Diviseurs libres et linéairement libres.

Michel Granger
University of Angers, France

Avec un aperçu sur les modules de résidus et le problème de comparaison logarithmiques.

Bucarest, 23-24 Mai 2019.

Table des matières

I. Définitions.

Soit $D \subset S = (\mathbb{C}^n, 0)$ un diviseur effectif réduit, $\mathscr{I}_D = \mathscr{O}_S \cdot h$ l'idéal qui le définit. On pose :

I. Définitions.

Soit $D \subset S = (\mathbb{C}^n, 0)$ un diviseur effectif réduit, $\mathscr{I}_D = \mathscr{O}_S \cdot h$ l'idéal qui le définit. On pose :

$$\Theta_S := \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_S) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\Omega_S^1, \mathscr{O}_S), \quad \Omega_S^p(D) = \Omega_S^p \cdot \frac{1}{h}$$

I. Définitions.

Soit $D \subset S = (\mathbb{C}^n, 0)$ un diviseur effectif réduit,
$\mathscr{I}_D = \mathscr{O}_S \cdot h$ l'idéal qui le définit. On pose :

$$\Theta_S := \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_S) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\Omega^1_S, \mathscr{O}_S), \quad \Omega^p_S(D) = \Omega^p_S \cdot \frac{1}{h}$$

Définition (K. Saito)

$$\Omega^p(\log D) := \{\omega \in \Omega^p_S(D) \mid d\omega \in \Omega^{p+1}_S(D)\}$$
$$\mathrm{Der}(-\log D) := \{\delta \in \Theta_S \mid dh(\delta) \in \mathscr{I}_D\}$$

I. Définitions.

Soit $D \subset S = (\mathbb{C}^n, 0)$ un diviseur effectif réduit,
$\mathscr{I}_D = \mathscr{O}_S \cdot h$ l'idéal qui le définit. On pose :

$$\Theta_S := \mathrm{Der}_{\mathbb{C}}(\mathscr{O}_S) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\Omega^1_S, \mathscr{O}_S), \quad \Omega^p_S(D) = \Omega^p_S \cdot \frac{1}{h}$$

Définition (K. Saito)

$$\Omega^p(\log D) := \{\omega \in \Omega^p_S(D) \mid d\omega \in \Omega^{p+1}_S(D)\}$$
$$\mathrm{Der}(-\log D) := \{\delta \in \Theta_S \mid dh(\delta) \in \mathscr{I}_D\}$$

Tous ces modules sont cohérents et réflexifs. En particulier

$$\Omega^1(\log D) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\mathrm{Der}(-\log D), \mathscr{O}_S), \text{ et}$$
$$\mathrm{Der}(-\log D) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(\Omega^1(\log D), \mathscr{O}_S)$$

Soit $\Sigma = Sing(D)$, with $\mathscr{O}_\Sigma = \mathscr{O}_S/(J(h), h) = \mathscr{O}_D/\mathscr{J}_D$. On dispose des suites exactes suivantes :

Soit $\Sigma = Sing(D)$, with $\mathcal{O}_\Sigma = \mathcal{O}_S/(J(h), h) = \mathcal{O}_D/\mathcal{J}_D$. On dispose des suites exactes suivantes :

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(-\log D) \hookrightarrow \Theta_S \xrightarrow{dh} \mathcal{J}_D \longrightarrow 0 \tag{1.1}$$

Soit $\Sigma = Sing(D)$, with $\mathscr{O}_\Sigma = \mathscr{O}_S/(J(h), h) = \mathscr{O}_D/\mathscr{J}_D$. On dispose des suites exactes suivantes :

(1.1) $$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(-\log D) \hookrightarrow \Theta_S \xrightarrow{dh} \mathscr{J}_D \longrightarrow 0$$

(1.2)
$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(-\log D) \longrightarrow \Theta_S \oplus \mathscr{O}_S \xrightarrow{dh,-h} \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_\Sigma \longrightarrow 0$$

Dans la suite (1.2) la première flèche est : $\delta \mapsto (\delta, \delta(h)/h)$

Soit $\Sigma = Sing(D)$, with $\mathscr{O}_\Sigma = \mathscr{O}_S/(J(h), h) = \mathscr{O}_D/\mathscr{J}_D$. On dispose des suites exactes suivantes :

$$(1.1) \qquad 0 \longrightarrow \mathrm{Der}(-\log D) \hookrightarrow \Theta_S \xrightarrow{dh} \mathscr{J}_D \longrightarrow 0$$

(1.2)

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(-\log D) \longrightarrow \Theta_S \oplus \mathscr{O}_S \xrightarrow{dh,-h} \mathscr{O}_S \longrightarrow \mathscr{O}_\Sigma \longrightarrow 0$$

Dans la suite (1.2) la première flèche est : $\delta \mapsto (\delta, \delta(h)/h)$

Définition

Le diviseur D est libre ssi $\mathrm{Der}(-\log D)$ ou alternatively $\Omega^1(\log D)$ est un module libre.

Nous donnons maintenant deux charactérisations des diviseurs libres.

Théorème (Critère de Saito.)

Le diviseur D est libre ssi il existe des champs de vecteurs $\delta_1, \cdots, \delta_n \in \mathrm{Der}(-\log D)$, et une unité u tels que :

$$\det(\delta_1, \cdots, \delta_n) = uh \tag{1.3}$$

De plus, a propriété (1.3) *caractérise les bases de* $\mathrm{Der}(-\log D)$.

Théorème (Critère de Saito.)

Le diviseur D est libre ssi il existe des champs de vecteurs $\delta_1, \cdots, \delta_n \in \mathrm{Der}(-\log D)$, et une unité u tels que :

$$\det(\delta_1, \cdots, \delta_n) = uh \tag{1.3}$$

De plus, a propriété (1.3) *caractérise les bases de* $\mathrm{Der}(-\log D)$.

Théorème (Terao dans le cas quasi-homogène, Aleksandrov.)

