

SUR L'APPROXIMATION CHAMP DE PHASE DES PROBLÈMES VARIATIONNELS FAISANT INTERVENIR DES ENSEMBLES CONNEXES 1D

Antoine Lemenant

LJLL & Université Paris-Diderot Paris 7

Bucarest - 25 Avril 2018

Problème typique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. On note

$$\mathcal{K} := \{K \subset \Omega, \text{ compacts, connexes}\}$$

On note $\mathcal{H}^1$ la mesure de Hausdorff de dimension 1.

Problème typique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. On note

$$\mathcal{K} := \{K \subset \Omega, \text{ compacts, connexes}\}$$

On note $\mathcal{H}^1$ la mesure de Hausdorff de dimension 1. On s'intéresse aux problèmes à "discontinuité libre" de type

$$\min_{K \in \mathcal{K}} E(\Omega \setminus K) + \mathcal{H}^1(K),$$

Problème typique

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert. On note

$$\mathcal{K} := \{K \subset \Omega, \text{ compacts, connexes}\}$$

On note $\mathcal{H}^1$ la mesure de Hausdorff de dimension 1. On s'intéresse aux problèmes à "discontinuité libre" de type

$$\min_{K \in \mathcal{K}} E(\Omega \setminus K) + \mathcal{H}^1(K),$$

où E est une "énergie" provenant d'une EDP, modèle physique, ou autre que l'on cherche à optimiser.

Exemple 1: Problème de Steiner ($E = 0$)

Soit Ω connexe et $\{x_i\}_{i=1..n} \subset \Omega$ un nombre fini de points.

Exemple 1: Problème de Steiner ($E = 0$)

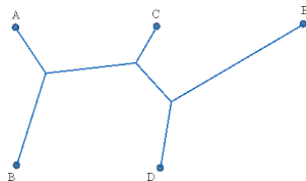
Soit Ω connexe et $\{x_i\}_{i=1..n} \subset \Omega$ un nombre fini de points. On cherche à résoudre

$$\min_{K \in \mathcal{K} : \{x_i\} \subset K} \mathcal{H}^1(K).$$

Exemple 1: Problème de Steiner ($E = 0$)

Soit Ω connexe et $\{x_i\}_{i=1..n} \subset \Omega$ un nombre fini de points. On cherche à résoudre

$$\min_{K \in \mathcal{K} : \{x_i\} \subset K} \mathcal{H}^1(K).$$



Exemple 2: Le problème de distance moyenne

[Buttazzo, Oudet and Stepanov 2002] Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\text{dist}(x, K) \quad .$$

Exemple 2: Le problème de distance moyenne

[Buttazzo, Oudet and Stepanov 2002] Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} \text{dist}(x, K) d\mu(x) \quad .$$

Exemple 2: Le problème de distance moyenne

[Buttazzo, Oudet and Stepanov 2002] Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\mathcal{A}(K) := \int_{\Omega} \text{dist}(x, K) d\mu(x) + \mathcal{H}^1(K).$$

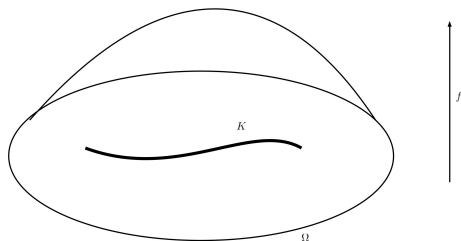
Exemple 2: Le problème de distance moyenne

[Buttazzo, Oudet and Stepanov 2002] Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathcal{P}(\Omega)$,

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{A}(K) := \int_{\Omega} \text{dist}(x, K) d\mu(x) + \mathcal{H}^1(K).$$

Exemple 3: Le problème de "compliance optimale"

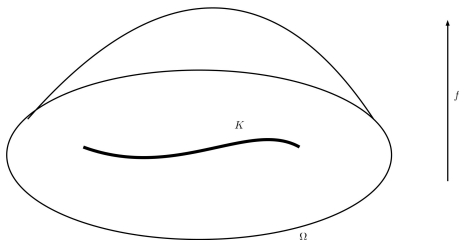
(le "Glue-problem" de Buttazzo)



Exemple 3: Le problème de "compliance optimale"

(le "Glue-problem" de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

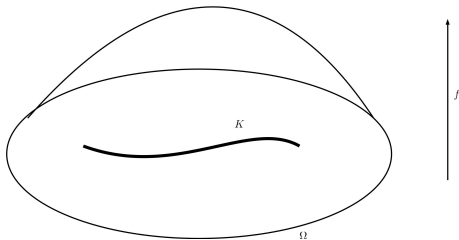


Exemple 3: Le problème de "compliance optimale"

