 1/2\},$$

alors

$$\int_B \frac{1}{[d(x)]^{sp}}\,dx \le C_{s,p,n}|u|^p_{W^{s,p}}$$

Crăciun fericit !