Les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. *Le diviseur D est libre.*
2. *$\mathscr{J}_D$ est Cohen Macaulay (de dimension $n-1$.)*
3. *$\mathscr{O}_\Sigma$ est Cohen Macaulay (de dimension $n-2$.)*

La démonstration utilise la formule d'Auslander-Buchsbaum.

II. Logarithmic residues

Saito montre que $\omega \in \Omega^p(\log D)$ ssi il existe $g \in \mathscr{O}_S$ non diviseur de zéro dans $\mathscr{O}_D$ et des formes holomorphes ξ, η tels que :

$$g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta,$$

II. Logarithmic residues

Saito montre que $\omega \in \Omega^p(\log D)$ ssi il existe $g \in \mathscr{O}_S$ non diviseur de zéro dans $\mathscr{O}_D$ et des formes holomorphes ξ, η tels que :

$$g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta,$$

Définition

Le résidu de ω est la $(q-1)$-forme méromorphe sur D ou ce qui revient au même sur la normalisation $\tilde{D}$:

$$\rho_D^p(\omega) := \frac{\xi}{g}|_D \in \Omega_D^{p-1} \otimes Q(\mathscr{O}_D) = \Omega_{\tilde{D}}^{p-1} \otimes Q(\mathscr{O}_{\tilde{D}})$$

II. Logarithmic residues

Saito montre que $\omega \in \Omega^p(\log D)$ ssi il existe $g \in \mathscr{O}_S$ non diviseur de zéro dans $\mathscr{O}_D$ et des formes holomorphes ξ, η tels que :

$$g\omega = \frac{dh}{h} \wedge \xi + \eta,$$

Définition

Le résidu de ω est la $(q-1)$-forme méromorphe sur D ou ce qui revient au même sur la normalisation $\tilde{D}$:

$$\rho_D^p(\omega) := \frac{\xi}{g}|_D \in \Omega_D^{p-1} \otimes Q(\mathscr{O}_D) = \Omega_{\tilde{D}}^{p-1} \otimes Q(\mathscr{O}_{\tilde{D}})$$

On pose $\rho_D^1 = \rho_D$, $\mathscr{R}_D := \rho_D(\Omega^1(\log D)) \subset Q(\mathscr{O}_D)$

Propriétés de $\mathscr{R}_D$.

Proposition

On a une inclusion $\mathscr{O}_{\tilde{D}} \subset \mathscr{R}_D$ et une suite exacte de $\mathscr{O}_S$-modules :

$$0 \longrightarrow \Omega^1_S \longrightarrow \Omega^1(\log D) \xrightarrow{\rho_D} \mathscr{R}_D \longrightarrow 0. \tag{2.1}$$

Propriétés de $\mathscr{R}_D$.

Proposition

On a une inclusion $\mathscr{O}_{\tilde{D}} \subset \mathscr{R}_D$ et une suite exacte de $\mathscr{O}_S$-modules :

$$(2.1) \qquad 0 \longrightarrow \Omega^1_S \longrightarrow \Omega^1(\log D) \xrightarrow{\rho_D} \mathscr{R}_D \longrightarrow 0.$$

En dualisant on obtient le résultat suivant :

Proposition (G, M. Schulze)

1) Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Der}(-\log D) \longrightarrow \Theta_S \xrightarrow{\sigma_D} \mathscr{R}_D^\vee \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathscr{O}_S}(\Omega^1(\log D), \mathscr{O}_S)$$

2) L'image de σ_D est $\mathscr{J}_D \subset \mathscr{R}_D^\vee$ and on a $\mathscr{R}_D = \mathscr{J}_D^\vee$.
3) Si D est libre $\mathscr{J}_D = \mathscr{R}_D^\vee$

Eléments de démonstration. Le $\mathscr{O}_D$-dual $\mathscr{R}_D^\vee$ apparaît à cause de la *formule changement d'anneaux* :

$$\mathscr{R}_D^\vee := \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_D}(\mathscr{R}_D, \mathscr{O}_D) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_D}(\mathscr{R}_D, Ext^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_D, \mathscr{O}_S))$$
$$= Ext^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{R}_D, \mathscr{O}_S)$$

Eléments de démonstration. Le $\mathscr{O}_D$-dual $\mathscr{R}_D^\vee$ apparaît à cause de la *formule changement d'anneaux* :

$$\begin{aligned}\mathscr{R}_D^\vee := &\operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_D}(\mathscr{R}_D, \mathscr{O}_D) = \operatorname{Hom}_{\mathscr{O}_D}(\mathscr{R}_D, Ext^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{O}_D, \mathscr{O}_S))\\ =&Ext^1_{\mathscr{O}_S}(\mathscr{R}_D, \mathscr{O}_S)\end{aligned}$$

L'égalité $\sigma_D(\delta)(\rho) = \langle \delta, h\rangle \cdot \rho$ est obtenu en étudiant le diagramme des Ext^i construit à partir du complexe double :

$$\operatorname{Hom}^{\bullet\bullet}_{\mathscr{O}_S}(\Omega^1_S \hookrightarrow \Omega^1(\log D), h \colon \mathscr{O}_S \to \mathscr{O}_S).$$

Les sous $\mathscr{O}_D$-modules $\mathscr{J}_D$, $\mathscr{R}_D$, $\mathscr{O}_{\tilde{D}}$ de $Q(\mathscr{O}_D)$ sont des *idéaux fractionnaires* (i.e. ils contiennent des non diviseurs de zéro). D'après un réultat de **De Jong and Van Straten**, la dualité $I \to I^\vee$ préserve l'ensemble des idéaux fractionnaires et est une involution sur les idéaux Cohen Macaulay maximaux, tels que par exemple le conducteur $\mathscr{C}_D := \mathscr{O}_{\tilde{D}}^\vee$.