(le "Glue-problem" de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

$$E(\Omega \setminus K) = \int_{\Omega \setminus K} |\nabla v_K|^2 dx$$



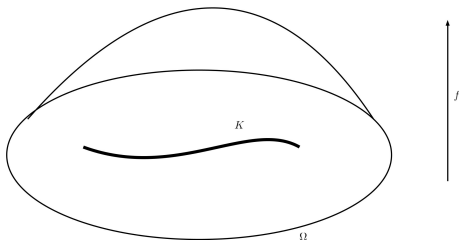
Exemple 3: Le problème de "compliance optimale"

(le "Glue-problem" de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

Alors on considère

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{C}(K) := \int_{\Omega \setminus K} |\nabla v_K|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$



Variante: le problème de p -compliance optimale

Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta_p v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

Variante: le problème de p -compliance optimale

Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta_p v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

$$\min_K C_p(K) = \frac{p}{p-1} \int_{\Omega} |\nabla v_K|^p dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Variante: le problème de p -compliance optimale

Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta_p v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in W_0^{1,p}(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

$$\min_K C_p(K) = \frac{p}{p-1} \int_{\Omega} |\nabla v_K|^p dx + \mathcal{H}^1(K).$$

convergence

$$C_p \rightarrow_{p \rightarrow \infty}^\Gamma \mathcal{A}.$$

Rappel: La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

Rappel: La fonctionnelle de Mumford-Shah

[Mumford-Shah, 1989] pour $g \in L^\infty$

$$\min_{u \in H^1(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} F(u, K) := \int_{\Omega \setminus K} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K) + \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

(à l'origine pour la segmentation d'image, sans contrainte de connexité)



Variante: Mumford-Shah version élasticité (cf. exposé d'Antonin)

$$\min_{u \in LD(\Omega \setminus K) \text{ et } K \in \mathcal{K}} \int_{\Omega \setminus K} \mathbb{C}(e(u)) : e(u) \, dx + \mathcal{H}^1(K)$$

avec

$$e(u) = \frac{1}{2}(Du + Du^T)$$

Exemple 3: Le problème de "compliance optimale"

(le "Glue-problem" de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

Alors on considère

$$\min_{K \in \mathcal{K}} \mathcal{C}(K) := \int_{\Omega} |\nabla v_K|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Ressemble à version "Dirichlet" de Mumford-Shah... mais

Exemple 3: Le problème de "compliance optimale"

(le "Glue-problem" de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

v_K minimise

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{\Omega} v f dx$$

Exemple 3: Le problème de "compliance optimale"

(le "Glue-problem" de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

v_K minimise

$$\min_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx - 2 \int_{\Omega} v f dx = - \int_{\Omega} v_K f = - \int_{\Omega} |\nabla v_K|^2$$

Exemple 3: Le problème de "compliance optimale"

(le "Glue-problem" de Buttazzo) Soit $f \in L^\infty(\Omega)$. Pour chaque $K \in \mathcal{K}$ soit v_K la solution pour

$$\begin{cases} -\Delta v_K = f & \text{dans } \Omega \setminus K \\ v_K \in H_0^1(\Omega \setminus K) \end{cases}$$

$$\min_K \mathcal{C}(K) = \min_K \max_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Lien entre Mumford-Shah et Compliance

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \right) \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \max_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - \left(\sup_{\Phi \in L^2} 2 \int_{\Omega} \langle \nabla v, \Phi \rangle dx - \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \inf_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f - 2 \int_{\Omega} \langle \nabla v, \Phi \rangle dx + \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \inf_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v f + 2 \int_{\Omega} v \operatorname{div}(\Phi) dx + \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \inf_{\Phi \in L^2} \sup_{v \in H_0^1(\Omega \setminus K)} \left(2 \int_{\Omega} v(f + \operatorname{div} \Phi) dx + \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx \right) + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \inf_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

formellement:

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

formellement:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

formellement:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

$\operatorname{div}(\Phi - \nabla \Psi_f) = 0$ dans $\Omega \setminus K$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

formellement:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

$$\operatorname{div}(\Phi - \nabla \Psi_f) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \Phi - \nabla \Psi_f = \nabla^{\perp} v \text{ pour } v \in H^1(\Omega \setminus K)$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

formellement:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

$$\operatorname{div}(\Phi - \nabla \Psi_f) = 0 \text{ dans } \Omega \setminus K$$

$$\Rightarrow \Phi - \nabla \Psi_f = \nabla^{\perp} v \text{ pour } v \in H^1(\Omega \setminus K)$$

$$\Rightarrow \min_{\Phi} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx = \min_{v \in H^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega \setminus K} |\nabla^{\perp} v + \nabla \Psi_f|^2 dx$$

