

Arrangements triangulaires

Jean Vallès

Université de Pau et des Pays de l'Adour

27e École Nationale d'Algèbre

Bucarest 2019

Définition

Un arrangement de droites \mathcal{A} est une collection de droites $\{L_1, \dots, L_n\} \subset \mathbb{P}^2$.

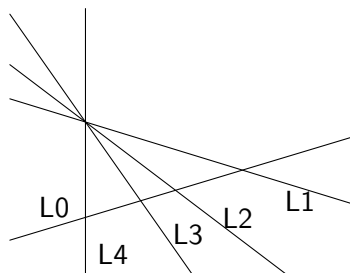
Le diviseur $\cup_{i=1}^n L_i$ est défini par l'équation $f = 0$ où $f \in R = \mathbb{C}[x, y, z]$.

Vocabulaire

- La *combinatoire faible* de \mathcal{A} est la donnée des nombres $t_i(\mathcal{A})$ de points de l'arrangement \mathcal{A} qui sont l'intersection de i droites exactement. On note \mathcal{A}^i les points de multiplicité i avec $i \geq 2$.
- La *combinatoire* de \mathcal{A} est la donnée de $L(\mathcal{A})$, le treillis d'intersection des droites de \mathcal{A} muni d'un ordre partiel (inclusion).

Introduction-Généralités

Combinatoire faible et forte



La combinatoire forte : $L(\mathcal{A}) =$

$\{\mathcal{A}, L_0, L_1, L_2, L_3, L_4, L_0 \cap L_1, L_0 \cap L_2, L_0 \cap L_3, L_0 \cap L_4, L_1 \cap L_2 \cap L_3 \cap L_4, \emptyset\}$.

La combinatoire faible : $t_2(\mathcal{A}) = 4$, $t_3(\mathcal{A}) = 0$, $t_4(\mathcal{A}) = 1$, $t_i(\mathcal{A}) = 0$

pour $i \geq 5$.

Théorème [Melchior, 1940]

Pour un arrangement \mathcal{A} de $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, on a

$$t_2(\mathcal{A}) \geq 3.$$

- Par dualité, il n'existe pas d'ensemble fini $\mathcal{E} \subset \mathbb{R}^2$ de points non alignés du plan tel que toute droite contenant deux points de \mathcal{E} contienne un troisième point de \mathcal{E} (Question de Sylvester, 1890).
- Dans \mathbb{C}^2 l'arrangement $(x^3 - y^3)(y^3 - z^3)(x^3 - z^3) = 0$ vérifie $t_3(\mathcal{A}) = 9$ et $t_2(\mathcal{A}) = 0$.

Introduction-Généralités

Points multiples d'un arrangement sur \mathbb{C}

Théorème, [Hirzebruch, 1986]

Soit \mathcal{A} un arrangement de n droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$. Alors à condition que $t_n = t_{n-1} = t_{n-2} = 0$, on a

$$t_2(\mathcal{A}) + \frac{3}{4}t_3(\mathcal{A}) \geq n + \sum_{r \geq 5} (2r - 9)t_r(\mathcal{A}).$$

Cette formule prouve qu'un arrangement de droites de $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ possède nécessairement un point double ou un point triple.

Remarque

Le nombre $t_4(\mathcal{A})$ n'apparaît pas dans la formule.

Introduction-Généralités

Module des champs de vecteurs tangents

Afin d'étudier la topologie du complémentaire $M(\mathcal{A}) = \mathbb{P}^2 \setminus \mathcal{A}$, Arnold (1969), Deligne (1970), Brieskorn (1971) et Saito (1980) ont introduit le module $\Omega_{\mathcal{A}}$ des 1-formes différentielles à pôles logarithmiques le long des droites de \mathcal{A} , et par dualité le module $T_{\mathcal{A}}$ des champs de vecteurs tangents le long des droites de \mathcal{A} .

Ce module est le noyau de l'homomorphisme de modules gradués :

$$\begin{array}{ccc} R^3 & \xrightarrow{(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)} & R[n-1] \\ (a, b, c) & \longrightarrow & a\partial_x f + b\partial_y f + c\partial_z f \end{array}$$

Ainsi un élément de ce module correspond à un champ de vecteurs

$(P_m, Q_m, R_m) \in R_m^3$ vérifiant :

$$P_m \partial_x f + Q_m \partial_y f + R_m \partial_z f = 0.$$

Faisceautisons le tout ($\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \widetilde{\mathcal{T}}_{\mathcal{A}}$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n-1) = \widetilde{R[n-1]}$),

Définition

Le fibré vectoriel de rang 2, noyau de l'application Jacobienne

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^3 \xrightarrow{(\partial_x f, \partial_y f, \partial_z f)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(n-1),$$

est appelé *fibré des champs de vecteurs tangents au diviseur* $\cup_{i=1}^n L_i$.

L'image de la dernière flèche est le faisceau d'idéaux du schéma Jacobien défini par l'annulation des trois dérivées partielles de f . Ce schéma est supporté par le lieu singulier $\mathcal{A}^{i \geq 2}$ de \mathcal{A} , ie les points d'intersection des droites de \mathcal{A} .