Les sous $\mathscr{O}_D$-modules $\mathscr{J}_D$, $\mathscr{R}_D$, $\mathscr{O}_{\tilde{D}}$ de $Q(\mathscr{O}_D)$ sont des *idéaux fractionnaires* (i.e. ils contiennent des non diviseurs de zéro). D'après un réultat de **De Jong and Van Straten**, la dualité $I \to I^\vee$ préserve l'ensemble des idéaux fractionnaires et est une involution sur les idéaux Cohen Macaulay maximaux, tels que par exemple le conducteur $\mathscr{C}_D := \mathscr{O}_{\tilde{D}}^\vee$.

Voici un résumé de la situation.

- Nous avons une suite croissante d'idéaux fractionnaires

$$\mathscr{J}_D \subseteq \mathscr{R}_D^\vee \subseteq \mathscr{C}_D \subseteq \mathscr{O}_D \subseteq \mathscr{O}_{\tilde{D}} \subseteq \mathscr{R}_D$$

Les sous $\mathscr{O}_D$-modules $\mathscr{J}_D$, $\mathscr{R}_D$, $\mathscr{O}_{\tilde{D}}$ de $Q(\mathscr{O}_D)$ sont des *idéaux fractionnaires* (i.e. ils contiennent des non diviseurs de zéro). D'après un réultat de **De Jong and Van Straten**, la dualité $I \to I^\vee$ préserve l'ensemble des idéaux fractionnaires et est une involution sur les idéaux Cohen Macaulay maximaux, tels que par exemple le conducteur $\mathscr{C}_D := \mathscr{O}_{\tilde{D}}^\vee$.

Voici un résumé de la situation.

- Nous avons une suite croissante d'idéaux fractionnaires
$$\mathscr{J}_D \subseteq \mathscr{R}_D^\vee \subseteq \mathscr{C}_D \subseteq \mathscr{O}_D \subseteq \mathscr{O}_{\tilde{D}} \subseteq \mathscr{R}_D$$
- Si D est libre, $\mathscr{J}_D = \mathscr{R}_D^\vee$. Dans ce cas :
$$\mathscr{R}_D = \mathscr{O}_{\tilde{D}} \Longleftrightarrow \mathscr{J}_D = \mathscr{C}_D.$$

On appelle la condition $\mathscr{R}_D = \mathscr{O}_{\tilde{D}}$ la *condition de croisement normal*. Notre point de départ est un résultat de K. Saito :

Condition de croisement normal.

Théorème (Saito)

Soit D un diviseur dans une variété complexe S. On considère les conditions suivantes :

(A) *Le groupe fundamental local du complémentaire $S \backslash D$ est abélien.*

(B) *Le diviseur D est un croisement normal en codimension un, c'est à dire en dehors d'un sous ensemble analytique de codimension ≥ 2 dans D.*

(C) *Le résidu de toute 1-forme logarithmique le long de D est faiblement holomorphe, autrement dit $\mathscr{R}_D = \mathscr{O}_{\widetilde{D}}$.*

Alors, les implications (A) $\Rightarrow$ (B) $\Rightarrow$ (C) *sont vraies.*

Dans son article de 1980 Saito pose la question de la **réciproque** de ces implications :

Dans son article de 1980 Saito pose la question de la **réciproque** de ces implications :

Théorème (Lê Dung Tràng et K.Saito 1984)

L'implication (A) $\Leftarrow$ (B) *dans le Théorème 3.1 est vraie.*

Dans son article de 1980 Saito pose la question de la **réciproque** de ces implications :

Théorème (Lê Dung Tràng et K.Saito 1984)

L'implication (A) $\Leftarrow$ (B) *dans le Théorème 3.1 est vraie.*

Théorème (G, Mathias Schulze)

L'implication (B) $\Leftarrow$ (C) *dans le Théoreme 3.1 est vraie : si* $\mathscr{R}_D = \mathscr{O}_{\widetilde{D}}$ *alors* D *est un croisement normal en codimension un.*

Esquisse de démonstration :

- Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme. Alors

$$\Omega_{Y/X} = 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ est une immersion.}$$

Esquisse de démonstration :

- Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme. Alors
$$\Omega_{Y/X} = 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ est une immersion.}$$
- Les propriétés d'être libre pour D, d'être lisse pour $\tilde{D}$ sont vraies en codimension un.

Esquisse de démonstration :

- Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme. Alors
$$\Omega_{Y/X} = 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ est une immersion.}$$
- Les propriétés d'être libre pour D, d'être lisse pour $\tilde{D}$ sont vraies en codimension un.
- Soit $\mathscr{R}_\pi := F^0(\Omega_{\tilde{D}/D})$ l'idéal de ramification. Il intervient dans une formule due à Ragni Piene : $\mathscr{C}_D \mathscr{R}_\pi = \mathscr{J}_D \mathscr{O}_{\tilde{D}}$

Esquisse de démonstration :

- Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme. Alors
$$\Omega_{Y/X} = 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ est une immersion.}$$
- Les propriétés d'être libre pour D, d'être lisse pour $\tilde{D}$ sont vraies en codimension un.
- Soit $\mathscr{R}_\pi := F^0(\Omega_{\tilde{D}/D})$ l'idéal de ramification. Il intervient dans une formule due à Ragni Piene : $\mathscr{C}_D \mathscr{R}_\pi = \mathscr{J}_D \mathscr{O}_{\tilde{D}}$
- On en déduit que si D est libre :
$\mathscr{R}_D = \mathscr{O}_{\tilde{D}} \Longrightarrow \mathscr{C}_D = \mathscr{J}_D \Longrightarrow \mathscr{R}_\pi = \mathscr{O}_{\tilde{D}} \Longrightarrow \Omega_{\tilde{D}/D} = 0$
Alors $\tilde{D}$ et D ont des composantes lisses deux à deux isomorphes : $\tilde{D}_i \xrightarrow{\simeq} D_i$.