Problème dual

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

formellement:

en notant Ψ_f la solution de $-\Delta \Psi_f = f$ dans Ω , nous aurions:

$\operatorname{div}(\Phi - \nabla \Psi_f) = 0$ dans $\Omega \setminus K$

$\Rightarrow \Phi - \nabla \Psi_f = \nabla^\perp v$ pour $v \in H^1(\Omega \setminus K)$

$\Rightarrow \min_{\Phi} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx = \min_{v \in H^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega \setminus K} |\nabla^\perp v + \nabla \Psi_f|^2 dx$

$\Rightarrow$

$$\min_K \min_{v \in H^1(\Omega \setminus K)} \int_{\Omega} |\nabla v - \nabla^\perp \Psi_f|^2 dx + \mathcal{H}^1(K)$$

Régularité des minimiseurs

Etat de l'art concernant la régularité des minimiseurs

Problème	Régularité des minimiseurs	Référence
Steiner		
Mumford-Shah + connexité		
Mumford-Shah		
Mumford-Shah ver- sion élasticité		
2-compliance		
p -compliance		
Distance Moyenne		

Etat de l'art concernant la régularité des minimiseurs

Problème	Régularité des minimiseurs	Référence
Steiner	Union finie de segments avec points triples uniquement	folklorique
Mumford-Shah + connexité		
Mumford-Shah		
Mumford-Shah version élasticité		
2-compliance		
p -compliance		
Distance Moyenne		

Etat de l'art concernant la régularité des minimiseurs

Problème	Régularité des minimiseurs	Référence
Steiner	Union finie de segments avec points triples unique-ment	folklorique
Mumford-Shah + connexité	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Bonnet (1996)
Mumford-Shah		
Mumford-Shah version élasticité		
2-compliance		
p -compliance		
Distance Moyenne		

Etat de l'art concernant la régularité des minimiseurs

Problème	Régularité des minimiseurs	Référence
Steiner	Union finie de segments avec points triples unique-ment	folklorique
Mumford-Shah + connexité	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Bonnet (1996)
Mumford-Shah	Problème ouvert (mais presque démontrée par Bonnet)	la fameuse conjecture de Mumford-Shah (1989)
Mumford-Shah ver- sion élasticité		
2-compliance		
p -compliance		
Distance Moyenne		

Etat de l'art concernant la régularité des minimiseurs

Problème	Régularité des minimiseurs	Référence
Steiner	Union finie de segments avec points triples uniquement	folklorique
Mumford-Shah + connexité	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Bonnet (1996)
Mumford-Shah	Problème ouvert (mais presque démontrée par Bonnet)	la fameuse conjecture de Mumford-Shah (1989)
Mumford-Shah version élasticité	$C^{1,\alpha}$ localement $\mathcal{H}^1$ p.p.	(2019?) travail en cours avec Babadjian et Iurlano
2-compliance		
p -compliance		
Distance Moyenne		

Etat de l'art concernant la régularité des minimiseurs

Problème	Régularité des minimiseurs	Référence
Steiner	Union finie de segments avec points triples uniquement	folklorique
Mumford-Shah + connexité	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Bonnet (1996)
Mumford-Shah	Problème ouvert (mais presque démontrée par Bonnet)	la fameuse conjecture de Mumford-Shah (1989)
Mumford-Shah version élasticité	$C^{1,\alpha}$ localement $\mathcal{H}^1$ p.p.	(2019?) travail en cours avec Babadjian et Iurlano
2-compliance	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Chambolle-Lamboley-L.-Stepanov (2017)
p -compliance		
Distance Moyenne		

Etat de l'art concernant la régularité des minimiseurs

Problème	Régularité des minimiseurs	Référence
Steiner	Union finie de segments avec points triples uniquement	folklorique
Mumford-Shah + connexité	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Bonnet (1996)
Mumford-Shah	Problème ouvert (mais presque démontrée par Bonnet)	la fameuse conjecture de Mumford-Shah (1989)
Mumford-Shah version élasticité	$C^{1,\alpha}$ localement $\mathcal{H}^1$ p.p.	(2019?) travail en cours avec Babadjian et Iurlano
2-compliance	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Chambolle-Lambole-L.-Stepanov (2017)
p -compliance	question ouverte (mais raisonnable)	
Distance Moyenne		