Introduction-Généralités

Classes de Chern de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$

Les classes de Chern de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ sont deux classes caractéristiques représentées par des nombres entiers

$$c_1(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}) = 1 - n \text{ et } c_2(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}) = (n - 1)^2 - \sum_{x \in \mathcal{A}^{i \geq 2}} \tau(f, x),$$

où $\tau(f, x) = (i - 1)^2$ quand x est un point de multiplicité i . On obtient

$$c_2(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}) = (n - 1)^2 - \sum_{i \geq 2} t_i(\mathcal{A})(i - 1)^2.$$

Remarque

$$L(\mathcal{A}) \Rightarrow (t_i(\mathcal{A}), i \geq 2) \Rightarrow (c_1(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}), c_2(\mathcal{T}_{\mathcal{A}})).$$

Définition

L'arrangement \mathcal{A} est libre si le module $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ est un module libre, c-à-d que les champs de vecteurs tangents sont engendrés par deux champs de degrés donnés a et b . Ceci équivaut à $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b)$; On précise alors que \mathcal{A} est libre d'exposants (a, b) .

Remarque

Lorsque \mathcal{A} est libre d'exposants (a, b) on a $c_1(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}) = -(a + b)$ et $c_2(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}) = ab$.

Remarque

Lorsque \mathcal{A} est libre d'exposants (a, b) on a $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_l = \mathcal{O}_l(-a) \oplus \mathcal{O}_l(-b)$ pour TOUTE droite l .

Liberté d'un arrangement

Exemple d'arrangement libre

L'arrangement de Hesse est libre d'exposants $(4, 7)$: 12 droites passant par les 9 points d'inflexion d'une cubique lisse. ($t_2(\mathcal{A}) = 12$, $t_3(\mathcal{A}) = 0$, $t_4(\mathcal{A}) = 9$).

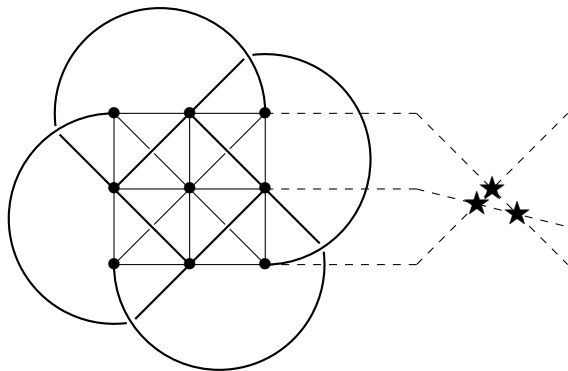


Figure: Arrangement de Hesse

Liberté d'un arrangement

Liberté et classes de Chern

Remarque

Il ne suffit pas d'avoir les bonnes classes de Chern pour être libre

- $\mathcal{A}_0 : (x^5 - y^5)(x^2 - z^2) = 0$ avec
 $t_5(\mathcal{A}_0) = 1$, $t_4(\mathcal{A}_0) = t_3(\mathcal{A}_0) = 0$, $t_2(\mathcal{A}) = 11$,
 $c_1(\mathcal{T}_{\mathcal{A}_0}) = -6$ et $c_2(\mathcal{T}_{\mathcal{A}_0}) = 9$ n'est pas libre.
- $\mathcal{A}_1 : x(x^3 - y^3)(x^3 + z^3) = 0$,
 $t_2(\mathcal{A}_1) = 9$, $t_3(\mathcal{A}_1) = 0$, $t_4(\mathcal{A}_1) = 2$,
 $c_1(\mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) = -6$, $c_2(\mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}) = 9$ est libre d'exposants $(3, 3)$.

Liberté d'un arrangement

Combinatoire et liberté

Donc, les classes de Chern ne déterminent pas la liberté.

Qu'en est-il de la combinatoire? C'est l'objet de la conjecture de Terao :

Conjecture [Terao, 1991]

La liberté de \mathcal{A} ne dépend que de $L(\mathcal{A})$.

Autrement dit, si $L(\mathcal{A}) = L(\mathcal{B})$ et \mathcal{A} libre alors \mathcal{B} libre (avec les mêmes exposants car la combinatoire détermine les classes de Chern).

Question, [Artal-Cogolludo]

La conjecture de Terao sur le plan s'étend-elle à la combinatoire faible?

La conjecture de Terao est prouvée (par Dimca-Ibadula-Macinic) pour les arrangements de 13 droites au plus.

Scindage sur les droites

Généralités

Soit E un fibré de rang 2 sur \mathbb{P}^2 . D'après le théorème de Birkhoff-Grothendieck (1909-1957) il existe, sur chaque droite $l \subset \mathbb{P}^2$, un scindage unique

$$E|_l = \mathcal{O}_l(-a_l) \oplus \mathcal{O}_l(-b_l).$$

• Les nombres (a_l, b_l) sont le *type de scindage* de E sur l . Par semicontinuité, $\exists U \neq \emptyset$ un ouvert de $\check{\mathbb{P}}^2$ s.t. (a_l, b_l) ne dépend pas de la droite $l \in U$. De plus

$$U = \{l \in \check{\mathbb{P}}^2, |a_l - b_l| \text{ est minimal}\}.$$

Définition

Une droite $l \notin U$ est une droite de saut de E . L'ensemble des droites de saut est noté $S(E)$.

Scindage sur les droites

Droites de saut associées à \mathcal{A}

Remarque

Il y a une application intéressante à étudier :

$$\mathcal{A} \mapsto S(\mathcal{T}_{\mathcal{A}})$$

Proposition [Van de Ven, 1971]

Fibrés uniformes : $S(E) = \emptyset$ si et seulement si

- $E \simeq T_{\mathbb{P}^2}(k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, ou bien
- $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b)$.

