

# Modèles sous-quadratiques pour les cristaux liquides nématiques

GIACOMO CANEVARI  
avec GIANDOMENICO ORLANDI (*Vérone, Italie*)  
et APALA MAJUMDAR (*Bath, Royaume-Uni*),  
BIANCA STROFFOLINI (*Naples, Italie*)

*Transitions de phase et équations non locales*  
*En l'honneur de John M. Ball*

Bucarest, 25-27 avril 2018



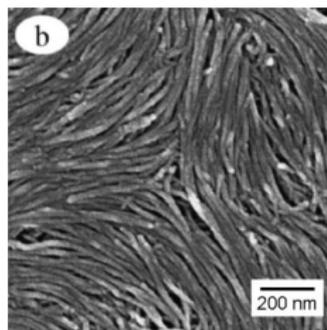
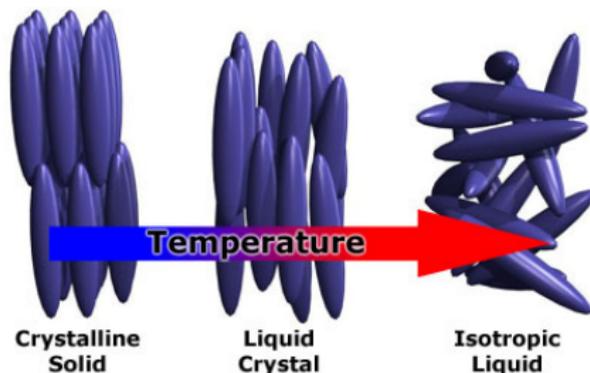
## Plan de l'exposé

1. Cristaux liquides nématiques
2. Un resultat de “densité partielle”
3. Applications aux applications  $p$ -harmoniques minimisantes à valeurs dans  $P^2(\mathbb{R})$
4. Conclusions

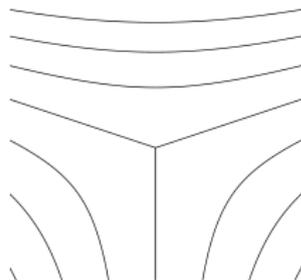
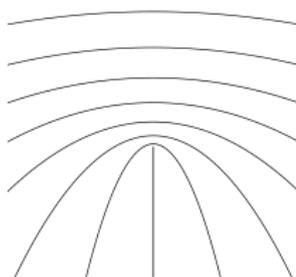
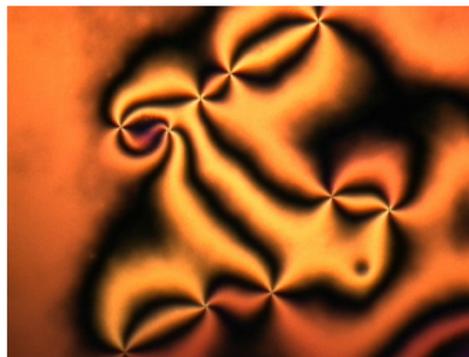
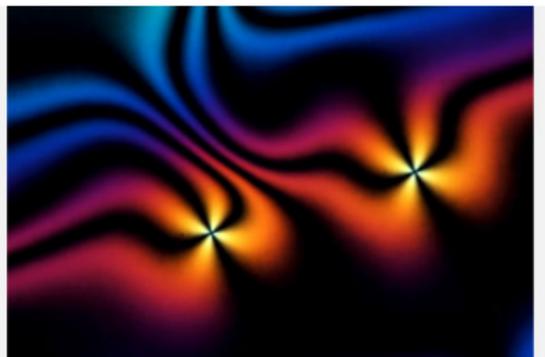
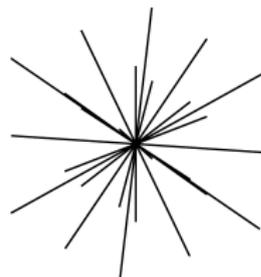
## Introduction

Les **cristaux liquides nématiques** sont une phase de la matière intermédiaire entre les liquides et les solides.

- Molécules allongées, uniformément distribuées en espace
- **alignement moléculaire** local
- symétrie moléculaire.



L'alignement moléculaire n'est pas parfait : **défauts**.

