

# Étude de la convergence forte de certaines diffusions 1-dim via des temps d'atteinte

**Madalina Deaconu**

Inria Nancy and IECL

avec Samuel Herrmann, Université de Bourgogne, Dijon, France

**Stochastic Analysis and Related Topics**  
**Conférence dédiée à la mémoire de Nicu Boboc**  
**Bucharest, May 6-9, 2019**

## Plan

- 1 Cadre
- 2 Temps d'atteinte pour les processus de Bessel - Walk on Moving Spheres Method
- 3 Mouvement brownien et convergence  $\varepsilon$ -forte
- 4 Généralisation : les classes  $L$  et  $G$  des diffusions

**Objectif** construire de méthodes stochastiques nouvelles pour l'approximation trajectorielle de  $(X_t)_{t \in [0, T]}$ , où  $T$  est un temps final fixé et  $X_t$  un processus stochastique 1-dim.

## Motivation

- Approximation classique pour un processus diffusion - schémas de type Euler :
  - Découper l'intervalle de temps  $0 \leq \frac{T}{n} \leq \dots \leq \frac{n-1}{n} \leq T$  et pour chaque sous-intervalle  $[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]$  le processus est approché par  $\bar{X}_{i/n}$ .
  - Résultats de convergence : en norme  $L^p$  de l'erreur.
- On introduit ici une approche différente
  - Pour  $\varepsilon > 0$  on construit une suite croissante des temps d'atteinte  $(s_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  et des positions  $(x_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  tels que

$$\sup_{t \in [0, T]} \|X_t - x_t^\varepsilon\| \leq \varepsilon \quad \text{p.s.}$$

- **Résultat** :  $\varepsilon$ -approximation forte.
- Principaux outils :
  - Des techniques numériques nouvelles pour le mouvement brownien et les processus de Bessel

# Introduction - idées sur la simulation des temps d'atteinte

**Résultats récents** nouvelles méthodes stochastiques pour l'approximation :

- des temps d'atteinte et/ou des positions d'atteinte d'une frontière pour des processus stochastiques de type Bessel, Cox-Ingersoll-Ross, brownien

## Motivation

- Pour le temps d'atteinte (et la position d'atteinte) du mouvement brownien
  - De méthodes numériques nouvelles et efficaces qui évitent les schémas classiques (Euler, etc.).
- Pour les temps d'atteinte des Bessel ou CIR
  - Finance (taux d'intérêt, options exotiques) - CIR
  - Arrêt optimal
  - Neurosciences
- Pour l'équation IBVP et autres EDPs
  - De nouvelles méthodes numériques pour la solution

**Avantage** Évite les schéma de type Euler ou Milstein (trop gourmandes en temps de calcul).

# Simulation temps d'atteinte - un peu d'"histoire"

**Exemple basique** Le problème de Dirichlet pour l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0, & \forall x \in \mathcal{D} \\ u(x) = f(x), & \forall x \in \partial\mathcal{D}, \end{cases}$$

$\mathcal{D} \subset \mathbb{R}^d$  est un domaine borné régulier,  $f : \partial\mathcal{D} \rightarrow \mathbb{R}$  régulière.

**Interprétation probabiliste**  $u(x) = \mathbb{E}_x[f(B_{\tau_{\mathcal{D}}})]$  où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un mouvement brownien qui part de  $x$  et

$$\tau_{\mathcal{D}} = \inf\{t \geq 0, B_t \in \partial\mathcal{D}\}.$$

**Approximation de la solution  $u(x)$**  : on doit connaître  $(\tau_{\mathcal{D}}, B_{\tau_{\mathcal{D}}})$ .

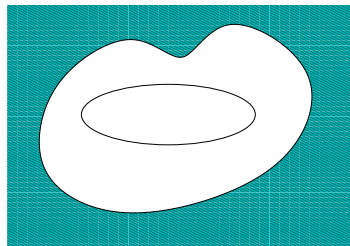
Problèmes de Dirichlet pour des EDPs elliptique : 2 approches probabilistes.