Esquisse de démonstration :

- Soit $\varphi : Y \to X$ un morphisme. Alors
$$\Omega_{Y/X} = 0 \Leftrightarrow \varphi \text{ est une immersion.}$$
- Les propriétés d'être libre pour D, d'être lisse pour $\tilde{D}$ sont vraies en codimension un.
- Soit $\mathscr{R}_\pi := F^0(\Omega_{\tilde{D}/D})$ l'idéal de ramification. Il intervient dans une formule due à Ragni Piene : $\mathscr{C}_D \mathscr{R}_\pi = \mathscr{J}_D \mathscr{O}_{\tilde{D}}$
- On en déduit que si D est libre :
$\mathscr{R}_D = \mathscr{O}_{\tilde{D}} \Longrightarrow \mathscr{C}_D = \mathscr{J}_D \Longrightarrow \mathscr{R}_\pi = \mathscr{O}_{\tilde{D}} \Longrightarrow \Omega_{\tilde{D}/D} = 0$
Alors $\tilde{D}$ et D ont des composantes lisses deux à deux isomorphes : $\tilde{D}_i \xrightarrow{\simeq} D_i$.
- La condition de croisement normal devient $\mathscr{R}_D = \oplus_i \mathscr{O}_{D_i}$. Le résultat est connu dans ce cas par [Saito,1980, theorem 2.9].

Caractérisation des diviseurs à croisements normaux

Un diviseurs à croisements normaux est libre et $\mathscr{J}_D$ est un idéal radical de $\mathscr{O}_D$. Voici une réciproque partielle :

Caractérisation des diviseurs à croisements normaux

Un diviseurs à croisements normaux est libre et $\mathscr{J}_D$ est un idéal radical de $\mathscr{O}_D$. Voici une réciproque partielle :

Théorème (E. Faber, G and M. Schulze.)

Soit D un diviseur libre dont la normalisation est lisse. Chacune des conditions suivantes

- *L'ideal $\mathscr{J}_h = (h'_{x_1}, \cdots, h'_{x_n}) \subset \mathscr{O}_S$ est radical.*
- *l'une des condition équivalentes* (A), (B), (C),
- *L'idéal Jacobien $\mathscr{J}_D$ est radical.*

implique que D est un diviseur à croisements normaux

Caractérisation des diviseurs à croisements normaux

Un diviseurs à croisements normaux est libre et $\mathscr{J}_D$ est un idéal radical de $\mathscr{O}_D$. Voici une réciproque partielle :

Théorème (E. Faber, G and M. Schulze.)

Soit D un diviseur libre dont la normalisation est lisse. Chacune des conditions suivantes

- *L'ideal* $\mathscr{J}_h = (h'_{x_1}, \cdots, h'_{x_n}) \subset \mathscr{O}_S$ *est radical.*
- *l'une des condition équivalentes* (A), (B), (C),
- *L'idéal Jacobien* $\mathscr{J}_D$ *est radical.*

implique que D est un diviseur à croisements normaux

Question (E. Faber) In i) or iii), peut on éliminer l'hypothèse de lissité ?

Pour aller plus loin.

- Lorsque D ne satisfait pas aux conditions (A), (B) or (C), Que dire de $\mathscr{R}_D \underset{\neq}{\supseteq} \mathscr{O}_{\tilde{D}}$?

Pour aller plus loin.

- Lorsque D ne satisfait pas aux conditions (A), (B) or (C), Que dire de $\mathscr{R}_D \underset{\neq}{\supseteq} \mathscr{O}_{\tilde{D}}$?
  Cas des courbes : une réponse détaillée en termes du semigroupe des multivaluations est donnée par Delphine Pol.
  Et en codimension plus grande :

Pour aller plus loin.

- Lorsque D ne satisfait pas aux conditions (A), (B) or (C), Que dire de $\mathscr{R}_D \supsetneq \mathscr{O}_{\tilde{D}}$?
  Cas des courbes : une réponse détaillée en termes du semigroupe des multivaluations est donnée par Delphine Pol.
  Et en codimension plus grande :
- Les formes multilogarithmiques et les multiresidus le long d'une singularité équidimensionnelle sont définis par Aleksandrov et Tsikh.

Pour aller plus loin.

- Lorsque D ne satisfait pas aux conditions (A), (B) or (C), Que dire de $\mathscr{R}_D \supsetneqq \mathscr{O}_{\tilde{D}}$?
  Cas des courbes : une réponse détaillée en termes du semigroupe des multivaluations est donnée par Delphine Pol.
  Et en codimension plus grande :
- Les formes multilogarithmiques et les multiresidus le long d'une singularité équidimensionnelle sont définis par Aleksandrov et Tsikh.

Pour aller plus loin.

- Lorsque D ne satisfait pas aux conditions (A), (B) or (C), Que dire de $\mathscr{R}_D \supsetneq \mathscr{O}_{\tilde{D}}$?
  Cas des courbes : une réponse détaillée en termes du semigroupe des multivaluations est donnée par Delphine Pol.
  Et en codimension plus grande :
- Les formes multilogarithmiques et les multiresidus le long d'une singularité équidimensionnelle sont définis par Aleksandrov et Tsikh.
- Une notion de singularité libre est due à (G, Schulze) dans le cas IC, et à D. Pol en général.
- Une caractérisation cohomologique de cette notion par le module des de formes multilogarithmiques de degré égal la codimension ou de modules de résidus est due à D. Pol.

Pour aller plus loin.

- Lorsque D ne satisfait pas aux conditions (A), (B) or (C), Que dire de $\mathscr{R}_D \supsetneq \mathscr{O}_{\tilde{D}}$?
  Cas des courbes : une réponse détaillée en termes du semigroupe des multivaluations est donnée par Delphine Pol.
  Et en codimension plus grande :
- Les formes multilogarithmiques et les multiresidus le long d'une singularité équidimensionnelle sont définis par Aleksandrov et Tsikh.
- Une notion de singularité libre est due à (G, Schulze) dans le cas IC, et à D. Pol en général.
- Une caractérisation cohomologique de cette notion par le module des de formes multilogarithmiques de degré égal la codimension ou de modules de résidus est due à D. Pol.

Comparaison logarithmique.