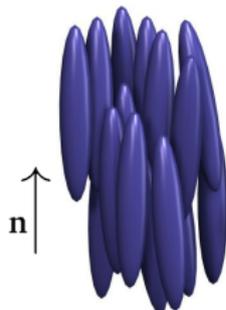
Défauts **non orientables** de **codimension deux**Défaut en **hériss**on de **codimension trois**

## Arithmétique des défauts non orientables

- Espace des **configurations locales** :

$$\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

$$u_{ij} = n_i n_j - \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad n \in \mathbb{S}^2$$



## Arithmétique des défauts non orientables

- Espace des **configurations locales** :

$$\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

$$u_{ij} = n_i n_j - \frac{\delta_{ij}}{3}, \quad i, j \in \{1, 2, 3\}, \quad n \in \mathbb{S}^2$$

- Le milieu est représenté par une application continue

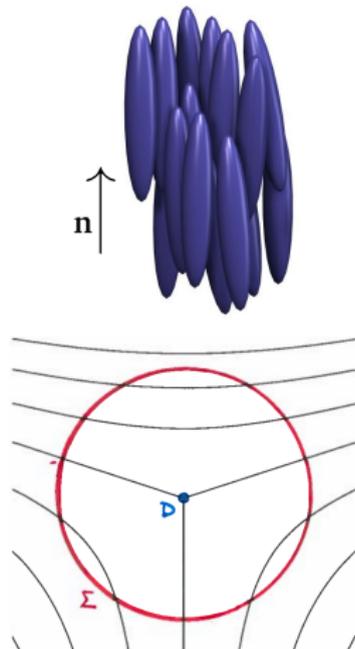
$$u: \Omega \setminus D \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R}),$$

où  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  et  $\dim D = 3 - k$ .

- Soit  $\Sigma$  une  $(k - 1)$ -sphère autour de  $D$ .

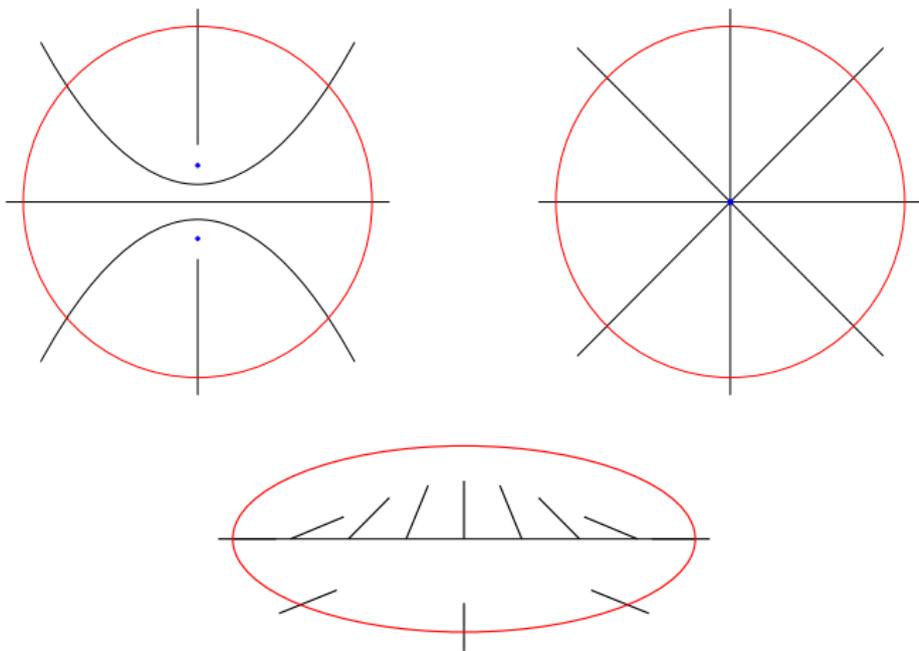
(classe d'homotopie de  $u|_{\Sigma}: \Sigma \simeq \mathbb{S}^{k-1} \rightarrow \mathcal{N}$ )

$$\in \pi_{k-1}(\mathcal{N})$$



Pour les défauts de codimension deux :  $k = 2$ ,  $\pi_1(\mathbb{P}^2(\mathbb{R})) = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ .

$$1 + 1 = 0$$



## Modèles variationnels classiques

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un domaine borné régulier,  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  une donnée au bord.

**Énergie élastique :**

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \quad u \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$$

## Modèles variationnels classiques

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un domaine borné régulier,  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  une donnée au bord.

**Énergie élastique :**

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \quad u \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$$

- ▷ Si  $u$  possède un défaut de ligne alors  $E(u) = +\infty$  !
- ▷ Tout  $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  possède un **relèvement** : il existe  $n \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$  tel que  $u = \pi(n)$  p.p., où  $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,

$$(\pi(n))_{ij} := n_i n_j - \frac{\delta_{ij}}{3} \quad \text{pour } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

de sorte que  $E(u) = 2E(n)$  [Ball, Zarnescu, '11 ; Bethuel, Chiron, '07].

## Modèles variationnels classiques

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un domaine borné régulier,  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  une donnée au bord.

