EXPOSÉ DES TRAVAUX DE RECHERCHE EN THEORIE AXIOMATIQUE DU POTENTIEL
IMAR 2019, 80ÈME ANNIVERSAIRE DU PR. GHEORGHE BUCUR

Par ***Mounir BEZZARGA***

Bucarest le, 25 janvier 2019

Théorie du Potentiel pour les Systèmes Semi-dynamiques

1 Introduction aux systèmes semi-dynamiques

Bezzarga, M. & Bucur, GH. : *Théorie du Potentiel pour les Systèmes Semi-dynamiques*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. 39(1994), 439-456.

Bezzarga, M. & Bucur, GH. : *Duality for Semi-dynamical Systems*, Potential Theory- ICPT 1994 by Walter de Gruyter. & Co., Berlin. New york (1996), 275-286.

Bezzarga, M. : *Co-excessive Functions and Duality for Semi-dynamical Systems*, Rev. Roum. Math. Pures Appl. Vol.42(1997), nr.1-2.

Bezzarga, M. & Moldoveanu, E. and Secelean, N.: *Dual Resolvent for Semidynamical Systems*. Preprint.

Hajek (1968), Bhatia & Hajek (1969) et Saperstone (1981).

SSD. $(X, \mathcal{B})$ un espace mesurable séparable, $w \in X$. On appelle SSD sur $(X, \mathcal{B})$:

$$\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \to X, \text{ mesurable :}$$

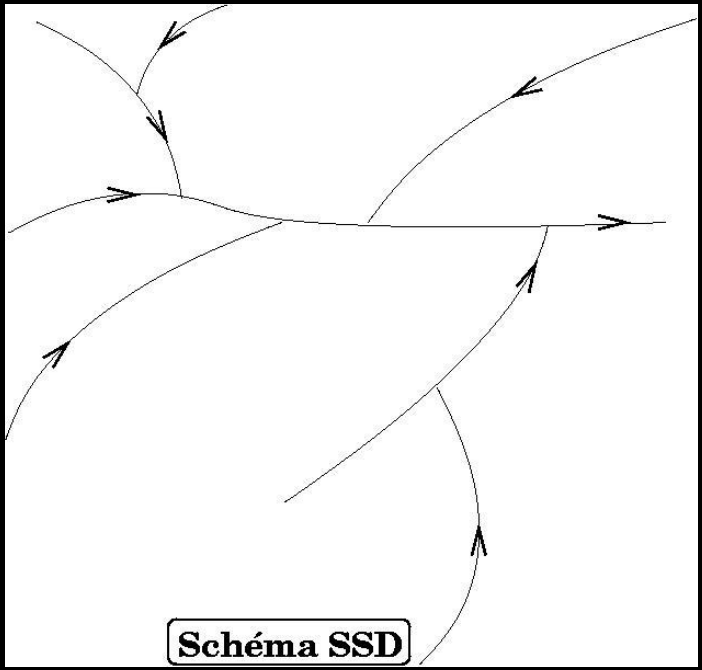
$(S_1) \exists \rho \in [0, +\infty]^X$ temps de vie avec puit w.

$(S_2) \forall s, t \in \mathbb{R}_+, \Phi(s, \Phi(t, .)) = \Phi(s+t, .)$.

$(S_3)\ \Phi(0, .) = I_X.$

$(S_4) \Phi(t, x) = \Phi(t, y), \ \forall\, t > 0 \Rightarrow x = y.$

Schéma SSD Animé



$$X_0 = X \backslash \{w\}, \;\; \mathcal{B}_0 = \{A \in \mathcal{B}, A \subset X_0\}$$

et $\forall x \in X_0$ on note

$$\Gamma_x = \{\Phi(t,x), t \in [0, \rho(x))\}.$$

$$x \leq_\Phi y \Leftrightarrow y \in \Gamma_x.$$

Topologie fine $\mathcal{T}_\Phi$ associée au $SSD\Phi$:

$$[\forall x \in X_0 : x \in D] \Rightarrow$$
$$[\exists \varepsilon \in (0, \rho(x)) : \Phi(t,x) \in D, \forall t \in [0,\varepsilon)].$$