Scindage sur une droite

Application à la liberté

- Pour prouver la liberté d'un arrangement, connaissant $c_1(\mathcal{T}_A)$ et $c_2(\mathcal{T}_A)$ il suffit de connaître le scindage sur une droite. C'est ce qu'affirme la proposition suivante, reformulation d'un théorème plus général de **Elencjwag-Forster** (1979) :

Proposition [Faenzi; V., 2014]

Soit E un fibré vectoriel de rang 2 sur \mathbb{P}^2 . Supposons que $c_1(E) = -r$ pour un certain $r \geq 0$ et $c_2(E) = 0$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)$,
- $\exists I \subset \mathbb{P}^2$ tel que $E|_I \simeq \mathcal{O}_I \oplus \mathcal{O}_I(-r)$.
- $H^0(\mathbb{P}^2, E(-1)) = 0$,

Montrons que (ii) \Rightarrow (i). Soit $t \in \mathbb{Z}$ la plus petite valeur telle que $H^0(\mathbb{P}^2, E(t)) \neq 0$. Alors on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-t) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{I}_{\Gamma}(t-r) \longrightarrow 0,$$

avec $\text{long}(\Gamma) = c_2(E(t)) = t(t-r)$.

- Par restriction à l on a une application non nulle $E|_l \rightarrow \mathcal{O}(t-r)$ ce qui n'est pas possible si $t < 0$.
- Si $t > 0$ alors $h^0(\mathcal{I}_{\Gamma}(2t-r-1)) \geq \binom{2t-r+1}{2} - t(t-r) > 0$. Ceci contredit la minimalité de t car $H^0(\mathbb{P}^2, E(t-1)) = H^0(\mathcal{I}_{\Gamma}(2t-r-1)) = 0$.
- Donc $t = 0$ c'est-à-dire $\text{long}(\Gamma) = 0$ soit $\Gamma = \emptyset$ et par le critère d'Horrocks, $E = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-r)$.

Scindage sur les droites

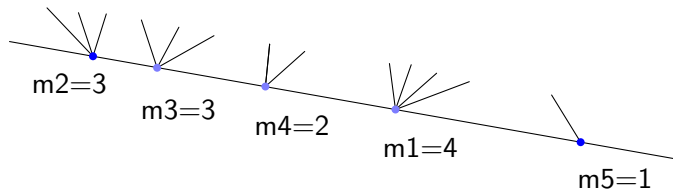
Multiarrangements

Soit

$$\mathcal{A} : x(x^4 - y^4)(x^2 - z^2)(x^3 - (y - z)^3)(x^3 - (y + 2z)^3)(x + y + z) = 0.$$

Considérons le *multiarrangement* (au sens de Ziegler) $\mathcal{A}|_{x=0}$ défini par l'équation

$$y^4 z^2 (y - z)^3 (y + 2z)^3 (y + z) = 0$$



Scindage sur les droites

Multiarrangements

Les multiplicités $m_1 \geq \dots \geq m_h$ du multiarrangement induit sur $l \in \mathcal{A}$ permettent-elles de déterminer le scindage de $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}$ sur l ?

Théorème, [Wakefield et Yuzvinski, 2007]

Soit \mathcal{A} un arrangement de n droites, $l \in \mathcal{A}$ et m_i les multiplicités d'intersection pour $\mathcal{A}|_l$ ($\sum_i m_i = n - 1$).

- 1 Si $m_1 \geq \sum_{i=2}^h m_i$ alors le scindage sur l est $(\sum_{i=2}^h m_i, m_1)$.
- 2 Si $2h - 1 \geq n$ alors le scindage sur l est $(n - h, h - 1)$.
- 3 Si $m_1 = \dots = m_h = 2$ alors le scindage sur l est (h, h) .
- 4 Si $2h - 1 \leq n$ alors le scindage est équilibré quand les h points d'intersection sont en position générale (mais peut-être différent pour des positions spéciales).

Démonstration.

La restriction de la suite jacobienne à l devient :

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_l \longrightarrow \mathcal{O}_l^2 \longrightarrow \bigoplus_i \mathcal{O}_{P_i} / \mathcal{J}_{P_i}^{m_i} \longrightarrow 0.$$

Supposant $n = 2k + 1$ cette suite donne une matrice carrée

$$H^0(\mathcal{O}_l^2(k-1)) \rightarrow H^0(\bigoplus_i \mathcal{O}_{P_i} / \mathcal{J}_{P_i}^{m_i})$$

qui génériquement est de rang maximal quand $2h - 1 \leq n$. \square

Corollaire

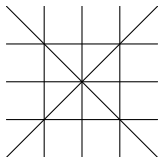
S'il existe $l \in \mathcal{A}$ pour laquelle $h \leq 3$ alors le scindage est déterminé par les m_i et la conjecture de Terao est vraie.

Démonstration. $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ agit transitivement sur les triplets de points distincts de \mathbb{P}^1 . \square

Scindage sur les droites

Multiarrangements-Exemples

- 1 Soit $\mathcal{A} = \{l_1, \dots, l_n\}$ en position générique. Alors $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_{l_i} = \mathcal{O}_{l_i}(-1) \oplus \mathcal{O}_{l_i}(2-n)$.
- 2 On considère l'arrangement $B_3 : xyz(x^2 - y^2)(x^2 - z^2)(y^2 - z^2) = 0$. Les multiplicités sur $x = 0$, $z = 0$ sont $(1, 3, 1, 3)$ et sur $x = y$ elles sont $(2, 3, 2, 1)$. On attend un scindage $\mathcal{O}_l(-4)^2$ mais on a $\mathcal{O}_l(-3) \oplus \mathcal{O}_l(-5)$. car les points forment une division harmonique. Comme $c_1 = -8$, $c_2 = 9$, par [EF] on a $\mathcal{T}_{B_3} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5)$.