Par le théorème de comparaison de Grothendieck, la cohomologie du complémentaire d'une hypersurface $H^*(S \setminus D)$ est égale à $H^*[\Gamma(S, \Omega^\bullet(*D))]$. La version faisceautique de ce résultat est :

Comparaison logarithmique.

Par le théorème de comparaison de Grothendieck, la cohomologie du complémentaire d'une hypersurface $H^*(S \setminus D)$ est égale à $H^*\left[\Gamma(S, \Omega^\bullet(*D))\right]$. La version faisceautique de ce résultat est :

Théorème

Soit $D \subset S$ une hypersurface d'une variété complexe lisse. On note $j : S \setminus D \hookrightarrow S$ l'inclusion. Alors l'homorphisme de complexes de faisceaux : $\Omega^\bullet(*D) \to Rj_*\underline{\mathbb{C}_X}$ est un quasi-isomorphisme.

Comparaison logarithmique.

Par le théorème de comparaison de Grothendieck, la cohomologie du complémentaire d'une hypersurface $H^*(S \setminus D)$ est égale à $H^*\left[\Gamma(S, \Omega^\bullet(*D))\right]$. La version faisceautique de ce résultat est :

Théorème

Soit $D \subset S$ une hypersurface d'une variété complexe lisse. On note $j : S \setminus D \hookrightarrow S$ l'inclusion. Alors l'homorphisme de complexes de faisceaux : $\Omega^\bullet(*D) \to Rj_*\underline{\mathbb{C}_X}$ est un quasi-isomorphisme.

Lorsque D est un diviseur à croisement normaux on peut remplacer $\Omega^\bullet(*D)$ par $\Omega^\bullet(\log D)$. D'où la question naturelle :

Comparaison logarithmique.

Par le théorème de comparaison de Grothendieck, la cohomologie du complémentaire d'une hypersurface $H^*(S \setminus D)$ est égale à $H^*\left[\Gamma(S, \Omega^\bullet(*D))\right]$. La version faisceautique de ce résultat est :

Théorème

Soit $D \subset S$ une hypersurface d'une variété complexe lisse. On note $j : S \setminus D \hookrightarrow S$ l'inclusion. Alors l'homorphisme de complexes de faisceaux : $\Omega^\bullet(*D) \to Rj_*\underline{\mathbb{C}_X}$ est un quasi-isomorphisme.

Lorsque D est un diviseur à croisement normaux on peut remplacer $\Omega^\bullet(*D)$ par $\Omega^\bullet(\log D)$. D'où la question naturelle :
Pour quels diviseurs $\Omega^\bullet(\log D) \to \Omega^\bullet(*D)$ est il un quasi isomorphisme ? On dit alors que *"le théorème de comparaison logarithmique" (ou TCL) est vrai pour D.*"

Théorème (Castro, Mond Narvaez, 1996)

Soit D un diviseur libre.

Théorème (Castro, Mond Narvaez, 1996)

Soit D un diviseur libre.
On suppose que D est localement quasi-homogène en tout point $x \in D$.

Théorème (Castro, Mond Narvaez, 1996)

Soit D un diviseur libre.
On suppose que D est localement quasi-homogène en tout point $x \in D$.
Alors le TCL est vrai pour D.

Théorème (Castro, Mond Narvaez, 1996)

Soit D un diviseur libre.
On suppose que D est localement quasi-homogène en tout point $x \in D$.
Alors le TCL est vrai pour D.

La réciproque est vraie pour les courbes et en général : on ne connait pas une caractérisation du TCL. Cependant on a

Théorème (Castro, Mond Narvaez, 1996)

Soit D un diviseur libre.
On suppose que D est localement quasi-homogène en tout point $x \in D$.
Alors le TCL est vrai pour D.

La réciproque est vraie pour les courbes et en général : on ne connait pas une caractérisation du TCL. Cependant on a

Théorème (G., M. Schulze)

Si $n := \dim S \leq 4$ et si le TCL est vrai pour $D = V(h)$, alors D est fortement Euler homogène :

$$\forall x \in D, \exists \theta \in \Theta_{S,x} \mid \theta(x) = 0,\ \theta(h_x) = h_x$$

Théorème (Castro, Mond Narvaez, 1996)

Soit D un diviseur libre.
On suppose que D est localement quasi-homogène en tout point $x \in D$.
Alors le TCL est vrai pour D.

La réciproque est vraie pour les courbes et en général : on ne connait pas une caractérisation du TCL. Cependant on a

Théorème (G., M. Schulze)

Si $n := \dim S \leq 4$ et si le TCL est vrai pour $D = V(h)$, alors D est fortement Euler homogène :

$$\forall x \in D, \exists \theta \in \Theta_{S,x} \mid \theta(x) = 0,\ \theta(h_x) = h_x$$

Diviseurs linéairement libres.

Définition

Un diviseur linéairement libre est un diviseur libre avec $\mathrm{Der}(-\log D)$ engendré par une famille de champs de vecteurs linéaires, c'est à dire de la forme

$$\delta = \sum_{j=1}^{n} l_j(x) \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Un champ de vecteurs linéaire est associé à une matrice A de taille $n \times n$:

Un champ de vecteurs linéaire est associé à une matrice A de taille $n \times n$:

$$\delta_A = (x_1, \ldots, x_n)A \begin{pmatrix} \partial_1 \\ \vdots \\ \partial_n \end{pmatrix} = \underline{x}A\underline{\partial}^T = \sum a_{ij}x_i\partial_j.$$

Diviseurs linéairement libres suite.

Soit D un diviseur lineairement libre, muni d'une base $\delta_{A_1}, \cdots, \delta_{A_n}$ de $\mathrm{Der}(-\log D)$.

Diviseurs linéairement libres suite.

Soit D un diviseur lineairement libre, muni d'une base $\delta_{A_1}, \cdots, \delta_{A_n}$ de $\mathrm{Der}(-\log D)$.
D'après le critère de Saito, D a une equation de la forme

$$h = \det(A_1\underline{x}, \cdots A_n\underline{x})$$

avec

Diviseurs linéairement libres suite.