Etat de l'art concernant la régularité des minimiseurs

Problème	Régularité des minimiseurs	Référence
Steiner	Union finie de segments avec points triples unique-ment	folklorique
Mumford-Shah + connexité	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Bonnet (1996)
Mumford-Shah	Problème ouvert (mais presque démontrée par Bonnet)	la fameuse conjecture de Mumford-Shah (1989)
Mumford-Shah version élasticité	$C^{1,\alpha}$ localement $\mathcal{H}^1$ p.p.	(2019?) travail en cours avec Babadjian et Iurlano
2-compliance	Union finie de courbes $C^{1,\alpha}$ avec points triples	Chambolle-Lamboley-L.-Stepanov (2017)
p -compliance	question ouverte (mais raisonnable)	
Distance Moyenne	Union finie de courbes Lipschitz avec points triples et angles, $C^{1,1}$ au voisinage des points triples	Buttazzo-Stepanov (2003) Santambrogio-Tilli (2005) L. (2009)

Approximation par champ de phase

Fonctionnelle de Cahn-Hilliard

Soit $u = \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (l'état de “phase” d'un liquide) et $\varepsilon > 0$. Soit

Fonctionnelle de Cahn-Hilliard

Soit $u = \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (l'état de "phase" d'un liquide) et $\varepsilon > 0$. Soit

$$MM_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2(1-u)^2 dx$$

Soit u_ε un minimiseur de MM_ε sous la contrainte $\int_{\Omega} u = c$ et supposons que $MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$.

Fonctionnelle de Cahn-Hilliard

Soit $u = \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (l'état de "phase" d'un liquide) et $\varepsilon > 0$. Soit

$$MM_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2(1-u)^2 dx$$

Soit u_ε un minimiseur de MM_ε sous la contrainte $\int_{\Omega} u = c$ et supposons que $MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$.

Alors (à sous suite près) $u_\varepsilon \rightarrow \chi_A$ p.p. pour un certain $A \subset \Omega$ avec $|A| = c$,

Fonctionnelle de Cahn-Hilliard

Soit $u = \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (l'état de "phase" d'un liquide) et $\varepsilon > 0$. Soit

$$MM_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2(1-u)^2 dx$$

Soit u_ε un minimiseur de MM_ε sous la contrainte $\int_{\Omega} u = c$ et supposons que $MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$.

Alors (à sous suite près) $u_\varepsilon \rightarrow \chi_A$ p.p. pour un certain $A \subset \Omega$ avec $|A| = c$,

$$MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow \alpha Per(A, \Omega)$$

Fonctionnelle de Cahn-Hilliard

Soit $u = \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (l'état de "phase" d'un liquide) et $\varepsilon > 0$. Soit

$$MM_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2(1-u)^2 dx$$

Soit u_ε un minimiseur de MM_ε sous la contrainte $\int_{\Omega} u = c$ et supposons que $MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$.

Alors (à sous suite près) $u_\varepsilon \rightarrow \chi_A$ p.p. pour un certain $A \subset \Omega$ avec $|A| = c$,

$$MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow \alpha Per(A, \Omega)$$

et A minimise $Per(A, \Omega)$ sous la contrainte $|A| = c < |\Omega|$.

Fonctionnelle de Cahn-Hilliard

Soit $u = \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ (l'état de "phase" d'un liquide) et $\varepsilon > 0$. Soit

$$MM_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} u^2(1-u)^2 dx$$

Soit u_ε un minimiseur de MM_ε sous la contrainte $\int_{\Omega} u = c$ et supposons que $MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq C$.

Alors (à sous suite près) $u_\varepsilon \rightarrow \chi_A$ p.p. pour un certain $A \subset \Omega$ avec $|A| = c$,

$$MM_\varepsilon(u_\varepsilon) \rightarrow \alpha Per(A, \Omega)$$

et A minimise $Per(A, \Omega)$ sous la contrainte $|A| = c < |\Omega|$.
(en termes de Γ -convergence).

Quelques approximations de type “champ de phase”

(liste non exhaustive)

Quelques approximations de type “champ de phase”

(liste non exhaustive)

[L. Ambrosio, V. Tortorelli] - Mumford-Shah (1992)

Quelques approximations de type “champ de phase”

(liste non exhaustive)

[L. Ambrosio, V. Tortorelli] - Mumford-Shah (1992)

[B. Bourdin, D. Bucur, E. Oudet,] - partitions optimales (2009)

Quelques approximations de type “champ de phase”

(liste non exhaustive)

[L. Ambrosio, V. Tortorelli] - Mumford-Shah (1992)

[B. Bourdin, D. Bucur, E. Oudet,] - partitions optimales (2009)

[E. Bretin, S. Masnou, E. Oudet] - Flot de Willmore (2015)

Quelques approximations de type “champ de phase”

(liste non exhaustive)

[L. Ambrosio, V. Tortorelli] - Mumford-Shah (1992)

[B. Bourdin, D. Bucur, E. Oudet,] - partitions optimales (2009)

[E. Bretin, S. Masnou, E. Oudet] - Flot de Willmore (2015)

[E. Oudet, F. Santambrogio] - problème d'irrigation (2016)

etc...