**Énergie élastique :**

$$E(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2, \quad u \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$$

- ▷ Si  $u$  possède un défaut de ligne alors  $E(u) = +\infty$  !
- ▷ Tout  $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  possède un **relèvement** : il existe  $n \in W^{1,2}(\Omega, \mathbb{S}^2)$  tel que  $u = \pi(n)$  p.p., où  $\pi: \mathbb{S}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,

$$(\pi(n))_{ij} := n_i n_j - \frac{\delta_{ij}}{3} \quad \text{pour } i, j \in \{1, 2, 3\}$$

de sorte que  $E(u) = 2E(n)$  [Ball, Zarnescu, '11 ; Bethuel, Chiron, '07].

- ▷ [Ball, Bedford, '16] : et si on considèrerait des énergies à croissance **sous-quadratique** ?

## Modèles variationnels sous-quadratiques

Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un domaine borné régulier,  $g: \partial\Omega \rightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$  une donnée au bord.

**Énergie élastique :**

$$E(u) := \int_{\Omega} \phi(|\nabla u|), \quad u \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$$

où  $\phi \in C^2(\mathbb{R}^+)$  est convexe, croissante et

$$\phi(t) \sim \begin{cases} \frac{t^2}{2} & \text{pour } t \rightarrow 0 \\ \frac{t^p}{p} & \text{pour } t \rightarrow +\infty, \text{ avec } 1 < p < 2, \end{cases}$$

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} (\phi'(t)t - p\phi(t)) = 0.$$

Ici on prendra  $\phi(t) = t^p/p$ .

## Régularité des applications $p$ -harmoniques minimisantes

Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $u_0$  est un minimiseur de

$$E(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p, \quad u \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$$

alors il existe un ensemble fermé  $S = S(u)$ , de mesure nulle, tel que

$$u_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega \setminus S)$$

## Régularité des applications $p$ -harmoniques minimisantes

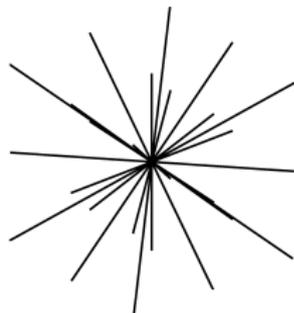
Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $u_0$  est un minimiseur de

$$E(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p, \quad u \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$$

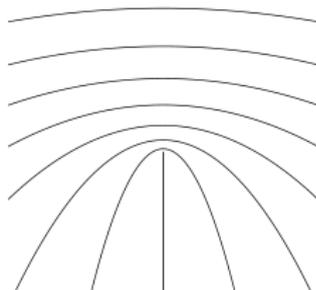
alors il existe un ensemble fermé  $S = S(u)$ , de mesure nulle, tel que

$$u_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega \setminus S)$$

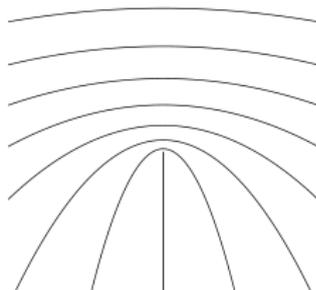
- ▷  $S$  est un ensemble discret pour  $p = 2$  ;  
singularités de type hérisson  
[Schoen, Uhlenbeck, '82 ; Brezis, Coron, Lieb, '86]
- ▷  $\dim_{\mathcal{H}} S \leq 1$  pour  $1 < p < 2$   
[Hardt, Lin, '87 ; Luckhaus, '88]



- Une application  $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  ne possède **pas** forcément de relèvement  $n \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^2)$  pour  $1 < p < 2$ .
- L'espace  $C^\infty(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  n'est **pas** dense dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  (même pas faiblement) pour  $1 < p < 2$ .



- Une application  $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  ne possède **pas** forcément de relèvement  $n \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^2)$  pour  $1 < p < 2$ .
- L'espace  $C^\infty(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  n'est **pas** dense dans  $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  (même pas faiblement) pour  $1 < p < 2$ .



Injection de Sobolev compacte  $W^{1,p}(1D) \hookrightarrow C^0(1D)$  : si  $u_j \in C^\infty(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$  et  $u_j \rightharpoonup u$  faiblement dans  $W^{1,p}$ , on pourrait choisir  $\Gamma \simeq \mathbb{S}^1$  tel que

$$u_j|_\Gamma \rightharpoonup u|_\Gamma \quad \text{faiblement dans } W^{1,p}(\Gamma) \text{ et uniformément,}$$

mais

$$0 = \text{classe d'homotopie de } u_j|_\Gamma \neq \text{classe d'homotopie de } u|_\Gamma = 1.$$

## Un résultat de “densité partielle”

Soit  $\mathcal{N}$  une variété sans bord, connexe, compacte et lisse. Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\pi_0(\mathcal{N}) = \pi_1(\mathcal{N}) = \dots = \pi_{k-2}(\mathcal{N}) = 0.$$

Si  $k = 2$ , on suppose  $\pi_1(\mathcal{N})$  abélien. Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  un domaine borné et régulier,  $d \geq k$ .