Soit D un diviseur lineairement libre, muni d'une base $\delta_{A_1}, \cdots, \delta_{A_n}$ de $\mathrm{Der}(-\log D)$.
D'après le critère de Saito, D a une equation de la forme

$$h = \det(A_1\underline{x}, \cdots A_n\underline{x})$$

avec $\langle A_1, \cdots A_n\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(n)$ une sous-algèbre de Lie de l'espace des matrices carrées.

Diviseurs linéairement libres suite.

Soit D un diviseur lineairement libre, muni d'une base $\delta_{A_1}, \cdots, \delta_{A_n}$ de $\mathrm{Der}(-\log D)$.
D'après le critère de Saito, D a une equation de la forme

$$h = \det(A_1\underline{x}, \cdots A_n\underline{x})$$

avec $\langle A_1, \cdots A_n\rangle_{\mathbb{C}} \subset \mathfrak{gl}(n)$ une sous-algèbre de Lie de l'espace des matrices carrées.
On remarque que h is homogène de degré n.

Diviseurs linéairement libres et groupes algébriques.

Diviseurs linéairement libres et groupes algébriques.

Théorème (G.,Mond, Nieto-Reyes, Schulze)

Soit D un diviseur lineairement libre,

Diviseurs linéairement libres et groupes algébriques.

Théorème (G.,Mond, Nieto-Reyes, Schulze)

Soit D un diviseur lineairement libre, 1) Le groupe $G_D := \{g \in GL(n) \mid g(D) = D\}$ *est un groupe algebrique,*

Diviseurs linéairement libres et groupes algébriques.

Théorème (G.,Mond, Nieto-Reyes, Schulze)

Soit D un diviseur lineairement libre, 1) Le groupe $G_D := \{g \in GL(n) \mid g(D) = D\}$ est un groupe algebrique,
2) Son algèbre de Lie est isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Der}(-\log D)_0$ *des champs de vecteurs logarithmiques de degré zéro via l'application*

$$\mathfrak{g}_D \ni A \longmapsto \delta_{A^T} = \underline{x}^T A^T \underline{\partial}.$$

Diviseurs linéairement libres et groupes algébriques.

Théorème (G.,Mond, Nieto-Reyes, Schulze)

Soit D un diviseur lineairement libre, 1) Le groupe $G_D := \{g \in GL(n) \mid g(D) = D\}$ est un groupe algebrique,
2) Son algèbre de Lie est isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Der}(-\log D)_0$ des champs de vecteurs logarithmiques de degré zéro via l'application

$$\mathfrak{g}_D \ni A \longmapsto \delta_{A^T} = \underline{x}^T A^T \underline{\partial}.$$

3) Le complémentaire $\mathbb{C}^n \setminus D$ est un unique orbite ouverte .

Diviseurs linéairement libres et groupes algébriques.

Théorème (G.,Mond, Nieto-Reyes, Schulze)

Soit D un diviseur lineairement libre, 1) Le groupe $G_D := \{g \in GL(n) \mid g(D) = D\}$ est un groupe algebrique,
2) Son algèbre de Lie est isomorphe à l'ensemble $\mathrm{Der}(-\log D)_0$ des champs de vecteurs logarithmiques de degré zéro via l'application

$$\mathfrak{g}_D \ni A \longmapsto \delta_{A^T} = \underline{x}^T A^T \underline{\partial}.$$

3) Le complémentaire $\mathbb{C}^n \setminus D$ est un unique orbite ouverte .

Partant d'un groupe algébrique G, nous étudions la réciproque. Nous en dégageons un méthode pour construire de nombreux exemples.

Soit une représentation linéaire :

$$\rho \ : G \to GL(V) \text{ or } G \times V \to V$$

avec $V = \mathbb{C}^n$, et $G \subset GL(n)$ un *groupe algebrique*, et ρ l'inclusion.
On a clairement besoin des deux conditions :

Soit une représentation linéaire :

$$\rho \ : G \to GL(V) \text{ or } G \times V \to V$$

avec $V = \mathbb{C}^n$, et $G \subset GL(n)$ un *groupe algebrique*, et ρ l'inclusion.
On a clairement besoin des deux conditions :

- **(Dim)** $\quad \dim G = \dim V = n$

Soit une représentation linéaire :

$$\rho \ : G \to GL(V) \text{ or } G \times V \to V$$

avec $V = \mathbb{C}^n$, et $G \subset GL(n)$ un *groupe algebrique*, et ρ l'inclusion. On a clairement besoin des deux conditions :

- **(Dim)** $\dim G = \dim V = n$
- **(O)** La représentation ρ a une orbite ouverte $G \cdot x_0$.

Soit une représentation linéaire :

$$\rho \ : G \to GL(V) \text{ or } G \times V \to V$$

avec $V = \mathbb{C}^n$, et $G \subset GL(n)$ un *groupe algebrique*, et ρ l'inclusion. On a clairement besoin des deux conditions :

- **(Dim)** $\dim G = \dim V = n$
- **(O)** La représentation ρ a une orbite ouverte $G \cdot x_0$.

Une représentation satisfaisant seulement à la condition **(O)** est appelé un espace vectoiriel préhomogène (PHVS). Sato et Kimura ont classifié ceux d'entre eux qui sont irréductibles.

L'action infinitesimale $T_eG \to \Theta(V)$.

A tout $A \in \mathfrak{g} = T_eG \subset M_{n,n}(\mathbb{C})$, on associe le champ de vecteurs :

$$x \to \delta_A(x) = \frac{d}{dt}(exp(At) \cdot x)_{|t=0} = A \cdot x.$$

A une base $\mathfrak{g}$ on associe n champs de vecteurs $\delta_1, \ldots, \delta_n$, tels que $span_{\mathbb{C}} < \delta_1(p), \ldots, \delta_n(p) >= T_p(G \cdot p)$.