- Marche aléatoire sur la frontière (Sabelfeld '86, Sabelfeld & Simonov '94). On résout des équations intégrales de second ordre.
- Marche aléatoire sur les sphères (Müller '56, Mascagni & Hwuang '03, Villa-Moralès '12 '16, Binder & Braverman '12) basées sur la formule de la moyenne et la théorie des martingales  $\rightarrow$  notre approche.

# Marche aléatoire sur les sphères (WoS)

## Idée de la méthode

- Construire une marche aléatoire  $(X(n))_{n \geq 0}$  qui part de  $X(0) = x$  et qui représente le squelette de la trajectoire brownienne.
- Trouver une martingale pour montrer la convergence de WoS :  $\lim_{n \rightarrow \infty} X(n) = B_{\tau_D}$  en loi.
- Décrire la vitesse de convergence.
- Utiliser les méthodes de Monte-Carlo pour  $u(x)$ .



## Remarque importante

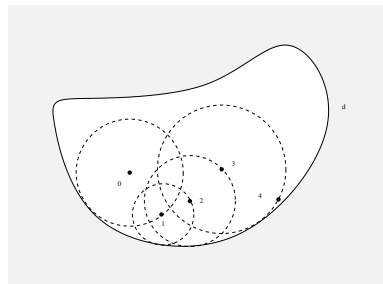
pour sortir du domaine  $D$ , la trajectoire brownienne doit sortir d'abord de tout sous-domaine  $D'$  contenant  $x$ .

Le meilleur choix :  
la **sphère** centrée en  $x$  (invariance par rotation du MB). La position de sortie est alors **uniformément distribuée** sur  $\partial D'$ .

# La procédure est la suivante

Soit  $S^1$  la plus grande sphère centrée en  $x$  et contenue dans  $\mathcal{D}$ , soit  $X(1)$  la position de sortie de  $S^1$  pour le MB. Ce point sera alors le *nouveau point de départ* et ainsi de suite ...

On construit une chaîne de Markov  $(X(n))_{n \geq 0}$ .



# Temps d'atteinte pour les processus de Bessel

## Processus de Bessel

$(X_t^{\delta, x_0})_{t \geq 0}$  le processus de Bessel de dimension  $\delta$  solution de l'EDS

$$X_t^{\delta, x_0} = x_0 + \frac{\delta - 1}{2} \int_0^t (X_s^{\delta, x_0})^{-1} ds + B_t,$$

$x_0 \geq 0$ ,  $(B_t)_{t \geq 0}$  est un MB 1-dim,  $\nu = \frac{\delta}{2} - 1$  indice.

## Loi de probabilité

$$p_{x_0}(t, x) = \frac{1}{t} \left( \frac{x}{x_0} \right)^\nu x \exp\left(-\frac{x^2 + x_0^2}{2t}\right) I_\nu\left(\frac{xx_0}{t}\right), \quad t > 0, x > 0,$$

où  $I_\nu(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{2}\right)^{\nu+2n} \frac{1}{n! \Gamma(\nu+n+1)}$ , est la fonction de Bessel.



# Temps d'atteinte pour les processus de Bessel

**Temps d'atteinte d'un seuil** Soit  $L$  fixé t.q.  $L > x_0$  et

$$\tau_L = \inf\{t > 0 : X_t^{\delta, x_0} \geq L\}.$$

**Transformé de Laplace**

$$\mathbb{E}_{x_0} \left[ e^{-\lambda \tau_L} \right] = \frac{x_0^{-\nu}}{L^{-\nu}} \frac{I_\nu(x_0 \sqrt{2\lambda})}{I_\nu(L \sqrt{2\lambda})}, \quad x_0 > 0.$$

**Inverse de la transformé de Laplace**

$$\mathbb{P}(\tau_L > t) = \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu+1)} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{j_{\nu,k}^{\nu-1}}{\mathcal{J}_{\nu+1}(j_{\nu,k})} e^{-\frac{j_{\nu,k}^2}{2L^2} t}.$$

$\mathcal{J}$ . fonction de Bessel du premier ordre,  $j_{\nu,k}$  suite de ses racines positives.

