Développement asymptotique sur l' espace de Wiener

Ciprian A. Tudor

Université de Lille

Analyse stochastique et sujets connexes
IMAR, Bucarest
7 Mai 2019

travail en commun avec Nakahiro Yoshida (Tokyo)

1. Les principales hypoth èses
2. Comportement asymptotique de la fonction caractéristique
3. La densité approximative

$\rightarrow$ le comportement asymptotique constitue une étape supplémentaire dans la convergence en distribution d'une suite de variables aléatoires

$\rightarrow$il concerne la convergence des densités

$\rightarrow$Cela permet d'obtenir la convergence des densités et également le terme de second ordre dans le comportement asymptotique de la densité.

$\rightarrow$ Il a diverses applications aux statistiques et aux théor èmes limites

Le contexte

Soit une suite de variables aléatoires $(F_N)_{N\geq 1}$. On suppose que

$$F_N \to^{(d)} F$$

ou F est une variable al'éatoire de densité p.

Soit p_{F_N} la densité de F_N pour tout $N \geq 1$ (on suppose que cette densité existe)

En trouvant l'expansion asymptotique, nous entendons trouver une séquence $(p_N)_{N\geq 1}$ of the form

$$p_N(x) = p(x) + \gamma_N \varphi(x)$$

telle que $\gamma_N \to_{N\to\infty} 0$ qui approxime p_{F_N} dans le sens suivant

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |p_{F_N}(x) - p_N(x)| = o(\gamma_N)$$

- en fait, nous allons prouver une approximation plus forte

$\rightarrow$ La fonction p_N est généralement appelé "la densité approximative"

$\rightarrow$ on obtient

$$p_{F_N}(x) = p(x) + \gamma_N \varphi(x) + o(\gamma_N)$$

nous devons assumer pour que la convergence dans la distribution

Le cas des matingales : si $(M_N)_{N\geq 1}$ est une suite aléatoire qui converge vers converging to $Z \sim N(0,1)$ telle que M_N est la valeur terminale d'une martingale $\langle M \rangle_N$est le crochet, on suppose

$$\langle M \rangle_N \to_{N\to\infty} 1 \text{ en probabilité}$$

et

$$\left(M_N, \frac{\langle M \rangle_N - 1}{\gamma_N} \right) \to^{(d)}_{N\to\infty} (Z_1, Z_2)$$

ou (Z_1, Z_2)est un vecteur aléatoire et $\gamma_N \to_{N\to\infty} 0$.

hypoth èses

Soit une suite aléatoire $(F_N)_{N\geq 1}$ in $\mathbb{R}^d$ de la forme

$$F_N = \left(F_N^{(1)}, \dots, F_N^{(d)} \right).$$

Notons $\Lambda(F_N) = (\Lambda_{i,j})_{i,j=1,..,d}$ la **matrice de Stein-Malliavin** avec les composantes

$$\Lambda_{i,j} = \langle DF_N^{(i)}, D(-L)^{-1} F_N^{(j)} \rangle_H$$

pour tous $i, j = 1, .., d$.
D et la dérivée de Malliavin et L est l'opérateur d'Onstein-Uhlenbeck

Hypoth èses

We consider the following assumptions :

[[C1]] —Il existe une matrice symétrique positif défini $d \times d$ dimensionnelle C et une suite déterministe $(\gamma_N)_{N\geq 1}$qui converge vers 0 quand $N \to \infty$ telle que

$$\left(F_N, \gamma_N^{-1}(\Lambda(F_N) - C)\right)$$

converge en loi vers un vecteur gaussien

$$(Z_1, Z_2)$$

tel que $Z_1 = (Z_1^{(1)}, \ldots, Z_1^{(d)})$, $Z_2 = (Z_2^{(k,l)})_{k,l=1,..,d}$avec

$$\mathbf{E}\mathbf{Z}_1^{(\mathbf{i})}\mathbf{Z}_1^{(\mathbf{j})} = \mathbf{C}_{\mathbf{i},\mathbf{j}}, \text{ pour tous } \mathbf{i}, \mathbf{j} = 1, .., \mathbf{d},$$

ou $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{\mathbf{i},\mathbf{j}})_{\mathbf{i},\mathbf{j}=1,..\mathbf{d}}$.