Scindage sur les droites

Dualité projective

$$\mathbb{P}^2 \xleftarrow{p} \mathbb{I} = \{(x, y) \mid x \in L_y\} \subset \mathbb{P}^2 \times \check{\mathbb{P}}^2 \xrightarrow{q} \check{\mathbb{P}}^2.$$

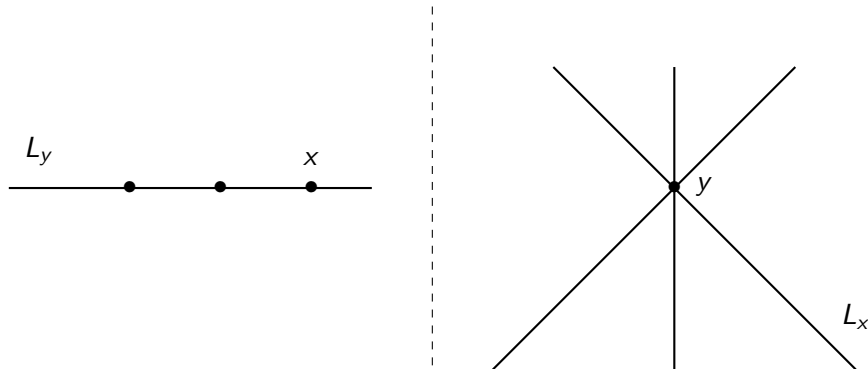


Figure: 3 points alignés - 3 droites concourantes

Scindage sur les droites

Dualité projective : correspondance entre \mathcal{A} et Z

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} = \{L_{y_1}, \dots, L_{y_n}\} \subset \mathbb{P}^2 & \longleftrightarrow & Z = \{y_1, \dots, y_n\} \subset \check{\mathbb{P}}^2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{T}_{\mathcal{A}} & \longleftrightarrow & \mathcal{I}_Z \subset \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2} \end{array}$$

Théorème, [Faenzi; Matei; V., 2013]

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = p_*(q^*\mathcal{I}_Z(1)).$$

Démonstration. On applique p_*q^* à la suite exacte canonique

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_Z \longrightarrow 0.$$

On conclut grâce à $p_*q^*(\mathcal{O}_{\check{\mathbb{P}}^2}(1)) = \mathcal{T}_{\mathbb{P}^2}(-1)$ et $p_*q^*\mathcal{O}_Z = \bigoplus_i \mathcal{O}_{L_{y_i}}$. \square

Scindage sur les droites

Dualité projective : restriction à $H \in \mathcal{A}$

Proposition, [Faenzi; V., 2014]

Soit $H \in \mathcal{A}$. Il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A} \setminus \{H\}} \longrightarrow \mathcal{O}_H(-t_{\mathcal{A},H}) \longrightarrow 0,$$

où $t_{\mathcal{A},H}$ est le nombre de points triples de \mathcal{A} sur H .

Remarque

Cette suite est aussi obtenue (avec d'autres méthodes) par Wakefield, Yuzvinsky, Abe.

Démonstration. La suite exacte sur \mathbb{P}^2 provient de la suite sur $\check{\mathbb{P}}^2$

$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_Z(1) \longrightarrow \mathcal{I}_{Z \setminus \{H\}}(1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\{H\}} \longrightarrow 0. \quad \square$$

Scindage sur les droites

Dualité projective : restriction à $H \in \mathcal{A}$

Un énoncé analogue au théorème *Addition-Deletion* de Terao :

Proposition [FV, 2014]

Supposons que \mathcal{A} soit libre d'exposants (a, b) . Soit $H \in \mathcal{A}$, alors l'un des cas suivants est réalisé :

- i) $t_{\mathcal{A}, H} = a - 1$ and $\mathcal{A} \setminus H$ est libre d'exposants $(a - 1, b)$;
- ii) $t_{\mathcal{A}, H} = b - 1$ and $\mathcal{A} \setminus H$ est libre d'exposants $(a, b - 1)$;
- iii) $t_{\mathcal{A}, H} \geq b$ and $\mathcal{A} \setminus H$ n'est pas libre.

Scindage sur les droites

Dualité projective : courbes singulières contenant Z

Éclater \mathbb{P}^2 au point L^\vee pour trouver $\mathcal{T}_A|_L$.

Proposition [FV, 2014]

Soit $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}^2$ un arrangement de n droites. On suppose que $L \notin \mathcal{A}$ and $L \cap \mathcal{A}^{i \geq 3} = \emptyset$. Alors,

$$s = \min_{k \in \mathbb{N}} H^0(\mathcal{I}_{Z_{\mathcal{A}}} \otimes \mathcal{I}_{L^\vee}^k(k+1)) \neq 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \otimes \mathcal{O}_L = \mathcal{O}_L(-s) \oplus \mathcal{O}_L(s+1-n).$$

Scindage sur les droites

Courbes singulières contenant Z : deux applications

1) $(x^5 - y^5)(x^2 - z^2) = 0$, $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_l = \mathcal{O}_l(-2) \oplus \mathcal{O}_l(-4)$ pour l générale.

2) 9 droites avec 9 points triples et 9 points doubles.

$c_1(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(4)) = 0$, $c_2(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(4)) = 3$.