Topologie naturelle $\mathcal{T}_\Phi^0$ associée au SSD Φ:

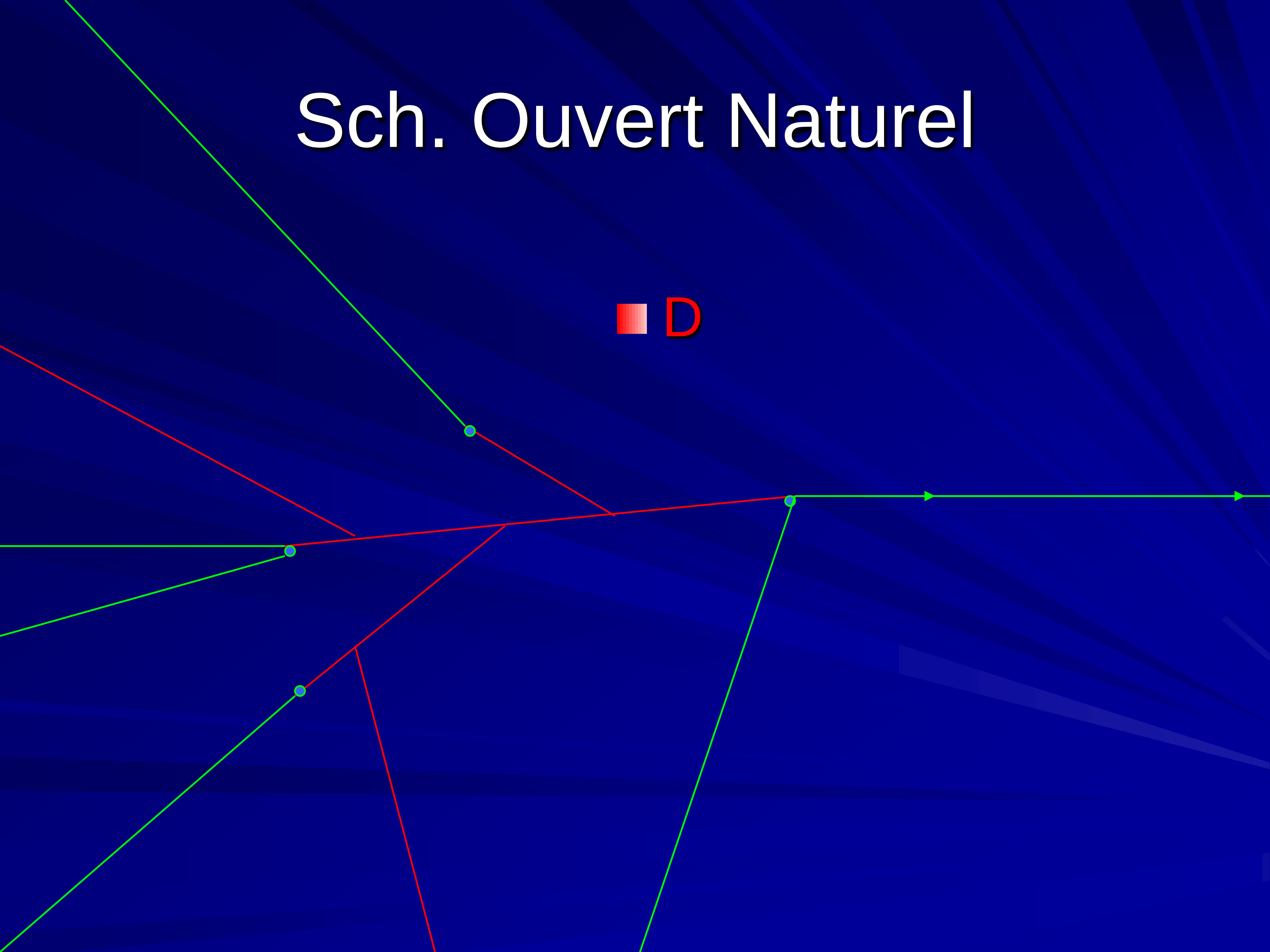
$$[\forall\, x \in X_0 \,, \forall\, t_0 \in [0, \rho(x)) : \Phi(t_0, x) \in D] \Rightarrow$$
$$[\exists\, \varepsilon > 0 : \Phi(t,x) \in D,\ \forall\, t \in (t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon) \cap [0, \rho(x))].$$