- Difficile à utiliser pour la simulation de  $\tau_L$ .
- Nous avons construit un **nouvel algorithme** pour approcher le temps d'atteinte sans les fonctions de Bessel ou le schéma d'Euler.

## Temps d'atteinte pour des frontières non-linéaires ?

- Difficile d'approcher le temps d'atteinte d'un niveau  $L$ .  
Pouvons-nous obtenir un meilleur résultat pour des frontières particulières (dépendant de temps) pour les temps d'atteinte du Bessel?
- **Walk on Moving Spheres algorithm (WoMS)** = algorithme d'approximation du temps d'atteinte de  $L$  pour le processus de Bessel

**Temps d'atteinte** : Méthode des images - forme explicite de la loi du temps d'atteinte d'une frontière particulière pour le processus de Bessel

**Position de sortie** : Connexion entre  $BES(\delta)$  et la norme euclidienne du MB de dim  $\delta$

**Introduite par** Daniels (1969), construction de frontières non-linéaires pour lesquelles on peut évaluer la loi du temps de sortie du MB.

**Idée** Connecter le temps d'atteinte de  $\psi(t)$  pour le MB ( $B_t$ ;  $t \geq 0$ ) avec la solution de l'équation de la chaleur avec des conditions au bord bien choisies

$$\tau_\psi = \inf\{t > 0; h(t, B_t) = 0\}.$$

**Idée** Utiliser la forme explicite de la densité gaussienne.

**Processus de Bessel** On peut construire une approche similaire en utilisant l'EDP satisfaite par la densité du Bessel et des propriétés de symétrie

$$\tau_\psi = \inf\{t > 0, X_t^{\delta, x_0} \geq \psi(t)\} = \inf\{t > 0; u(t, X_t^{\delta, x_0}) = 0\}$$

et

$$\mathbb{P}_0(\tau_\psi > t) = \int_0^{\psi(t)} u(t, x) dx.$$

# Temps d'atteinte pour les processus de Bessel - frontières non-linéaires particulières

**Temps d'atteinte** Soit  $\psi(t)$  la frontière à atteindre

$$\tau_\psi = \inf\{t \geq 0 : X_t^{\delta, x_0} \geq \psi(t)\}.$$

**Idée** Pour un "bon" choix de la frontière il est possible d'évaluer  $\tau_\psi$ .

**Théorème** (MD et S. Herrmann, Ann. Appl. Probab., 2013)

Soit, pour  $\delta = 2\nu + 2 \geq 0$  entier et  $a > 0$

$$\psi(t) = \sqrt{2t \log \frac{a}{\Gamma(\nu + 1)t^{\nu+1}2^\nu}}, \quad \text{pour } t < \left[ \frac{a}{\Gamma(\nu + 1)2^\nu} \right]^{\frac{1}{\nu+1}}.$$

Alors la densité du temps d'atteinte  $\tau_\psi$  est donnée par

$$\mathbb{P}_0(\tau_\psi \in dt) = \frac{1}{2at} \left( 2t \log \frac{a}{\Gamma(\nu + 1)t^{\nu+1}2^\nu} \right)^{\nu+1} dt.$$

## Illustration : cas $\delta = 2$ et $x_0 = 0$

Pour ce choix particulier expressions simples :

$$\psi(t) = \sqrt{2t \log \frac{a}{t}} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}_0(\tau_\psi \in dt) = \frac{1}{2a} \log \frac{a}{t} dt.$$

### Remarques

- $\tau_\psi$  peut être approché dans ce cas en utilisant  $U_1 U_2$  où  $U_1$  et  $U_2$  sont 2 v.a.i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$ .
- on peut utiliser ce résultat pour approcher  $\tau_L$ .

# Walk on moving spheres algorithm

**Propriété importante du processus de Bessel** Pour  $\delta = 2$  et  $x_0 = 0$   $(X_t)_{t \geq 0}$  a la même densité que  $(\|B_t\|)_{t \geq 0} = \left( \sqrt{(B_t^1)^2 + (B_t^2)^2} \right)_{t \geq 0}$  où  $(B_t)_{t \geq 0}$  est le MB standard en dim 2.