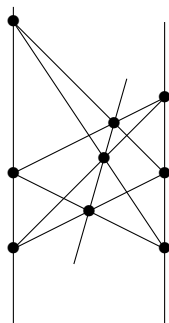


Figure: Pappus : configuration 9_3

Proposition [V,2015]

Soit \mathcal{A} un arrangement de Pappus général et $Z \subset \mathbb{P}^2$ son dual.

- 1 Si $l \in \mathcal{A}$ alors $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_l = \mathcal{O}_l^2(-4)$,
- 2 Il existe trois cubiques irréductibles nodales (Γ_i, x_i) dans le pinceau $H^0(\mathcal{I}_{\mathcal{A}^3}(3))$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_L = \mathcal{O}_L(-3) \oplus \mathcal{O}_L(-5)$ ssi $|L \cap \{x_1, x_2, x_3\}| = 1$.
- 3 Il existe trois cubiques irréductibles nodales (C_i, y_i) dans le pinceau $H^0(\mathcal{I}_Z(3))$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_{L_{y_i}} = \mathcal{O}_{L_{y_i}}(-2) \oplus \mathcal{O}_{L_{y_i}}(-4)$.

Démonstration. i) $t_{\mathcal{A},l} = 3$ et $\mathcal{T}_{\mathcal{A}}^{\vee} \rightarrow \mathcal{O}_l(4)$.

iii) Passent par Z , trois triangles et trois nodales de noeuds y_1, y_2, y_3 .

Ainsi $H^0(\mathcal{I}_Z \otimes \mathcal{I}_{y_i}^2(3)) \neq 0$ donc

$$\mathcal{T}_{\mathcal{A}}|_{L_{y_i}} = \mathcal{O}_{L_{y_i}}(-2) \oplus \mathcal{O}_{L_{y_i}}(-4). \quad \square$$

Scindage sur les droites

Dualité projective : réduction à partir des points multiples

Proposition [FV, 2014]

Soit \mathcal{A} un arrangement de n droites et $x \in \mathcal{A}^{m \geq 2}$. Notons \mathcal{A}_x le sous-arrangement $\mathcal{A} \setminus \{l, x \in l\}$. Alors, il existe une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(m-n) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{I}_{\Gamma}(1-m) \longrightarrow 0,$$

où $\text{support}(\Gamma) = \mathcal{A}_x^i \setminus (\mathcal{A}^{i+1} \setminus \{x\})$ pour $i \geq 2$.

Démonstration. Notons $L = x^\vee$, on a dans $\check{\mathbb{P}}^2$:

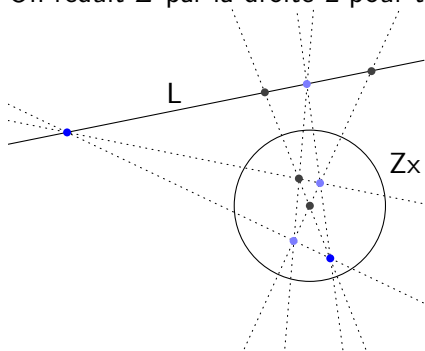
$$0 \longrightarrow \mathcal{I}_{Z_x} \longrightarrow \mathcal{I}_Z(1) \longrightarrow \mathcal{O}_L(1-m) \longrightarrow 0,$$

où $Z_x = Z \setminus Z \cap L$.

Scindage sur les droites

Application $B3$

On réduit Z par la droite L pour trouver Z_x .



On remarque que $\Gamma = \emptyset$ ce qui montre la liberté de $B3$ car

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \rightarrow \mathcal{T}_{B3} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-3) \rightarrow 0.$$

Conclusion première partie

- En 2007, avec les multiarrangements, [WY] prouvent la conjecture pour $n \leq 10$.
- En 2013, avec la “construction standard”, [FV] prouvent la conjecture pour $n \leq 12$.
- En 2017, avec de nouveaux résultats portant sur les arrangements “Nearly Free”, Dimca-Ibadula-Macinic ont prouvé la conjecture de Terao $n \leq 13$ droites.

Sauf mention du contraire, les résultats qui suivent sont obtenus (en 2018) en collaboration avec Simone Marchesi de l’université de Campinas (Brésil).

Arrangements triangulaires

Généralités

Définition

Soient A, B, C trois points non alignés. Un arrangement dont les droites passent chacune par A, B ou C est dit triangulaire.

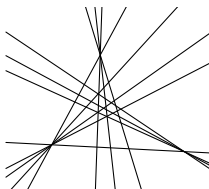


Figure: Arrangement triangulaire incomplet

Arrangements triangulaires

Arrangements complets

Si les côtés du triangle (ABC) sont dans l'arrangement il est complet. L'ensemble des arrangements complets formés de $a + 1$ droites issues de A , $b + 1$ de B et $c + 1$ de C est noté $\text{Tr}(a, b, c)$; ces arrangements possèdent $a + b + c$ droites.

Lemme

Soit $\mathcal{A} \in \text{Tr}(a, b, c)$ alors il existe une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-c) \rightarrow \mathcal{J}_T(-1) \rightarrow 0,$$

où T est l'ensemble des points triples intérieurs (i.e. $A, B, C \notin T$).

Démonstration. L'ensemble dual $Z \subset \check{\mathbb{P}}^2$ est contenu dans le triangle $\Delta = A^\vee \cup B^\vee \cup C^\vee$.

Arrangements triangulaires

Nombre maximal de points triples

Théorème

\mathcal{T}_A est libre d'exposants $(a + b - 1, c)$ si et seulement si T est une intersection complète $(a - 1, b - 1)$.