En particulier

$$\mathbf{F}_\mathbf{N} \to^{(\mathbf{d})} \mathbf{N}(0, \mathbf{C}).$$

Dans notre hypoth èse [C1], le rôle de la tranche de martingale est joué par

$$\langle \mathbf{F} \rangle_{\mathbf{N}} = \langle \mathbf{D}\mathbf{F}_{\mathbf{N}}, \mathbf{D}(-\mathbf{L})^{-1}\mathbf{F}_{\mathbf{N}} \rangle_{\mathbf{H}}$$

qui devient $\frac{1}{\mathbf{q}}\|\mathbf{D}\mathbf{F}_{\mathbf{N}}\|_{\mathbf{H}}^2$ quand $\mathbf{F}_{\mathbf{N}}$ est dans le chaos de Wiener d'ordre $\mathbf{q}$

Le choix est naturel, suggéré par l'identité

$$\mathbf{E}\mathbf{F}_{\mathbf{N}}^2 = \mathbf{E}\langle \mathbf{F} \rangle_{\mathbf{N}}^2$$

But : trouver le développement asymptotique de la séquence $(\mathbf{F_N})_\mathbf{N}$

i.e trouver $\mathbf{p_N}$

$$\mathbf{p_N}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}(\mathbf{x}) + \gamma_\mathbf{N}\varphi(\mathbf{x})$$

such that $\gamma_\mathbf{N} \to_{\mathbf{N}\to\infty} 0$ which approximates the density $\mathbf{p_{F_N}}$ in the following sense

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}} |\mathbf{x}^\alpha| \, |\mathbf{p_{F_N}}(\mathbf{x}) - \mathbf{p_N}(\mathbf{x})| = \mathbf{o}(\gamma_\mathbf{N})$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

- En fait, nous allons travailler avec la densité "tronquée" ou "locale" de $\mathbf{F_N}$ au lieu de $\mathbf{p_{F_N}}$.

- cela permettra, entre autres, d'éviter les problèmes d'intégrabilité sur $\mathbb{R}$, les moments exponentiels, etc.

-Nos résultats permettront également de généraliser l'extension de type Edgeworth pour les séquences sur le chaos de Wiener à une classe plus large de fonctions mesurables.

Idée principale pour obtenir l'extension asymptotique :

$\rightarrow$ analyser le comportement asymptotique de la fonction caractéristique de $\mathbf{F_N}$.

$\rightarrow$ alors, on trouve la densité approximative $\mathbf{p_N}$ par inversion de Fourier de la partie dominante de la fonction caractéristique

$\rightarrow$ Il faut assurer l'intégrabilité sur $\mathbb{R}$ de la fonction caractéristique

Premi èrement, nous analysons le comportement asymptotique en tant que $\mathbf{N} \to \infty$ de la fonction caractéristique de $\mathbf{F_N}$.

rightarrow Afin d'éviter des probl èmes liés Ã l'intégrabilité sur toute la ligne réelle, nous allons travailler sous troncature, en ce sens que nous garderons toujours le facteur multiplicatif $\Psi_{\mathbf{N}}$

Interpolation

Considérons l'interpolation tronquée

$$\varphi_N^{\Psi}(\theta, \boldsymbol{\lambda}) = E\left(\Psi_N e^{\mathrm{i}\theta\langle\boldsymbol{\lambda}, F_N\rangle - (1-\theta^2)\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}}{2}}\right).$$

On a

$$\varphi_N(1, \boldsymbol{\lambda}) = E(\Psi_N e^{i\langle\boldsymbol{\lambda}, F_N\rangle}),$$

the "truncated" characteristic function of F_N, and

$$\varphi_N(0, \boldsymbol{\lambda}) = (E\Psi_N)e^{-\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}}{2}},$$

the "truncated" characteristic function of the limit in law of F_N.

En écrivant

$$\varphi_N^{\Psi}(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_N^{\Psi}(1, \boldsymbol{\lambda}) = \varphi_N^{\Psi}(0, \boldsymbol{\lambda}) + \int_0^1 d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_N^{\Psi}(\theta, \boldsymbol{\lambda})$$

nous devrons analyser le comportement du dérivé de $\varphi_N^{\Psi}(\theta, \boldsymbol{\lambda})$ par rapport a θ.

-on étudie le comportement de

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_N^{\Psi}(\theta, \boldsymbol{\lambda})$$

par le calcul de Malliavin

Nous avons les résultats suivants.