## Un résultat de “densité partielle”

Soit  $\mathcal{N}$  une variété sans bord, connexe, compacte et lisse. Soit  $k \in \mathbb{N}$  tel que

$$\pi_0(\mathcal{N}) = \pi_1(\mathcal{N}) = \dots = \pi_{k-2}(\mathcal{N}) = 0.$$

Si  $k = 2$ , on suppose  $\pi_1(\mathcal{N})$  abélien. Soit  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^d$  un domaine borné et régulier,  $d \geq k$ .

### Théorème (C., Orlandi)

Pour tout  $1 \leq p < k$  et tout  $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ , il existe un ensemble fermé  $\Sigma = \Sigma(u)$  t.q.

- (i) soit  $\Sigma = \emptyset$ , soit  $d - k \leq \dim_{\mathcal{H}} \Sigma < d - k + 1$ ;
- (ii) pour toute boule  $B \subset\subset \Omega \setminus \Sigma$ ,  $u|_B$  appartient à l'adhérence de  $C^\infty(B, \mathcal{N})$  dans  $W^{1,p}$ .

- ▷ Si  $1 \leq p < k - 1$ , alors  $\Sigma = \emptyset$  [théorème de densité de Bethuel, '91].
- ▷ Le cas  $p \in [1, 2[ \cup [d - 1, d[$  découle de [Pakzad, Rivière, '03]
- ▷ Cas  $p \geq k$ ?

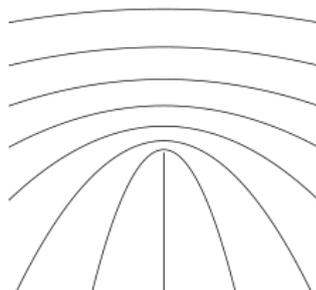
## Un résultat de “relèvement partiel”

Dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ , prenons  $k = 2$ . Soit  $d = 3$ .

### Corollaire (C., Orlandi)

Pour tout  $1 \leq p < 2$  et tout  $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ , il existe un ensemble fermé  $\Sigma = \Sigma(u)$  t.q.

- (i) soit  $\Sigma = \emptyset$ , soit  $1 \leq \dim_{\mathcal{H}} \Sigma < 2$ ;
- (ii) pour toute boule  $B \subset\subset \Omega \setminus \Sigma$ , il existe  $n \in W^{1,p}(B, \mathbb{S}^2)$  tel que  $u = \pi(n)$  p.p. dans  $B$ .



L'ensemble  $\Sigma$  est une singularité non orientable de  $u$ .

## Éléments de preuve

**Chaînes bémol** à coefficients dans un groupe abélien  $\mathbb{G}$  :

$\mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  “=” ensembles “de dimension  $d - k$ ” avec multiplicités dans  $\mathbb{G}$

On prendra  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  (dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 2$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

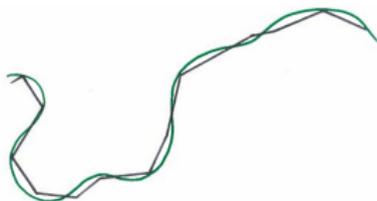
## Éléments de preuve

**Chaînes bémol** à coefficients dans un groupe abélien  $\mathbb{G}$  :

$\mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  “=” ensembles “de dimension  $d - k$ ” avec multiplicités dans  $\mathbb{G}$

On prendra  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  (dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 2$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

**Attention** : ensemble “de dimension  $d - k$ ” = on peut l’approcher par des polyèdres de dimension  $d - k$  (dans une norme convenable).



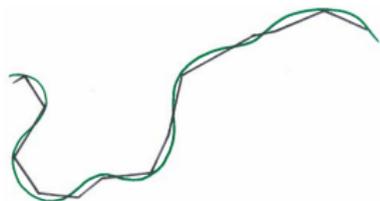
## Éléments de preuve

**Chaînes bémol** à coefficients dans un groupe abélien  $\mathbb{G}$  :

$\mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  “=” ensembles “de dimension  $d - k$ ” avec multiplicités dans  $\mathbb{G}$

On prendra  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  (dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 2$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

**Attention** : ensemble “de dimension  $d - k$ ” = on peut l’approcher par des polyèdres de dimension  $d - k$  (dans une norme convenable).