Remarque

Ce scindage est le plus déséquilibré possible pour $\mathcal{A} \in \text{Tr}(a, b, c)$. En effet, $|T|$ ne peut pas être supérieur à $(a - 1)(b - 1)$.

Soit ζ une racine primitive de l'unité d'ordre $(c - 1)$. L'arrangement

$$xyz \prod_{i=0}^{a-2} (x - \zeta^i y) \prod_{j=0}^{b-2} (y - \zeta^j z) \prod_{k=0}^{c-2} (x - \zeta^k z) = 0$$

qui appartient à $\text{Tr}(a, b, c)$ est libre d'exposants $(a + b - 1, c)$.

Arrangements triangulaires

Nombre maximal de points triples, suite

Corollaire

Les “reflection arrangements” $\mathcal{A}_3^3(n)$, $\mathcal{A}_3^2(n)$, $\mathcal{A}_3^1(n)$, $\mathcal{A}_3^0(n)$, définis par

$$xyzf = 0, \quad xyf = 0, \quad xf = 0, \quad f = (x^n - y^n)(y^n - z^n)(x^n - z^n) = 0$$

sont libres d'exposants

$$(n + 1, 2n + 1), (n + 1, 2n), (n + 1, 2n - 1), (n + 1, 2n - 2).$$

Définition

Un arrangement triangulaire $\mathcal{A} \in \text{Tr}(a, b, c)$ défini par une équation

$$xyz \prod_{i=1}^{a-1} (x - \alpha_i y) \prod_{j=1}^{b-1} (y - \beta_j z) \prod_{k=1}^{c-1} (z - \gamma_k x) = 0,$$

est dit de type RU (*Racine de l'Unité*) si les coefficients α_i, β_j et γ_k peuvent tous s'écrire comme puissance d'une racine n -ième de l'unité ζ , pour un n fixé.

Les droites $x = \alpha_i y, y = \beta_j z$ et $z = \gamma_k x$ sont concourantes ssi $\alpha_i \beta_j \gamma_k = 1$. Par conséquent la combinatoire $L(\mathcal{A})$ est déterminée par une série d'équations du type $\alpha_i \beta_j \gamma_k = 1$ et d'inéquations $\alpha_{i'} \beta_{j'} \gamma_{k'} \neq 1$, $\alpha_1 \neq \alpha_2, \dots$

Théorème

Étant donné un arrangement triangulaire, il existe un arrangement de type RU ayant la même combinatoire.

Démonstration. On considère les équations $\alpha\beta\gamma = 1$ sur $\mathbb{F}_p[\alpha, \beta, \gamma]$. Elles s'écrivent $\omega^{n+m+l} = 1$ où ω est une racine primitive de \mathbb{F}_p ou encore via le petit théorème de Fermat

$$n + m + l \equiv 0 \pmod{p-1}.$$

Ce système linéaire possède autant de solutions que voulu. En ajoutant la condition supplémentaire $n' + m' + l' \equiv 0 \pmod{p-1}$ on montre qu'il existe un p pour lequel cet ensemble de solutions est strictement plus petit (sinon l'existence de la combinatoire donnée constitue une contradiction). On considère une racine primitive $(p-1)$ -ième de l'unité que l'on élève aux puissances correspondantes n, m, l, n', m', l' , ce qui permet de trouver l'arrangement du type RU demandé. \square

Arrangements triangulaires

Racines de l'Unité

Remarque

La conséquence importante de ce théorème est que toute combinatoire d'arrangements triangulaires peut être obtenue par suppression de droites d'un arrangement $\mathcal{A}_3^3(N)$ pour un N éventuellement grand.

On montre maintenant que la suppression des droites d'un arrangement $\mathcal{A}_3^3(N)$ doit s'effectuer d'une unique façon si l'on veut trouver un libre.

Théorème

Soit \mathcal{A} un arrangement du type RU provenant d'un Ceva $\mathcal{A}_3^3(N)$. Alors \mathcal{A} est libre si et seulement si l'arrangement complémentaire, formé des droites supprimées dans $\mathcal{A}_3^3(N)$, possède le minimum de point triples parmi les sous arrangements de même taille du Ceva donné.

Arrangements triangulaires

Racines de l'Unité

Démonstration. À chaque suppression, nous utilisons le théorème Addition-Deletion de Terao (1981) pour passer d'un libre à n droites à un libre à $(n - 1)$ droites. $c_2(\mathcal{T}_A)$, $|T|$ et $|T_{\text{rem}}|$ sont liés par des relations du type $\min = \max$. La clé du théorème est le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccccccccc}
 \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1 - N) & \xrightarrow{\quad \simeq \quad} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-1 - N) & & & & & & \\
 \downarrow & & \downarrow (f_A, f_B, f_C) & & & & & & \\
 0 \longrightarrow & \mathcal{T}_A & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-b) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-c) & \xrightarrow{\quad \phi \quad} & \mathcal{J}_T(-1) & \longrightarrow & 0 \\
 \downarrow & & \downarrow & & & \downarrow & & & \\
 0 \longrightarrow & \mathcal{J}_T(N + 2 - a - b - c) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{J}_T(-1) & \longrightarrow & 0,
 \end{array}$$

Les points triples T_{rem} de l'arrangement complémentaire défini par l'équation $f_A f_B f_C = 0$ coïncident avec le lieu singulier de \mathcal{F} qui coïncide avec Γ . \square

Arrangements triangulaires

RU libres : exemple

On considère le cas d'arrangements de $\text{Tr}(5, 5, 5)$. Les scindages possibles pour les libres sont $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-5) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-9)$, lorsque $|T| = 16$,
 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-8)$, lorsque $|T| = 13$, et
 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7)$, lorsque $|T| = 12$. Comme on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^3(-5) \xrightarrow{\phi} \mathcal{J}_T(-1) \longrightarrow 0$$

alors $H^0(\mathcal{T}_{\mathcal{A}}(4)) = 0$ et ces trois scindages sont les seuls possibles.