On suppose **[C1]** - **[C3]** et

$$E\left(Z_2^{(k,l)}|Z_1\right) = \sum_{a=1}^{d} \rho_{k,l}^{a} Z_1^{(a)}$$

pour tous $k, l = 1, .., d$, where (Z_1, Z_2) est un vecteur gaussien. Alors on a la convergence

$$\gamma_N^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} \varphi_N^{\Psi}(\theta, \boldsymbol{\lambda}) \to_{N\to\infty} -\mathtt{i}\theta^2 \left(\sum_{i,j,k,a=1}^{d} \lambda_j \lambda_k \lambda_i \rho_{j,k}^{a} C_{ia} \right) e^{-\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C \boldsymbol{\lambda}}{2}}.$$

Pour la preuve, on utilise $F_N^{(i)} = \delta D(-L)^{-1} F_N^{(i)}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N^{\Psi}(\theta,\boldsymbol{\lambda}) &= E\left(\Psi_N e^{\mathrm{i}\theta\langle\boldsymbol{\lambda},F_N\rangle-(1-\theta^2)\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}}{2}}\left(i\langle\boldsymbol{\lambda},F_N\rangle+\theta\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}\right)\right) \\
&= \mathrm{i}E\left(\Psi_N e^{\mathrm{i}\theta\langle\boldsymbol{\lambda},F_N\rangle-(1-\theta^2)\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}}{2}}\sum_{j=1}^{d}\lambda_j\delta D(-L)^{-1}F_N^{(j)}\right) \\
&\quad +\theta\sum_{j,k=1}^{d}\lambda_j\lambda_k C_{j,k}E\left(\Psi_N e^{\mathrm{i}\theta\langle\boldsymbol{\lambda},F_N\rangle-(1-\theta^2)\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}}{2}}\right)
\end{aligned}$$

On utilise la dualité de D et δ pour obtenir

$$
\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N^{\Psi}(\theta,\boldsymbol{\lambda}) \\
= \quad & -\theta \sum_{j,k=1}^{d} \lambda_j\lambda_k E\left(\Psi_N e^{\mathrm{i}\theta\langle\boldsymbol{\lambda},F_N\rangle-(1-\theta^2)\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}}{2}}\right. \\
& \left.\left(\langle DF_N^{(k)}, D(-L)^{-1}F_N^{(j)}\rangle_H - C_{j,k}\right)\right) \\
& +\mathrm{i}\sum_{j=1}^{d}\lambda_j E\left(e^{\mathrm{i}\theta\langle\boldsymbol{\lambda},F_N\rangle-(1-\theta^2)\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}}{2}}\langle D\Psi_N, D(-L)^{-1}F_N^{(j)}\rangle_H\right) \\
:= \quad & A_N(\theta,\boldsymbol{\lambda}) + B_N(\theta,\boldsymbol{\lambda}).
\end{aligned}
$$

On a la relation

$$\varphi_N^{\Psi}(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_N^{\Psi}(1,\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_N^{\Psi}(0,\boldsymbol{\lambda}) + \int_0^1 d\theta \frac{\partial}{\partial\theta}\varphi_N^{\Psi}(\theta,\boldsymbol{\lambda})$$

et donc

$$\varphi_N^{\Psi}(\boldsymbol{\lambda}) \sim E(\Psi_N) e^{-\frac{\lambda^T C\lambda}{2}}$$

$$+\gamma_N \int_0^1 d\theta \left(-\mathrm{i}\theta^2 \left(\sum_{i,j,k,a=1}^{d} \lambda_j\lambda_k\lambda_i\rho_{j,k}^a C_{ia} \right) e^{-\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C\boldsymbol{\lambda}}{2}} \right)$$

et

$$\varphi_N^{\Psi}(\boldsymbol{\lambda}) = \varphi_N(\lambda) + o_\lambda(\gamma_N)$$

On a noté

$$\varphi_N(\boldsymbol{\lambda}) = e^{-\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C \boldsymbol{\lambda}}{2}} - \mathtt{i}\gamma_N \frac{1}{3} \left(\sum_{i,j,k,a=1}^{d} \lambda_j \lambda_k \lambda_i \rho_{j,k}^a C_{ia} \right) e^{-\frac{\boldsymbol{\lambda}^T C \boldsymbol{\lambda}}{2}}.$$

c'est la partie dominante de la fonction caractéristique (tronquée) de F_N

Rappel : notre but est de trouver le terme de premier et de second ordre dans l'extension asymptotique de la densité de F_N

$$p_N(x) = p(x) + \gamma_N \varphi(x)$$

telle que $\gamma_N \to_{N\to\infty} 0$ et

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x^\alpha| \, |p_{F_N}(x) - p_N(x)| = o(\gamma_N)$$

pour tout $\alpha \in \mathbb{Z}_+$.

On définit cette densité approximative de F_N via l'inverse de Fourier de la partie dominante de $p_{F_N}^{\Psi}$

Pour tous $N \geq 1$, soit p_N la fonction

$$p_N(x) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\mathrm{i}\langle \boldsymbol{\lambda}, x \rangle} \varphi_N(\boldsymbol{\lambda}) d\boldsymbol{\lambda}, \qquad x \in \mathbb{R}^d$$

ou φ_N est la partie principale de F_N.

MERCI !