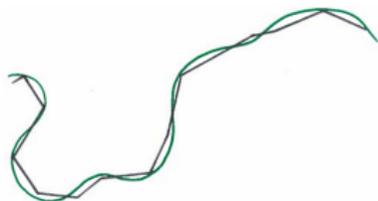
## Éléments de preuve

**Chaînes bémol** à coefficients dans un groupe abélien  $\mathbb{G}$  :

$\mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  “=” ensembles “de dimension  $d - k$ ” avec multiplicités dans  $\mathbb{G}$

On prendra  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  (dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 2$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

**Attention** : ensemble “de dimension  $d - k$ ” = on peut l’approcher par des polyèdres de dimension  $d - k$  (dans une norme convenable).



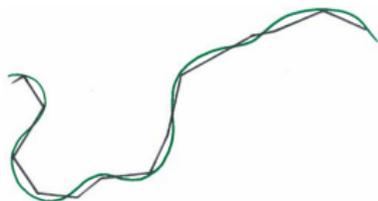
## Éléments de preuve

**Chaînes bémol** à coefficients dans un groupe abélien  $\mathbb{G}$  :

$\mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  “=” ensembles “de dimension  $d - k$ ” avec multiplicités dans  $\mathbb{G}$

On prendra  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  (dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 2$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

**Attention :** ensemble “de dimension  $d - k$ ” = on peut l’approcher par des polyèdres de dimension  $d - k$  (dans une norme convenable).



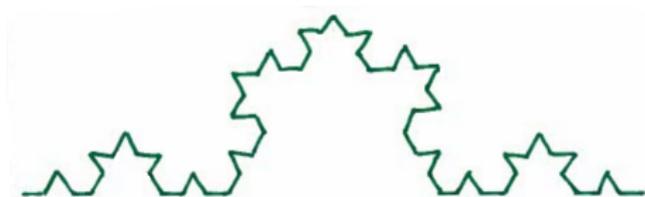
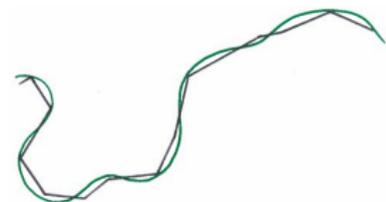
## Éléments de preuve

**Chaînes bémol** à coefficients dans un groupe abélien  $\mathbb{G}$  :

$\mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  “=” ensembles “de dimension  $d - k$ ” avec multiplicités dans  $\mathbb{G}$

On prendra  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  (dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 2$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

**Attention** : ensemble “de dimension  $d - k$ ” = on peut l’approcher par des polyèdres de dimension  $d - k$  (dans une norme convenable).



$$S \in \mathbb{F}_1(\mathbb{R}^2; \mathbb{G}), \quad \dim_{\mathcal{H}}(\text{spt } S) = \log 4 / \log 3$$

## Éléments de preuve

**Chaînes bémol** à coefficients dans un groupe abélien  $\mathbb{G}$  :

$\mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  “=” ensembles “de dimension  $d - k$ ” avec multiplicités dans  $\mathbb{G}$

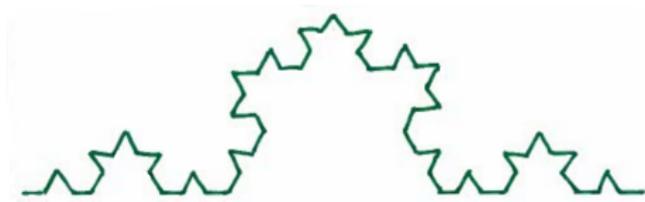
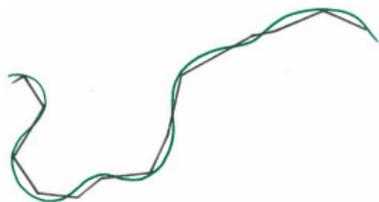
On prendra  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  (dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 2$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

**Attention** : ensemble “de dimension  $d - k$ ” = on peut l’approcher par des polyèdres de dimension  $d - k$  (dans une norme convenable).

Pourtant, puisque  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  est un groupe discret, on a

$$d - k \leq \dim_{\mathcal{H}}(\text{spt } S) < d - k + 1$$

pour tout  $S \in \mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  avec  $S \neq 0$  [Fleming, '66; White, '99]



$$S \in \mathbb{F}_1(\mathbb{R}^2; \mathbb{G}), \quad \dim_{\mathcal{H}}(\text{spt } S) = \log 4 / \log 3$$

## Éléments de preuve

**Chaînes bémol** à coefficients dans un groupe abélien  $\mathbb{G}$  :

$\mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  “=” ensembles “de dimension  $d - k$ ” avec multiplicités dans  $\mathbb{G}$

On prendra  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  (dans le cas  $\mathcal{N} = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ,  $k = 2$  et  $\mathbb{G} = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ )

**Attention** : ensemble “de dimension  $d - k$ ” = on peut l’approcher par des polyèdres de dimension  $d - k$  (dans une norme convenable).