Définition

La condition **(O)**, équivaut alors à $\Delta(x_1, \cdots, x_n) := \det(\delta_1, \ldots, \delta_n) \neq 0$ en tout point $p \in U$ de l'orbite ouverte.
Le diviseur $D = f^{-1}(0)$, est appelé **le discriminant**. C'est exactement le complémentaire de l'orbite ouverte.

Conclusion.

Une action de groupe algébrique G, ρ, V détermine un diviseur linéairement libre ssi les trois conditions suivantes sont remplies :

- **(Dim)** $\dim G = \dim V = n$
- **(O)** L'action ρ a une orbite ouverte $G \cdot x_0$.
- **(Red)** La décomposition irréductible du discriminant $\Delta(x_1, \cdots, x_n) = \det(\delta_1, \ldots, \delta_n)$ est sans facteurs multiples.

Théorème

Soit D un diviseur linéairement libre réductif (=tel que G_D est réductif.) Alors le théorème de comparaison logarithmique global est vrai :

$$H^\bullet(\Gamma(S, \Omega^\bullet(\log D))) \xrightarrow{\simeq} H^\bullet(S \setminus D)$$

1) Polynômes cubiques : il s'agit de l'espace $V \simeq \mathbb{C}^4$ des polynômes homogènes de degré trois en deux variables (u, v) :

$$f(u, v) = xu^3 + yu^2v + zuv^2 + tv^3$$

1) Polynômes cubiques : il s'agit de l'espace $V \simeq \mathbb{C}^4$ des polynômes homogènes de degré trois en deux variables (u, v) :

$$f(u, v) = xu^3 + yu^2v + zuv^2 + tv^3$$

L'action de groupe $GL(2) \times V \to V : (\gamma \cdot f)(u, v) = (f \circ \gamma^{-1})(u, v)$. Son orbite ouverte $G \cdot uv(u + v)$ est l'ensemble des produits de trois formes lineaires distinctes.

1) Polynômes cubiques : il s'agit de l'espace $V \simeq \mathbb{C}^4$ des polynômes homogènes de degré trois en deux variables (u, v) :

$$f(u,v) = xu^3 + yu^2v + zuv^2 + tv^3$$

L'action de groupe $GL(2) \times V \to V : (\gamma \cdot f)(u,v) = (f \circ \gamma^{-1})(u,v)$. Son orbite ouverte $G \cdot uv(u+v)$ est l'ensemble des produits de trois formes lineaires distinctes.
L'action infinitésimale de $gl(2)$ donne un discriminant réduit :

$$\frac{1}{3}\begin{vmatrix} 3x & 2y & z & 0 \\ 0 & 3x & 2y & z \\ y & 2z & 3t & 0 \\ 0 & y & 2z & 3t \end{vmatrix} =$$
$$-y^2z^2 + 4wy^3 + 4xz^3 - 18txyz + 27t^2x^2.$$

2) Soit $V = M_{3,4}$ l'ensemble des matrices 3×4.

2) Soit $V = M_{3,4}$ l'ensemble des matrices 3×4.
The group

$$G = \left[GL(3) \times (\mathbb{C}^*)^4\right] / \mathbb{C}^* (I, 1, 1, 1)$$

opère sur $M_{3,4}$:

$$(g, \lambda_1, \ldots, \lambda_4) \bullet M = g \cdot M \cdot \text{ diag } \left(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1} \lambda_4^{-1}\right)$$

2) Soit $V = M_{3,4}$ l'ensemble des matrices 3×4.
The group

$$G = \left[GL(3) \times (\mathbb{C}^*)^4\right]/\mathbb{C}^*(I, 1, 1, 1)$$

opère sur $M_{3,4}$:

$$(g, \lambda_1, \dots, \lambda_4) \bullet M = g \cdot M \cdot \ \text{diag} \ \left(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1}\right)$$

Resultats : $\dim G = \dim V = 12$, et il y a une orbite ouverte :

$$G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2) Soit $V = M_{3,4}$ l'ensemble des matrices 3×4.
The group

$$G = \left[GL(3) \times (\mathbb{C}^*)^4\right]/\mathbb{C}^*\dot{(}I, 1, 1, 1)$$

opère sur $M_{3,4}$:

$$(g, \lambda_1, \ldots, \lambda_4) \bullet M = g \cdot M \cdot \text{ diag } \left(\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \lambda_3^{-1}\lambda_4^{-1}\right)$$

Resultats : $\dim G = \dim V = 12$, et il y a une orbite ouverte :

$$G \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

L'équation du discriminant est $\Delta_1\Delta_2\Delta_3\Delta_4$,

$$\Delta_i(M) = \det(C_1, \cdots \widehat{C_i} \cdots C_4)$$

3) Diviseurs libres **de type cholesky** (G.-Mond-Schulze ; Damon-Pike) :
$G = B_n$ matrices triangulaires supérieures inversibles,
$V = Sym_n(\mathbb{C})$ espace des matrices symétriques.

3) Diviseurs libres **de type cholesky** (G.-Mond-Schulze ; Damon-Pike) :
$G = B_n$ matrices triangulaires supérieures inversibles,
$V = Sym_n(\mathbb{C})$ espace des matrices symétriques. L'action

$$B \cdot S = B^T SB$$

produit un diviseur linéairement libre $S_n = V(\Delta_1 \cdots \Delta_n)$.

3) Diviseurs libres **de type cholesky** (G.-Mond-Schulze ; Damon-Pike) :
$G = B_n$ matrices triangulaires supérieures inversibles,
$V = Sym_n(\mathbb{C})$ espace des matrices symétriques. L'action

$$B \cdot S = B^T SB$$

produit un diviseur linéairement libre $S_n = V(\Delta_1 \cdots \Delta_n)$.

$$\Delta_i(M) = \det M_i, \text{ sous-determinant } i \times i \text{ supérieur}$$

3) Diviseurs libres **de type cholesky** (G.-Mond-Schulze ; Damon-Pike) :
$G = B_n$ matrices triangulaires supérieures inversibles,
$V = Sym_n(\mathbb{C})$ espace des matrices symétriques. L'action

$$B \cdot S = B^T SB$$

produit un diviseur linéairement libre $S_n = V(\Delta_1 \cdots \Delta_n)$.

$$\Delta_i(M) = \det M_i, \text{ sous-determinant } i \times i \text{ supérieur}$$

Proposition (G.-Mond-Schulze)

Le diviseur S_n a la propriété de comparaison logarithmique.