Sch. Ouvert Fin

- D

Sch. Ouvert Naturel

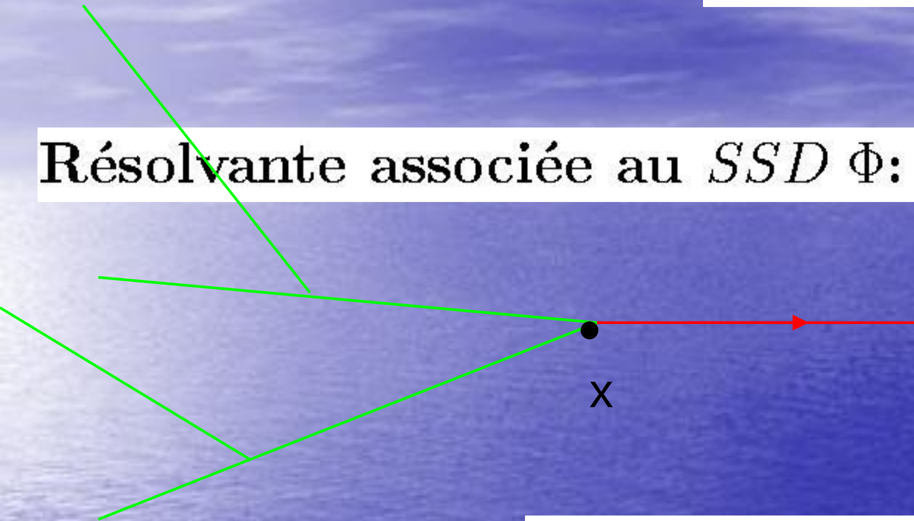
- D



SG déterministe:

$$\mathbb{H} = (H_t)_{t\geq 0} : H_t^x f := \begin{cases} f(\Phi(t,x)) & \text{si } t \in [0, \rho(x)) \\ 0 & \text{si } t \geq \rho(x), \end{cases}$$

Résolvante associée au SSD Φ:



$$\mathbb{V}_\Phi = (V_\alpha)_{\alpha\geq 0} : V_\alpha f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} H_t^x f dt.$$

Hyp. Φ est un SSD transient.

Fonctions Excessives:

$$\mathcal{E}_\Phi = \{f \geq 0, \downarrow (\leq_\Phi), \mathcal{T}_\Phi - \text{continue}\}.$$

Notation.

$$\mathcal{B}_0^* := \{A \subset X_0 : A \cap \Gamma_x \in \mathcal{B}_0,\ \forall\, x \in X_0\}.$$