Pourtant, puisque  $\mathbb{G} = \pi_{k-1}(\mathcal{N})$  est un groupe discret, on a

$$d - k \leq \dim_{\mathcal{H}}(\text{spt } S) < d - k + 1$$

pour tout  $S \in \mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G})$  avec  $S \neq 0$  [Fleming, '66 ; White, '99]

Prenons un plongement isométrique  $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}^m$ . On peut construire un opérateur continu

$$\mathbf{S}: (W^{1,k-1} \cap L^\infty)(\Omega, \mathbb{R}^m) \rightarrow L^1(\mathbb{R}^m, \mathbb{F}_{d-k}(\Omega; \mathbb{G}))$$

et  $\Sigma$  est obtenu à partir de  $\mathbf{S}$ .

## Singularités des applications $p$ -harmoniques minimisantes à valeurs dans $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

- Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $1 < p < 2$  et  $u_0$  est un minimiseur de

$$E(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p, \quad u \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$$

alors il existe un ensemble fermé  $S$  tel que  $\dim_{\mathcal{H}} S \leq 1$  et  $u_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega \setminus S)$   
**[Hardt, Lin, '87 ; Luckhaus, '88].**

## Singularités des applications $p$ -harmoniques minimisantes à valeurs dans $P^2(\mathbb{R})$

- Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $1 < p < 2$  et  $u_0$  est un minimiseur de

$$E(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p, \quad u \in W_g^{1,p}(\Omega, P^2(\mathbb{R}))$$

alors il existe un ensemble fermé  $S$  tel que  $\dim_{\mathcal{H}} S \leq 1$  et  $u_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega \setminus S)$   
**[Hardt, Lin, '87 ; Luckhaus, '88].**

- On a trouvé  $\Sigma$  t.q.
  - (i) soit  $\Sigma = \emptyset$ , soit  $1 \leq \dim_{\mathcal{H}} \Sigma < 2$
  - (ii) pour toute boule  $B \subset\subset \Omega \setminus \Sigma$ , il existe  $n_0 \in W^{1,p}(B, S^2)$  tel que

$$u_0 = \pi(n_0) \quad \text{p.p. en } B$$

## Singularités des applications $p$ -harmoniques minimisantes à valeurs dans $P^2(\mathbb{R})$

- Si  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $1 < p < 2$  et  $u_0$  est un minimiseur de

$$E(u) := \frac{1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^p, \quad u \in W_g^{1,p}(\Omega, P^2(\mathbb{R}))$$

alors il existe un ensemble fermé  $S$  tel que  $\dim_{\mathcal{H}} S \leq 1$  et  $u_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega \setminus S)$   
**[Hardt, Lin, '87 ; Luckhaus, '88].**

- On a trouvé  $\Sigma$  t.q.
  - (i) soit  $\Sigma = \emptyset$ , soit  $1 \leq \dim_{\mathcal{H}} \Sigma < 2$
  - (ii) pour toute boule  $B \subset\subset \Omega \setminus \Sigma$ , il existe  $n_0 \in W^{1,p}(B, \mathbb{S}^2)$  tel que

$$u_0 = \pi(n_0) \quad \text{p.p. en } B$$

(iii)  $u$  est non-orientable autour de  $\Sigma$ , en particulier  $\Sigma \subseteq S$  et

$$1 \leq \dim_{\mathcal{H}} \Sigma \leq \dim_{\mathcal{H}} S \leq 1 \quad \implies \quad \dim_{\mathcal{H}} \Sigma = 1$$

- Sur une boule  $B \subset\subset \Omega \setminus \Sigma$ , écrivons  $u_0 = \pi(n_0) = n_0 \otimes n_0 - \text{Id}/3$ . Alors  $|\nabla u_0| = 2|\nabla n_0|$ .
- $n_0$  est minimiseur de

$$E(n) := \int_B |\nabla n|^p, \quad n \in W^{1,p}(B, \mathbb{S}^2): n|_{\partial B} = n_0|_{\partial B}$$

- Sur une boule  $B \subset\subset \Omega \setminus \Sigma$ , écrivons  $u_0 = \pi(n_0) = n_0 \otimes n_0 - \text{Id}/3$ . Alors  $|\nabla u_0| = 2|\nabla n_0|$ .
- $n_0$  est minimiseur de

$$E(n) := \int_B |\nabla n|^p, \quad n \in W^{1,p}(B, \mathbb{S}^2): n|_{\partial B} = n_0|_{\partial B}$$