Approximation d'Ambrosio-Tortorelli

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^1(K)$$

Approximation d'Ambrosio-Tortorelli

$$\int_{\Omega} \varphi^2 |\nabla u|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \varphi|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} (1 - \varphi)^2$$

Approximation du problème de Steiner

Approximation du problème de Steiner

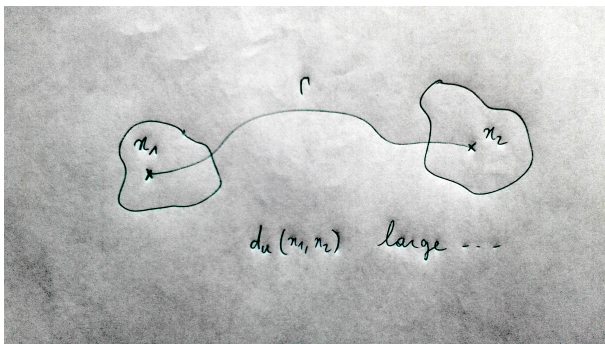
Pour $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ (in H^1) on note

$$\text{dist}_u(x, y) = \inf_{\Gamma: x \rightsquigarrow y} \int_{\Gamma} u \, d\mathcal{H}^1$$

Approximation du problème de Steiner

Pour $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ (in H^1) on note

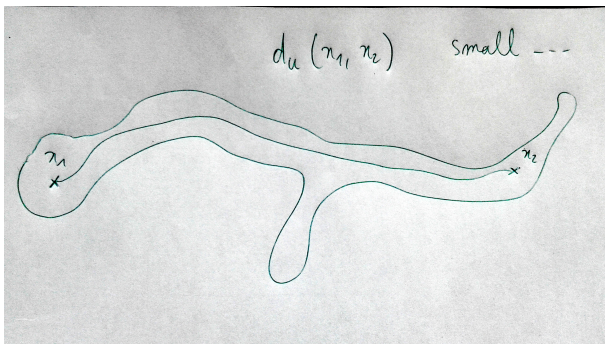
$$\text{dist}_u(x, y) = \inf_{\Gamma: x \rightsquigarrow y} \int_{\Gamma} u \, d\mathcal{H}^1$$



Approximation du problème de Steiner

Pour $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ (in H^1) on note

$$\text{dist}_u(x, y) = \inf_{\Gamma: x \rightsquigarrow y} \int_{\Gamma} u \, d\mathcal{H}^1$$



Approximation du problème de Steiner

Pour $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\varepsilon(u) = \underbrace{\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2}_{\text{Energy term}} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k>0} \text{dist}_u(x_0, x_k)}_{\text{Steiner term}}$$

Approximation du problème de Steiner

Pour $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\varepsilon(u) = \underbrace{\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2}_{\text{Terme de type Modica-Mortola} \simeq \mathcal{H}^1(\{u \simeq 0\})} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k>0} \text{dist}_u(x_0, x_k)}$$

Approximation du problème de Steiner

Pour $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\varepsilon(u) = \underbrace{\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2}_{\text{Terme de type Modica-Mortola} \simeq \mathcal{H}^1(\{u \simeq 0\})} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k>0} \text{dist}_u(x_0, x_k)}_{\text{Terme forçant la connexité}}$$

Approximation du problème de Steiner

Pour $u : \Omega \rightarrow [0, 1]$,

$$F_\varepsilon(u) = \underbrace{\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2}_{\text{Terme de type Modica-Mortola} \simeq \mathcal{H}^1(\{u \simeq 0\})} + \underbrace{\frac{1}{\varepsilon} \sum_{k>0} \text{dist}_u(x_0, x_k)}_{\text{Terme forçant la connexité}}$$

Convergence [L. - Santambrogio (2014)] (voir aussi [Bonnivard-L.-Santambrogio (2015)])

si u_ε minimise F_ε et $\text{dist}_{u_\varepsilon}(x_0, \cdot) \rightarrow d$ (uniformément) alors l'ensemble $\{d = 0\}$ est une solution du problème de Steiner.