**Idée pour construire l'algorithme** Construire la position  $(X(n))_{n \geq 0}$  et le temps de sortie  $(\Theta_n)_{n \geq 0}$ :

- **Initialisation** : on part de l'origine  $X(0)$  au temps  $\Theta_0 = 0$ .
- **Étape  $n$**  : choisir la constante  $a$  tel que  $\psi_a(t)$  est plus petit que la distance entre  $X(n-1)$  et  $\partial D$ ,  $\forall t < a$ . Simuler
  - **Position de sortie** : la position de sortie du MB de la sphère de rayon  $\psi_a$ :  $X(n)$  (**uniforme**)
  - **Temps de sortie** : **méthode des images** frontière particulière pour laquelle nous connaissons la densité  $\theta_n$ . On pose  $\Theta_n = \Theta_{n-1} + \theta_n$ .
- **Stop** quand la norme de  $X(n)$  est  $\varepsilon$ -proche de  $L$ .

# Algorithme WoMS

**Algorithme** Soit  $0 < \gamma < 1$  fixé.

**Initialisation** :  $X(0) = 0$ ,  $\theta_0 = 0$ ,  $\Theta_0 = 0$ ,  $A_0 = \gamma^2 L^2 e/2$ .

**Étape  $n$**  : Tant que  $X(n-1) \in D^\varepsilon$ , on simule  $(U_n, V_n, W_n)$  3 v.a.i.i.d. de loi uniforme sur  $[0, 1]$  et on définit

$$\begin{cases} \theta_n = A_{n-1} U_n V_n, \\ \Theta_n = \Theta_{n-1} + \theta_n, \text{ temps} \\ X(n)^\top = X(n-1)^\top + \psi_{A_{n-1}}(\theta_n) \begin{pmatrix} \cos(2\pi W_n) \\ \sin(2\pi W_n) \end{pmatrix}, \text{ position.} \end{cases}$$

On pose aussi  $A_n = \gamma^2 \rho(X(n))^2 e/2$ .

**Stop**: Lorsque  $X(n) \notin D^\varepsilon$ .

# Convergence de l'algorithme

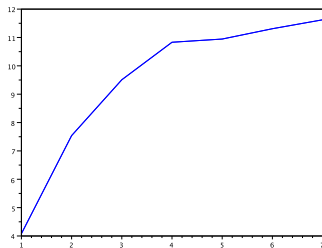
**Théorème** - Nbr. de pas (MD, S. Herrmann, Ann. Appl. Probab., 2013)

Le nombre de pas  $N^\varepsilon$  dans l'algorithme WoMS est fini p.s. De plus il existe une constante  $C > 0$  et une constante  $\varepsilon_0 > 0$ , t.q.

$$\mathbb{E}[N^\varepsilon] \leq C |\log \varepsilon|, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

**Théorème** - Conv. (MD, S. Herrmann, Ann. Appl. Probab., 2013)

Supposons que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , alors  $\Theta_{N^\varepsilon}$  converge en loi vers  $\tau_L$ , le temps de sortie du processus de Bessel.



**Figure** : Pour  $L = 2$ ,  $\gamma = 0.9$  et  $10^5$  simulation de l'approximation de la moyenne. Nombre de pas en fonction de  $k$ , précision  $\varepsilon = 10^{-k}$ ,  $k = 1, \dots, 7$ .