### Proposition

Soit  $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $1 < p < 2$ . Alors il existe un ensemble fini  $R \subseteq B$  tel que  $n_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(B \setminus R)$

- Sur une boule  $B \subset\subset \Omega \setminus \Sigma$ , écrivons  $u_0 = \pi(n_0) = n_0 \otimes n_0 - \text{Id}/3$ . Alors  $|\nabla u_0| = 2|\nabla n_0|$ .
- $n_0$  est minimiseur de

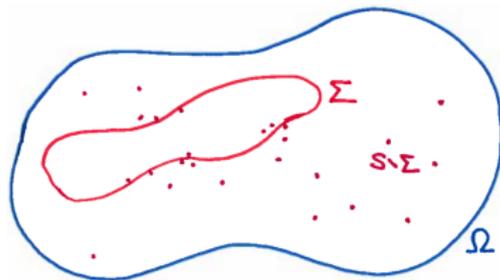
$$E(n) := \int_B |\nabla n|^p, \quad n \in W^{1,p}(B, \mathbb{S}^2): n|_{\partial B} = n_0|_{\partial B}$$

### Proposition

Soit  $B \subseteq \mathbb{R}^3$ ,  $1 < p < 2$ . Alors il existe un ensemble fini  $R \subseteq B$  tel que  $n_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(B \setminus R)$

- Stratification de l'ensemble singulier  $S$  :

$$S = \underbrace{\Sigma}_{\text{soit vide, soit dim } \Sigma=1} + \underbrace{S \setminus \Sigma}_{\text{localement fini}}$$



## Preuve de la proposition

Il suffit de prouver le

### Lemme

Soit  $\varphi \in W^{1,p}(B_1 \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2)$  une fonction homogène de degré zero (i.e.  $\varphi(x) = \varphi(x/|x|)$ ) telle que

$$\int_{B_1} |\nabla \varphi|^p \leq \int_{B_1} |\nabla \psi|^p \quad \text{pour tout } \psi \in W^{1,p}(B_1, \mathbb{S}^2): \psi|_{\partial B_1} = \varphi|_{\partial B_1}.$$

Alors  $\varphi$  est constante.

## Preuve de la proposition

Il suffit de prouver le

### Lemme

Soit  $\varphi \in W^{1,p}(B_1 \subseteq \mathbb{R}^2, \mathbb{S}^2)$  une fonction homogène de degré zero (i.e.  $\varphi(x) = \varphi(x/|x|)$ ) telle que

$$\int_{B_1} |\nabla \varphi|^p \leq \int_{B_1} |\nabla \psi|^p \quad \text{pour tout } \psi \in W^{1,p}(B_1, \mathbb{S}^2) : \psi|_{\partial B_1} = \varphi|_{\partial B_1}.$$

Alors  $\varphi$  est constante.

La proposition découle alors d'un argument de **réduction de dimension [Federer]**.  
Idée :

- Supposons  $\dim R = 1$ . Soit  $x_0 \in R$  et soit  $\Pi$  le plan orthogonale à  $R$  en  $x_0$ .
- Soit

$$n_\rho(x) := n_0(x_0 + x/\rho), \quad x \in \Pi, |x - x_0| \leq 1$$

- Pour  $\rho \rightarrow +\infty$ , on a  $n_\rho \rightarrow n_\infty$  où  $n_\infty : \Pi \cap B_1 \rightarrow \mathbb{S}^2$  est  $p$ -harmonique minimisante à valeurs dans  $\mathbb{S}^2$  et homogène.

## Preuve du lemme

En coordonnées polaires  $(\rho, \theta) : \varphi = \varphi(\theta)$  satisfait

$$\frac{d}{d\theta} (|\varphi'|^{p-2} \varphi') = |\varphi'|^p \varphi$$

Test avec  $\varphi'$ , en utilisant  $\varphi' \cdot \varphi = 0$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\theta} (|\varphi'|^{p-2} \varphi') \cdot \varphi' = \frac{d}{d\theta} (|\varphi'|^p) - |\varphi'|^{p-2} \varphi' \cdot \varphi'' \\ &= (p-1) |\varphi'|^{p-2} \varphi' \cdot \varphi'' = \frac{p-1}{p} \frac{d}{d\theta} (|\varphi'|^p). \end{aligned}$$