Approximation du problème de Compliance

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Approximation du problème de Compliance

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_K \min_{\{\Phi \in L^2 \text{ s.t. } \operatorname{div} \Phi + f = 0 \text{ in } \Omega \setminus K\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \mathcal{H}^1(K).$$

Approximation du problème de Compliance

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \min_{\{\Phi \in L^2\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 dx \right).$$

Approximation du problème de Compliance

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \min_{\{\Phi \in L^2\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 dx \right) \\ \left(+ \frac{1}{c_\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_u(x, x_0) |\text{div} \Phi + f| dx \right)$$

Approximation du problème de Compliance

Rappel: $\min_K \mathcal{C}(K) =$

$$\min_{u \in H^1(\Omega)} \min_{\{\Phi \in L^2\}} \int_{\Omega} |\Phi|^2 dx + \left(\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2 dx \right) \\ \left(+ \frac{1}{c_\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_u(x, x_0) |\text{div} \Phi + f| dx \right)$$

Théorème

[Bonnivard, L., Santambrogio] $\rightarrow$ gamma-converge vers $\mathcal{C}$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Etude de la fonctionnelle d'approximation

A propos de la fonctionnelle d'approximation

Pour $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{k>0} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x_k)$$

A propos de la fonctionnelle d'approximation

For $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ and $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

A propos de la fonctionnelle d'approximation

For $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ and $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

A propos de la fonctionnelle d'approximation

For $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ and $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Théorème [Bonnivard-L.-Milot]

A propos de la fonctionnelle d'approximation

For $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ and $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Théorème [Bonnivard-L.-Milot]

- Il existe un minimiseur pour F_ε sur $H^1(\Omega)$.

A propos de la fonctionnelle d'approximation

For $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ and $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Théorème [Bonnivard-L.-Milot]

- Il existe un minimiseur pour F_ε sur $H^1(\Omega)$.
- Tout minimiseur est dans $W^{1,p}(\overline{\Omega})$ pour tout $p > 2$, en particulier, est $C^{0,\alpha}$ sur $\overline{\Omega}$ pour tout $\alpha < 1$. (NB: mais n'est pas Lip)

A propos de la fonctionnelle d'approximation

For $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ and $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Théorème [Bonnivard-L.-Milot]

- Il existe un minimiseur pour F_ε sur $H^1(\Omega)$.
- Tout minimiseur est dans $W^{1,p}(\overline{\Omega})$ pour tout $p > 2$, en particulier, est $C^{0,\alpha}$ sur $\overline{\Omega}$ pour tout $\alpha < 1$. (NB: mais n'est pas Lip)

NB: fonctionne aussi pour la fonctionnelle d'approximation de compliance...

A propos de la fonctionnelle d'approximation

Pour $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

A propos de la fonctionnelle d'approximation

Pour $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Principales difficultés:

- $u \mapsto \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$ semicontinue inférieure pour la convergence faible H^1 ?

A propos de la fonctionnelle d'approximation

Pour $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Principales difficultés:

- $u \mapsto \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$ semicontinue inférieure pour la convergence faible H^1 ?
- $u \mapsto \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$ différentiable ? (pas d'équation....)

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

STEP I : cas des mesure discrètes $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$.

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

STEP I : cas des mesure discrètes $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$.

$$\inf_u F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{dist}_{u^2+\delta_\varepsilon}(x_0, x_k)$$

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

STEP I : cas des mesure discrètes $\mu = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_{x_i}$.

$$\begin{aligned} \inf_u F_\varepsilon(u) &= \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \alpha_i \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x_k) \\ &= \inf_{(u, \Gamma)} G_\varepsilon(u, \Gamma) := \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \alpha_i (u^2 + \delta_\varepsilon) d\mathcal{H}^1 \end{aligned}$$

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Minimisation à Γ fixée.

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Minimisation à Γ fixée.

$$\min_u \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \alpha_i (u^2 + \delta_{\varepsilon}) d\mathcal{H}^1$$

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Minimisation à Γ fixée.

$$\min_u \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \alpha_i (u^2 + \delta_{\varepsilon}) d\mathcal{H}^1$$

u satisfait:

$$-\varepsilon \Delta u + \frac{1}{2\varepsilon} (1 - u) = \frac{2}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \alpha_i u \mathcal{H}^1|_{\Gamma_i}$$

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

FAIT : si Γ est Ahlfors-régulier, i.e. $\exists \Lambda > 0$ tel que

$$Al(\Gamma) := \sup_{r>0} \frac{\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B(0, r))}{r} \leq \Lambda,$$

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

FAIT : si Γ est Ahlfors-régulier, i.e. $\exists \Lambda > 0$ tel que

$$Al(\Gamma) := \sup_{r>0} \frac{\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B(0, r))}{r} \leq \Lambda,$$

alors $u\mathcal{H}^1|_{\Gamma} \in (W^{1,p})'$ (voir [Ziemer]) et

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

FAIT : si Γ est Ahlfors-régulier, i.e. $\exists \Lambda > 0$ tel que

$$Al(\Gamma) := \sup_{r>0} \frac{\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B(0, r))}{r} \leq \Lambda,$$

alors $u\mathcal{H}^1|_{\Gamma} \in (W^{1,p})'$ (voir [Ziemer]) et

$$\min_u \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \alpha_i (u^2 + \delta_{\varepsilon}) d\mathcal{H}^1$$

admet un minimiseur $W^{1,p}$ pour $p > 2$ (donc est $C^{0,\alpha}$). De plus $\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C\Lambda\|\mu\|$.