# Mouvement brownien et convergence $\varepsilon$ -forte

**Construction du schéma** pour tout  $\varepsilon > 0$  et  $n \geq 0$  soit  $(s_n^\varepsilon, x_n^\varepsilon) =$  (temps de sortie, position de sortie) de "sphères" bien choisies pour le processus

**Outils principaux** Construire une "bonne" fonction  $\phi^\varepsilon(t)$  t.q. :

$$\phi^\varepsilon(0) = 0 = \phi^\varepsilon(r_\varepsilon) \text{ et } 0 < \phi^\varepsilon(t) \leq \varepsilon \text{ pour tout } t \in ]0, r_\varepsilon[.$$

Commencer avec  $(s_0^\varepsilon, x_0^\varepsilon) = (0, x)$  où  $X_0 = x$ . Définir

$$s_{n+1}^\varepsilon := \inf\{t \geq s_n^\varepsilon : \|X_t - X_{s_n^\varepsilon}\| \geq \phi^\varepsilon(t - s_n^\varepsilon)\}$$

et  $x_n^\varepsilon := X_{s_n^\varepsilon}$

•  $(s_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  temps aléatoires croissants,  $s_0^\varepsilon = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n^\varepsilon = +\infty$  On a alors :

$$\sup_{t \in [0, T]} \|X_t - x_t^\varepsilon\| \leq \varepsilon \quad \text{p.s.} \quad (3.1)$$

comme

- la fonction  $\phi^\varepsilon$  est bornée
- $(s_n^\varepsilon)$  satisfait  $s_{n+1}^\varepsilon - s_n^\varepsilon \leq r_\varepsilon$ , car le support de  $\phi^\varepsilon$  est borné

**La question difficile** choix de  $\phi^\varepsilon$  t.q. la simulation de (temps de sortie, position de sortie) facile à faire.

# Processus de renouvellement - nombre de points dans l'approximation

Soit  $U_n^\varepsilon := s_{n+1}^\varepsilon - s_n^\varepsilon$ ,  $(U_n^\varepsilon)_{n \geq 0}$  une suite de v.a.i.i.d.

Soit  $N^\varepsilon := \inf\{n \geq 1 : s_n^\varepsilon \geq T\}$ .

**Théorème** Soit  $\varepsilon > 0$ . Soit  $(A_n)_{n \geq 1}$  une suite de v.a.i.i.d. de loi  $\gamma(3/2, 2)$ , on introduit

$$U_n^\varepsilon = \varepsilon^2 e^{1-A_n}, \quad s_n^\varepsilon = \sum_{k=1}^n U_k^\varepsilon, \quad x_n^\varepsilon = x_{n-1}^\varepsilon + Z_n \phi^\varepsilon(U_n^\varepsilon), \quad \forall n \geq 1 \text{ et } x_0^\varepsilon = x,$$

où  $(Z_n)_{n \geq 1}$  est une suite de v.a.i.i.d. Alors  $x_t^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} x_n^\varepsilon \mathbf{1}_{\{s_n^\varepsilon \leq t < s_{n+1}^\varepsilon\}}$  est une approximation  $\varepsilon$ -forte de la trajectoire brownienne qui part de  $x$ . De plus le nombre de points d'approximation dans l'intervalle de temps  $[0, T]$  satisfait :

$$\mathbb{E}[N^\varepsilon] \leq \frac{3\sqrt{3}\delta T}{\varepsilon^2}, \quad \forall \varepsilon \leq \varepsilon_0.$$

# Généralisation : les classes $L$ et $G$ des diffusions

Considérons l'EDS 1-dim :

$$dX_t = \sigma(t, X_t)dB_t + \mu(t, X_t) dt, \quad X_0 = x_0, \quad (4.1)$$

avec  $(B_t)_{t \geq 0}$  le MB standard et  $\sigma : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}_+$ .

On étudie deux familles de diffusions (Wang - Pötzelberger):

- **(L-classe)** pour  $\sigma(t, x) = \bar{\sigma}(t)$  et  $\mu(t, x) = a(t)x + b(t)$ ,  $x \in \mathbb{R}$
- **(G-classe)** pour  $\sigma(t, x) = \bar{\sigma}x$  et  $\mu(t, x) = a(t)x + b(t)x \log(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$ .