— Le cas $|T| = 16$ est obtenu avec $\mathcal{A}_3^3(4)$.

Arrangements triangulaires

RU libres : exemple suite

— Pour le cas $|T| = 13$ on commence avec $\mathcal{A}_3^3(5)$. On retire une droite de chaque sommet de façon que les trois retirées ne soient pas concourantes.

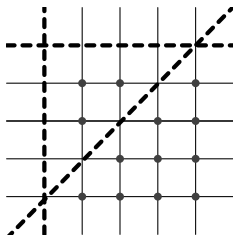


Figure: $|T| = 13$

Arrangements triangulaires

RU libres : exemple suite

— Pour le cas $|T| = 12$ on retire deux droites de chaque sommet à l'arrangement $\mathcal{A}_3^3(6)$ telles que l'arrangement complémentaire de 6 droites soit sans point triple intérieur.

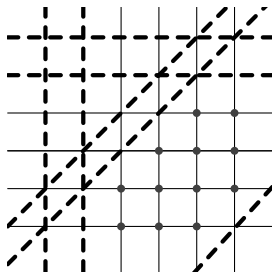


Figure: $|T| = 12$

Arrangements triangulaires

RU libres : exemple suite

— On peut aussi retrouver $\mathcal{A} \in \text{Tr}(5, 5, 5)$ libre d'exposants $(7, 7)$ (i.e. $|T| = 12$) en supprimant 4 droites de chaque sommet de $\mathcal{A}_3^3(8)$.
L'arrangement complémentaire dans ce cas a nécessairement des triples intérieurs T_{rem} mais en minimisant ce nombre (soit $|T_{\text{rem}}| = 4$) on trouve un libre.

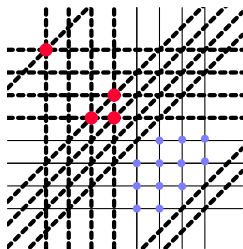


Figure: $|T| = 12, |T_{\text{rem}}| = 4$

Théorème

Soient $\mathcal{A}_0 \in \text{Tr}(a, b, c)$ et A, B, C ses sommets.

- $\mathcal{A}_0 \setminus (AB)$ est libre si et seulement si son ensemble de points triples intérieurs est une intersection complète $(a - 1, b - 1)$. Alors ses exposants sont $(c, a + b - 2)$.
- $\mathcal{A}_0 \setminus (AC)$ est libre si et seulement si $b = c$ et son ensemble de points triples intérieurs est une intersection complète $(a - 1, b - 1)$. Alors ses exposants sont $(b, a + b - 2)$.
- $\mathcal{A}_0 \setminus (BC)$ est libre si et seulement si $a = b = c$ et son ensemble de points triples intérieurs est une intersection complète $(a - 1, a - 1)$. Alors ses exposants sont $(a, 2a - 2)$.

Arrangements incomplets

suite du théorème

Théorème

Soient $\mathcal{A}_0 \in \text{Tr}(a, b, c)$ et A, B, C ses sommets.

- $\mathcal{A}_0 \setminus [(AB) \cup (AC)]$ est libre si et seulement si son ensemble de points triples intérieurs est une intersection complète $(a - 1, b - 1)$. Alors ses exposants sont $(c, a + b - 3)$.
- $\mathcal{A}_0 \setminus [(AB) \cup (BC)]$ est libre si et seulement si $b = c$ et son ensemble de points triples intérieurs est une intersection complète $(a - 1, b - 1)$. Alors ses exposants sont $(b, a + b - 3)$.
- $\mathcal{A}_0 \setminus [(AC) \cup (BC)]$ est libre si et seulement si $a = b = c$ et son ensemble de points triples intérieurs est une intersection complète $(a - 1, a - 1)$. Alors ses exposants sont $(a, 2a - 3)$.
- $\mathcal{A}_0 \setminus [(AB) \cup (AC) \cup (BC)]$ est libre si et seulement si $a = b = c$ et son ensemble de points triples intérieurs est une intersection complète $(a - 1, a - 1)$. Alors ses exposants sont $(a, 2a - 4)$.

Arrangements triangulaires

Conjecture de Terao pour les triangulaires

Problème

La conjecture de Terao est-elle vraie pour les arrangements triangulaires?

Essai de preuve.

Soient \mathcal{A}_0 et \mathcal{A}_1 deux arrangements triangulaires tq $L(\mathcal{A}_0) = L(\mathcal{A}_1)$ avec \mathcal{A}_0 libre. Soit \mathcal{B} un arrangement RU tel que $L(\mathcal{B}) = L(\mathcal{A}_0)$.

Si \mathcal{B} est libre c'est fini. En effet, on montre que \mathcal{A}_1 est libre par récurrence sur le nombre de droites.

Comme \mathcal{B} est un RU libre, on peut supprimer une droite l de manière à trouver un arrangement $\mathcal{B} \setminus l$ qui soit encore libre. Supprimant la droite l_1 correspondante de l'arrangement \mathcal{A}_1 on trouve un arrangement $\mathcal{A}_1 \setminus l_1$ libre par hypothèse de récurrence. On conclut avec le théorème Addition-Deletion de Terao.