## Preuve du lemme

En coordonnées polaires  $(\rho, \theta) : \varphi = \varphi(\theta)$  satisfait

$$\frac{d}{d\theta} (|\varphi'|^{p-2} \varphi') = |\varphi'|^p \varphi$$

Test avec  $\varphi'$ , en utilisant  $\varphi' \cdot \varphi = 0$  :

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\theta} (|\varphi'|^{p-2} \varphi') \cdot \varphi' = \frac{d}{d\theta} (|\varphi'|^p) - |\varphi'|^{p-2} \varphi' \cdot \varphi'' \\ &= (p-1) |\varphi'|^{p-2} \varphi' \cdot \varphi'' = \frac{p-1}{p} \frac{d}{d\theta} (|\varphi'|^p). \end{aligned}$$

Donc  $|\varphi'| = \text{constante}$  et l'équation dévient

$$\varphi'' = |\varphi'|^2 \varphi \implies \varphi \text{ paramétrise un grand cercle}$$

Si  $\varphi \neq \text{constante}$ , alors on construit explicitement une perturbation  $(\varphi_t)_{t \in \mathbb{R}}$  telle que

$$\frac{d^2}{dt^2} \Big|_{t=0} \int_{B_1} |\nabla \varphi_t|^p < 0.$$

## Un modèle de Landau-de Gennes à croissance sous-quadratique

Étude des minimiseurs de la fonctionnelle

$$I_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} \left( \phi(|\nabla u|) + \frac{1}{\varepsilon^p} f(u) \right)$$

où  $u: \Omega \rightarrow \mathbf{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $\phi$  croît au plus comme  $t^p$  avec  $1 < p < 2$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $f \geq 0$  est un potentiel lisse tel que  $f^{-1}(0) = \mathbf{P}^2(\mathbb{R})$ . Condition au bord

$$u|_{\partial\Omega} = g: \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$$

## Un modèle de Landau-de Gennes à croissance sous-quadratique

Étude des minimiseurs de la fonctionnelle

$$I_\varepsilon(u) := \int_{\Omega} \left( \phi(|\nabla u|) + \frac{1}{\varepsilon^p} f(u) \right)$$

où  $u: \Omega \rightarrow \mathbb{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ ,  $\phi$  croît au plus comme  $t^p$  avec  $1 < p < 2$ ,  $\varepsilon > 0$  et  $f \geq 0$  est un potentiel lisse tel que  $f^{-1}(0) = \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ . Condition au bord

$$u|_{\partial\Omega} = g: \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$$

**Théorème (C., Majumdar, Stroffolini, en cours)**

À une sous-suite près,

$$u_\varepsilon \rightarrow u_0 \quad \text{fortement dans } W^{1,\phi}(\Omega)$$

où  $u_0 \in C_{\text{loc}}^{1,\alpha}(\Omega \setminus S)$  est  $\phi$ -harmonique minimisante. La convergence est localement uniforme dans  $\Omega \setminus S$ .

- Cas  $\phi(t) = t^p/p$  : **[ChangYou Wang, '07]**
- Lorsque  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ ,  $\phi(t) = t^p/p$  et la température est basse, pas de points isotropes (cas  $p = 2$ , 3D : **[Contreras, Lamy, '17]**)

## Conclusions

Les modèles sous-quadratiques pour les nématiques : **avantages...**

- plus grand espace de configurations admissibles
- retiennent des propriétés physiques du matériau (stratification des défauts, biaxialité en 2D)

## Conclusions

Les modèles sous-quadratiques pour les nématiques : **avantages...**

- plus grand espace de configurations admissibles
- retiennent des propriétés physiques du matériau (stratification des défauts, biaxialité en 2D)

... et **difficultés**

- classification des singularités des applications  $p$ -harmoniques ?

Quelles sont les applications  $p$ -harmoniques minimisantes de la forme  $n_0(x) = \varphi(x/|x|)$  ?

Par exemple,  $n_0(x) := x/|x|$  est  $p$ -harmonique minimisante  $B^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  si  $1 < p < 2$  [**Coron, Gulliver, '89**].

## Conclusions

Les modèles sous-quadratiques pour les nématiques : **avantages...**

- plus grand espace de configurations admissibles
- retiennent des propriétés physiques du matériau (stratification des défauts, biaxialité en 2D)

... et **difficultés**

- classification des singularités des applications  $p$ -harmoniques ?

Quelles sont les applications  $p$ -harmoniques minimisantes de la forme  $n_0(x) = \varphi(x/|x|)$  ?

Par exemple,  $n_0(x) := x/|x|$  est  $p$ -harmonique minimisante  $B^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  si  $1 < p < 2$   
**[Coron, Gulliver, '89].**

Un outil technique pour l'étude des espaces  $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$  : **“densité partielle”**.