# Généralisation : les classes $L$ et $G$ des diffusions

On a : la solution de l'EDS (4.1) peut être obtenue comme une fonction du MB :

$$X_t = f(t, B_{\rho(t)}) + x_0, \quad t \geq 0.$$

Pour les diffusions de classe  $L$  un choix possible de  $f$  (ce choix n'est pas unique) est :

$$f(t, x) = \frac{\bar{\sigma}(t)}{\sqrt{\rho'(t)}} x + c(t),$$

avec  $c(0) = 0$ ,

$$c(t) = e^{\int_0^t a(s) ds} \int_0^t b(s) e^{-\int_0^s a(u) du} ds, \quad \rho(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(s)^2 e^{-2 \int_0^s a(u) du} ds.$$

**Hypothèse (1)** Il existe des fonctions  $f \in C^{1,1}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$  et  $F$  strictement croissante,  $\exists \kappa > 0$  t.q.  $F(x) \leq \kappa e^x$ ,  $\forall x \geq 0$  t.q.  
 $X_t = f(t, B_{\rho(t)}) + x_0$  et

$$\sup_{t \in [0, T]} \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, x) \right| + \left| \frac{\partial f}{\partial x}(t, x) \right| \right\} \leq F(|x|), \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

**Hypothèse (2)**

- (1)  $\exists \kappa_{\min} > 0$  tel que  $\rho'(\rho^{-1}(x)) \geq \kappa_{\min}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
(2)

$$\eta_\varepsilon(x) := \varepsilon \eta(x) = \frac{\varepsilon}{(e\kappa_{\min}^{-1} + 1)F(|x| + 1)} \quad (4.3)$$

est strictement décroissante et Lipschitz.

**Proposition** Soit  $(X_t)_{t \geq 0}$  la solution (4.1) satisfaisant les hypothèses (1) et (2), alors

$$y_t^\varepsilon := x_0 + \sum_{n \geq 0} f(\rho^{-1}(s_n), x_n) 1_{\{s_n \leq \rho(t) < s_{n+1}\}} \quad (4.4)$$

où  $s_n$  et  $x_n$  sont données dans l'approximation  $\varepsilon$ -forte du MB, est une approximation  $\varepsilon$ -forte de  $(X_t)$  sur  $[0, T]$ .

Pour  $s_n^\varepsilon$  défini convenablement

$$N_t^\varepsilon := \inf\{n \geq 0 : s_n^\varepsilon \geq t\} \quad \text{et} \quad \hat{N}_t^\varepsilon := N_{\rho^{-1}(t)}^\varepsilon. \quad (4.5)$$

**Théorème** Soit  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  la solution de l'EDS (4.1) qui vérifie (1) et (2). Soit  $(y_t^\varepsilon)_{0 \leq t \leq T}$  l'approximation  $\varepsilon$ -forte de  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  donnée par (4.4) et  $\hat{N}_T^\varepsilon$  le nombre aléatoire de points nécessaires pour construire cette approximation. Il existe alors une constante  $C > 0$  telle que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon^2 \mathbb{E}[\hat{N}_T^\varepsilon] = C \mathbb{E}_x \left[ \int_0^{\rho^{-1}(T)} F^2(|B_s| + 1) ds \right], \quad (4.6)$$

où  $(B_s)_{s \geq 0}$  est le MB 1-dim.

# Conclusions et perspectives

- Le résultat donne une méthode nouvelle efficace pour l'approximation  $\varepsilon$ -forte dans quelques cas particuliers.
- Construire d'autres approximation pour des diffusions plus générales.

## Références:

- M.D., S. Herrmann. Strong convergence of some one-dimensional diffusions.
- M.D., S. Herrmann. Simulation of hitting times for Bessel processes with non integer dimension. *Bernoulli*, 23, nr. 4B: 3744–3771, 2017.
- M.D., S. Maire, S. Herrmann. The walk on moving spheres: a new tool for simulating Brownian motion's exit time from a domain. *Math. Comp. Sim.*, 135, 28–39, 2017.
- M. Deaconu, S. Herrmann. Hitting time for Bessel processes—walk on moving spheres algorithm (WoMS). *Ann. Appl. Probab.*, 23(6):2259–2289, 2013.
- M. Deaconu, S. Herrmann. Initial-Boundary Value Problem for the heat equation - A stochastic algorithm. *Ann. Appl. Probab.*, 28(3) 1943–1976, 2018.