Arrangements triangulaires

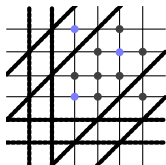
Conjecture de Terao ne s'étend pas à la combinatoire faible

Théorème

La combinatoire faible ne détermine pas la liberté.

Démonstration. On le prouve en donnant deux arrangements \mathcal{A}_0 libre d'exposants $(7, 7)$ et \mathcal{A}_1 qui n'est pas libre, tous les deux dans $\text{Tr}(5, 5, 5)$ avec les mêmes nombre de points multiples $t_3 = 12$, $t_4 = t_5 = 0$, $t_6 = 3$ et $t_i = 0$ pour $i > 6$.

— \mathcal{A}_0 : est obtenu par suppression des 6 droites $x = z$, $x = \zeta z$, $y = z$, $y = \zeta z$, $x = \zeta^2 y$ et $x = \zeta^4 y$ du Ceva $xyz(x^6 - y^6)(y^6 - z^6)(x^6 - z^6) = 0$



Arrangements triangulaires

Conjecture de Terao ne s'étend pas à la combinatoire faible

$$\psi = [(x - z)(x - \zeta z), (y - z)(y - \zeta z), (x - \zeta^2 y)(x - \zeta^4 y)]$$

est une syzygy qui ne s'annule pas et induit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} & & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-7) & & & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \psi & & & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{T}_{\mathcal{A}_0} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^3(-5) & \xrightarrow{\phi} & \mathcal{J}_{\Gamma}(-1) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & \mathcal{J}_{\Gamma}(-7) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{J}_{\Gamma}(-1) & \longrightarrow & 0, \end{array}$$

où le lieu singulier de \mathcal{F} est le lieu des zéros de ψ et coïncide avec Γ .
Comme il est vide $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_0}$ est libre.

Arrangements triangulaires

Conjecture de Terao ne s'étend pas à la combinatoire faible

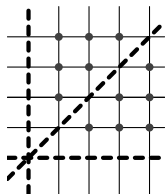
Remarque

Les 12 points triples intérieurs sont répartis comme suit : $3 + 3 + 3 + 3$ sur les verticales, $3 + 3 + 3 + 3$ sur les horizontales et $2 + 3 + 4 + 3$ sur les diagonales.

Arrangements triangulaires

Conjecture de Terao ne s'étend pas à la combinatoire faible

— \mathcal{A}_1 provient du Ceva $xyz(x^5 - y^5)(y^5 - z^5)(x^5 - z^5) = 0$ par suppression des droites $x = z$, $y = z$, $x = y$



\mathcal{A}_1 est Nearly Free, son point instable est $(1, 1, 1)$. Il n'est pas libre. Son scindage général est $(6, 8)$ et $(5, 9)$ sur les droites contenant $(1, 1, 1)$.

Remarque

Les trois partitions sont $12 = 3 + 3 + 3 + 3$.

Arrangements triangulaires

Interprétation géométrique

L'exemple de Ziegler prouvant que la résolution libre de \mathcal{T}_A n'est pas déterminée par la combinatoire, repose sur l'existence d'une conique lisse passant ou ne passant pas par les 6 points triples de l'arrangement. Dans l'exemple qui précède, le fait que les 12 points triples intérieurs soient ou ne soient pas sur une cubique distingue le cas libre de celui qui ne l'est pas. En effet, on a

$$0 \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}^3(-5) \longrightarrow \mathcal{J}_T(-1) \longrightarrow 0.$$

(avec $|T| = 12$) Ceci donne $H^0(\mathcal{J}_T(3)) = H^1(\mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}(4))$. De plus, la section

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(-6) \longrightarrow \mathcal{T}_{\mathcal{A}_1} \longrightarrow \mathcal{J}_p(-8) \longrightarrow 0,$$

où $p = (1, 1, 1)$ donne

$$h^1(\mathcal{T}_{\mathcal{A}_1}(4)) = h^1(\mathcal{J}_p(-4)) = h^0(\mathcal{O}_p) = 1.$$

Références

- G. Elencwajg and Georges and Forster, Otto, *Bounding cohomology groups of vector bundles on \mathbf{P}_n* , Math. Ann., **246**, (1979), no. 3, 251–270.
- D. Faenzi ; D. Matei ; J. Vallès, *Hyperplane arrangements of Torelli type*, Compos. Math., 149(2):309–332, 2013.
- D. Faenzi and J. Vallès, *Logarithmic bundles and Line arrangements, an approach via the standard construction*, J. Lond. Math. Soc. (2) **90** (2014), no. 3, 675–694.
- S.MARCHESI and J. VALLÈS. Nearly free arrangements, a vector bundle point of view. *Arxiv: 1712.04867*
- P. Orlik and H. Terao, *Arrangements of hyperplanes*. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.

- K, Saito, *Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **27** (1980), no. 2, 265–291.
- H, Terao, *Arrangements of hyperplanes and their freeness*, I.J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA Math., **27** (1980), no. 2, 293–312.
- M. Wakefield and S. Yuzvinsky, *Derivations of an effective divisor on the complex projective line*, Trans. Amer. Math. Soc., **359** (2007), no. 9, 4389–4403.
- G. Ziegler, *Multiarrangements of hyperplanes and their freeness. Singularities* (Iowa City, IA, 1986), 345–359, Contemp. Math., **90**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1989.

vă mulțumesc pentru atenția acordată