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

FAIT : si Γ est Ahlfors-régulier, i.e. $\exists \Lambda > 0$ tel que

$$A(\Gamma) := \sup_{r>0} \frac{\mathcal{H}^1(\Gamma \cap B(0, r))}{r} \leq \Lambda,$$

alors $u\mathcal{H}^1|_{\Gamma} \in (W^{1,p})'$ (voir [Ziemer]) et

$$\min_u \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^n \int_{\Gamma_i} \alpha_i (u^2 + \delta_{\varepsilon}) d\mathcal{H}^1$$

admet un minimiseur $W^{1,p}$ pour $p > 2$ (donc est $C^{0,\alpha}$). De plus $\|u\|_{C^{0,\alpha}} \leq C\Lambda\|\mu\|$. consequence:

$$\inf_{(u,\Gamma) \text{ tel que } A(\Gamma) \leq \Lambda} F_{\varepsilon}(u, \Gamma)$$

admet un minimiseur $C^{0,\alpha}$.

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Puis, estimées $C^{0,\alpha}$ uniformes $\Rightarrow$ min en Γ de $\min_u F_\varepsilon(u, \Gamma)$ existe...

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Puis, estimées $C^{0,\alpha}$ uniformes $\Rightarrow$ min en Γ de $\min_u F_\varepsilon(u, \Gamma)$ existe... Remarque:

d'après [De Pauw, L., Millot] les courbes Γ sont $C^{1,\alpha}$!

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Ensuite on prouve :

$$\min_{(u, \Gamma) \text{ tel que } A(\Gamma) \leq \Lambda} F_\varepsilon(u, \Gamma) = \inf_{(u, \Gamma)} F_\varepsilon(u, \Gamma).$$

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Step II: mesures générales. On utilise

$$\mu_n \rightarrow \mu \quad (\text{weakly}^*)$$

avec μ_n discrète.

Fonctionnelle d'approximation: schéma de preuve

Step II: mesures générales. On utilise

$$\mu_n \rightarrow \mu \quad (\text{weakly}^*)$$

avec μ_n discrète. On a $\Gamma_n \rightarrow \Gamma$ et u_n converge dans $C^{0,\alpha}$.

Un peu plus sur la convergence des minimiseurs

Fonctionnelle d'approximation: convergence

Pour $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Fonctionnelle d'approximation: convergence

Pour $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Convergence (rappel) [L. - Santambrogio (2014)] (voir aussi [Bonnivard-L.-Santambrogio (2015)])

si u_ε minimise F_ε et $\text{dist}_{u_\varepsilon}(x_0, \cdot) \rightarrow d$ (uniformément) alors l'ensemble $\{d = 0\}$ est une solution du problème de Steiner.

Fonctionnelle d'approximation: convergence

Pour $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Convergence (rappel) [L. - Santambrogio (2014)] (voir aussi [Bonnivard-L.-Santambrogio (2015)])

si u_ε minimise F_ε et $\text{dist}_{u_\varepsilon}(x_0, \cdot) \rightarrow d$ (uniformément) alors l'ensemble $\{d = 0\}$ est une solution du problème de Steiner.

Théorème [Bonnivard-L.-Milot]

Soit u_ε une suite de minimiseurs pour F_ε avec $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors, pour tout $t \in (0, 1)$, (et à sous suite près), $\{u_\varepsilon \leq t\}$ converge au sens de Hausdorff vers un ensemble S , qui est solution du problème de Steiner relatif à μ .

Fonctionnelle d'approximation: convergence

Pour $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_\Omega (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Omega \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Convergence (rappel) [L. - Santambrogio (2014)] (voir aussi [Bonnivard-L.-Santambrogio (2015)])

si u_ε minimise F_ε et $\text{dist}_{u_\varepsilon}(x_0, \cdot) \rightarrow d$ (uniformément) alors l'ensemble $\{d = 0\}$ est une solution du problème de Steiner.