Definitions 1.

1) Un **carquois orienté** $Q = (Q_0, Q_1)$, est constitué de :

- un ensemble Q_0 de sommets,

Definitions 1.

1) Un **carquois orienté** $Q = (Q_0, Q_1)$, est constitué de :

- un ensemble Q_0 de sommets,
- un sous ensemble $Q_1 \subset Q_0 \times Q_0$ de flèche. on note $t, h : Q_1 \to Q_0$ les projections. (tail et head en anglais, =(s,b) en français).

Definitions 1.

1) Un **carquois orienté** $Q = (Q_0, Q_1)$, est constitué de :

- un ensemble Q_0 de sommets,
- un sous ensemble $Q_1 \subset Q_0 \times Q_0$ de flèche. on note $t, h : Q_1 \to Q_0$ les projections. (tail et head en anglais, =(s,b) en français).

2) Une **représentation linéaire** de Q est une double collection :

$$H = (H_x)_{x \in Q_0}, (H(\varphi))_{\varphi \in Q_0}$$

d'espaces vectoriels et d'applications linéaires.

Definitions 1.

1) Un **carquois orienté** $Q = (Q_0, Q_1)$, est constitué de :

- un ensemble Q_0 de sommets,
- un sous ensemble $Q_1 \subset Q_0 \times Q_0$ de flèche. on note $t, h : Q_1 \to Q_0$ les projections. (tail et head en anglais, =(s,b) en français).

2) Une **représentation linéaire** de Q est une double collection :

$$H = (H_x)_{x \in Q_0}, (H(\varphi))_{\varphi \in Q_0}$$

d'espaces vectoriels et d'applications linéaires.
3) Il y a une notion naturelle de morphisme de representations. On obtient une catégorie abélienne. Le problème de la classification se pose, et on peut toujours supposer que $\forall x \in Q_0.\ H_x = \mathbb{C}^{d_x}$:

Definitions 2.

Soit $\mathbf{d} = (d_x)_{x \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$.

Definitions 2.

Soit $\mathbf{d} = (d_x)_{x \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$.
1) L'espace des représentations associées à $\mathbf{d}$ est :

$$\mathbb{V} = \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d}) := \prod_{\mathbf{(x,y) \in Q_0}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{k}^{\mathbf{d_x}}, \mathbf{k}^{\mathbf{d_y}})$$

Definitions 2.

Soit $\mathbf{d} = (d_x)_{x \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$.
1) L'espace des représentations associées à $\mathbf{d}$ est :

$$\mathbb{V} = \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d}) := \prod_{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{Q_0}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{k}^{\mathbf{d_x}}, \mathbf{k}^{\mathbf{d_y}})$$

2) Il y a une opération naturelle sur $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ du groupe

$$G = GL_k(\mathbf{d}) = \prod_{x \in Q_0} GL(\mathbb{C}^{d_x})/\mathbb{C}^* \cdot (I_{d_x})_{x \in Q_0}).$$

par changements de bases simultanés.

Definitions 2.

Soit $\mathbf{d} = (d_x)_{x \in Q_0} \in \mathbb{N}^{Q_0}$.
1) L'espace des représentations associées à **d** est :

$$\mathbb{V} = \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d}) := \prod_{(\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \mathbf{Q_0}} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbf{k}^{\mathbf{d_x}}, \mathbf{k}^{\mathbf{d_y}})$$

2) Il y a une opération naturelle sur $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ du groupe

$$G = GL_k(\mathbf{d}) = \prod_{x \in Q_0} GL(\mathbb{C}^{d_x})/\mathbb{C}^* \cdot (I_{d_x})_{x \in Q_0}.$$

par changements de bases simultanés.

Observation.-

Deux représentations $H, H' \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ de Q sont équivalentes ssi

H et H' sont dans *la même* G*-orbite.*

Caracterisation des diviseurs linéairement libres de carquois.

La condition (**Dim**) devient

$$q(\mathbf{d}) := \sum_{x_{Q_0}} d_p^2 - \sum_{(x,y)_{Q_1}} d_x d_y = 1.$$

Condition (**O**) signifie que le stabilisateur G_x, $x \in \mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ est generiquement fini.
La condition (**Red**), est plus subtile : G_x est une extension par le groupe multiplicatif G_m d'un groupe fini.
On verifie (**Red**) directement dans de nombreuses situations situations.

Théorème de Gabriel.

Théorème

Les trois conditions suivantes sont équivalentes :
1) Le carquois Q admet un nombre fini de représentations indecomposables.
2) La forme quadratique $Q(\mathbf{d})$ est definie positive.
3) Le carquois non orienté associé à Q est dans la liste suivante :

$$A_n, D_n, E_6, E_7, E_8,$$

Dans cette situation $(\mathbf{O})$ est toujours vrai.
Les solutions de $q(\mathbf{d}) = 1$ sont les racines positives du système de racine de même nom.

Théorème (Buchweitz, Mond)

Pour tout $\mathbf{d}$ *solution de* $q(\mathbf{d}) = 1$, $\mathrm{Rep}(Q, \mathbf{d})$ *est un diviseur linéairement libre.*

Tous ces cas sont réductifs, donc satisfont à la comparaison logarithmique globale. On a mieux

Théorème (G, Mond, Schulze.)

Pour tout diviseur linéairement libre associé à un carquois de type de représentation finie ou tame, on a la propriété de comparaison logarithmique

$$\Omega^\bullet(\log D) \xrightarrow{quis} \Omega^\bullet(*D))$$