Théorème [Bonnivard-L.-Milot]

Soit u_ε une suite de minimiseurs pour F_ε avec $\varepsilon \rightarrow 0$. Alors, pour tout $t \in (0, 1)$, (et à sous suite près), $\{u_\varepsilon \leq t\}$ converge au sens de Hausdorff vers un ensemble S , qui est solution du problème de Steiner relatif à μ .

$$\min\{\mathcal{H}^1(K) \ ; \ K \text{ connexe et } \text{supp}(\mu) \subset K\}.$$

Extension en 3D

rappel approximation 2D

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Approximation 3D: Energie d'ordre 2

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Approximation 3D: Energie d'ordre 2

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2 + \delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Proposition [Bonnivard, Bretin- L. (preprint 2018)]

Soit $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ un segment et

$$G_\varepsilon(u) := \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1 - u)^2$$

Approximation 3D: Energie d'ordre 2

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, $\varepsilon, \delta_\varepsilon > 0$ et $u \in H^1(\Omega)$ soit

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Omega} \text{dist}_{u^2+\delta_\varepsilon}(x_0, x) d\mu(x)$$

Proposition [Bonnivard, Bretin- L. (preprint 2018)]

Soit $S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ un segment et

$$G_\varepsilon(u) := \varepsilon \int_{\Omega} |\Delta u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon} \int_{\Omega} (1-u)^2$$

Alors

$$\Gamma - \lim G_\varepsilon = \begin{cases} c_0 \mathcal{H}^1(S) & \text{si } u = 1 \text{ p.p.} \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Approximation 3D: Energie d'ordre 2

La constante étant

$$c_0 := 2\pi \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} r(\varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r))^2 + r(1 - \varphi(r))^2 dr \right. \\ \left. \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = 1 \right\}.$$

Approximation 3D: Energie d'ordre 2

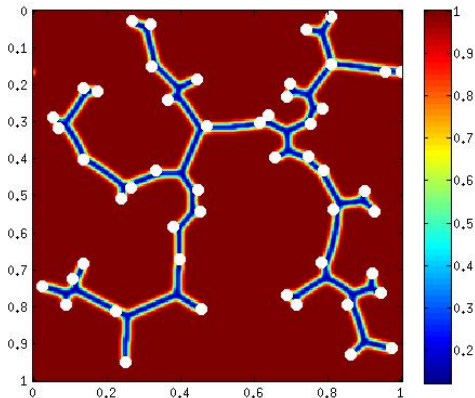
La constante étant

$$c_0 := 2\pi \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^+} r(\varphi''(r) + \frac{1}{r}\varphi'(r))^2 + r(1 - \varphi(r))^2 dr \right. \\ \left. \varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0, \lim_{r \rightarrow +\infty} \varphi(r) = 1 \right\}.$$

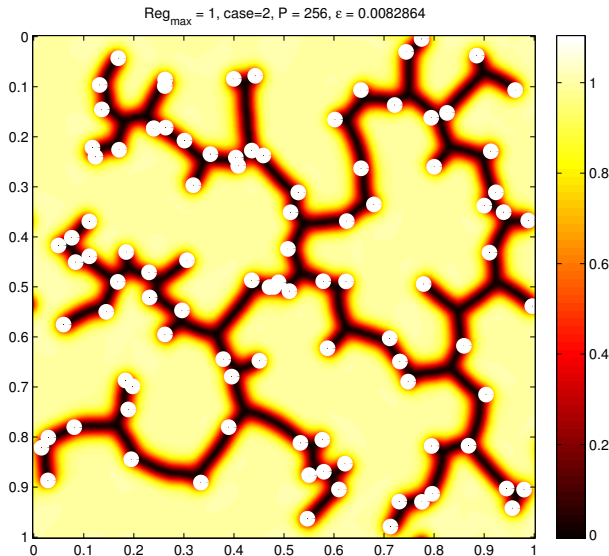
NB: le minimiseur du problème ci dessus existe et est unique.

Résultats numériques (par Elie Bretin)

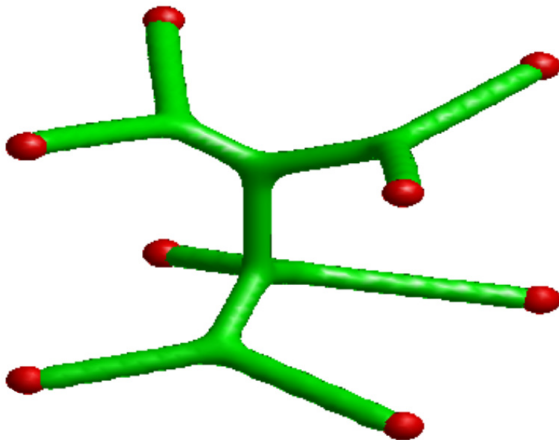
Simulation: Steiner avec 50 points aléatoires



Simulation: Steiner avec 100 points aléatoires



Simulation: Steiner sur le cube en 3D



autres approches de type "champ de phase" pour Steiner

[A. Chambolle, B. Merlet, L. Ferrari] preprint ArXiv sept. 2016

[M. Bonafini, G. Orlandi, E. Oudet] preprint ArXiv oct. 2016

Merci pour votre attention!