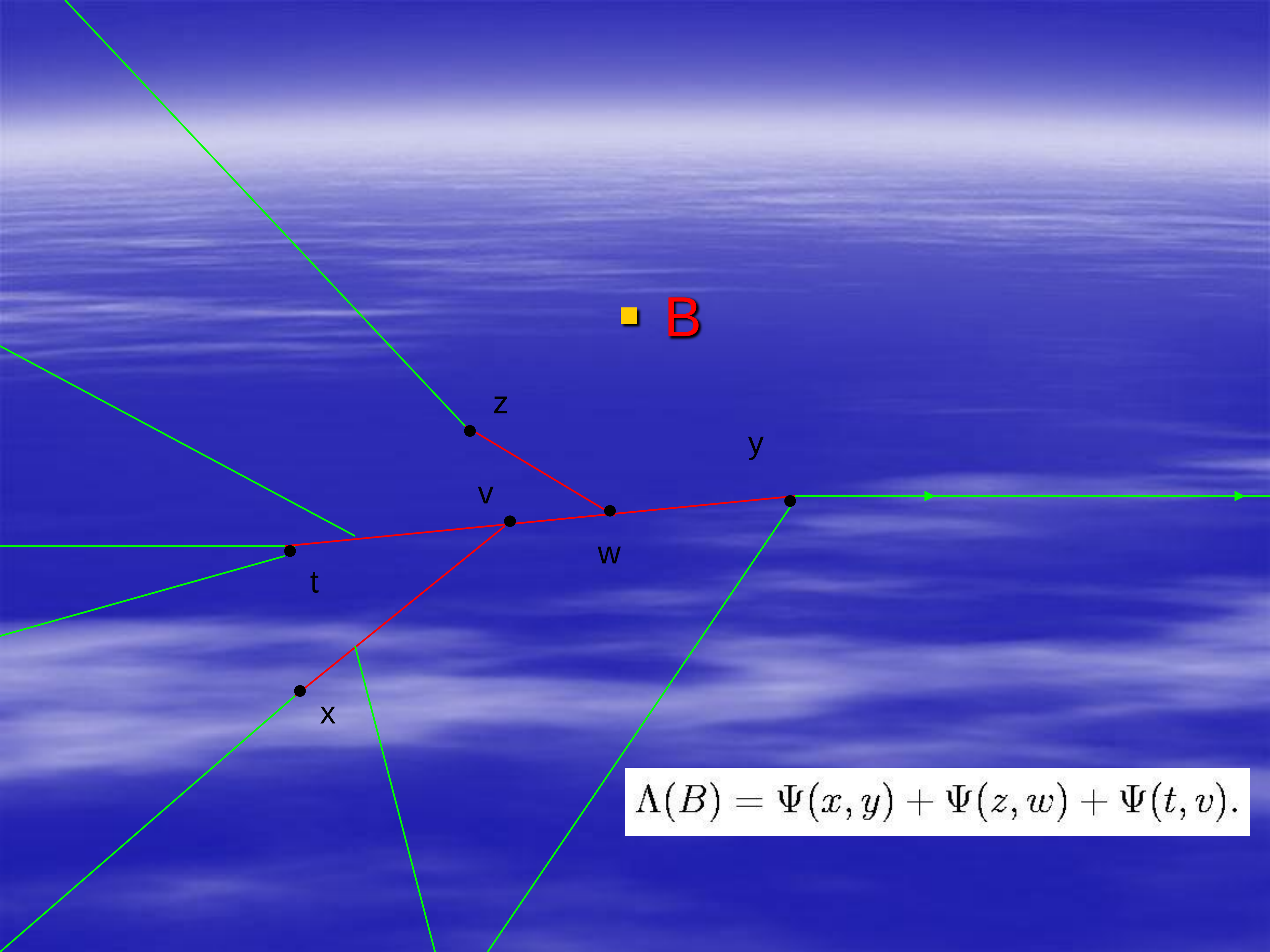
et $\mathcal{F}^* = \{f \geq 0 : \mathcal{B}_0^* - \text{mesurable sur} X_0\}$.

Mesure de Lebesgue associée au SSD Φ:

$\exists\,!$ mesure Λ sur $\mathcal{B}_0^*$:

$$\Lambda(B) = \lambda(\Phi_x^{-1}(B)), \forall\, x \in X_0,\ \forall\, B \in \mathcal{B}_0,\ B \subset \Gamma_x,$$

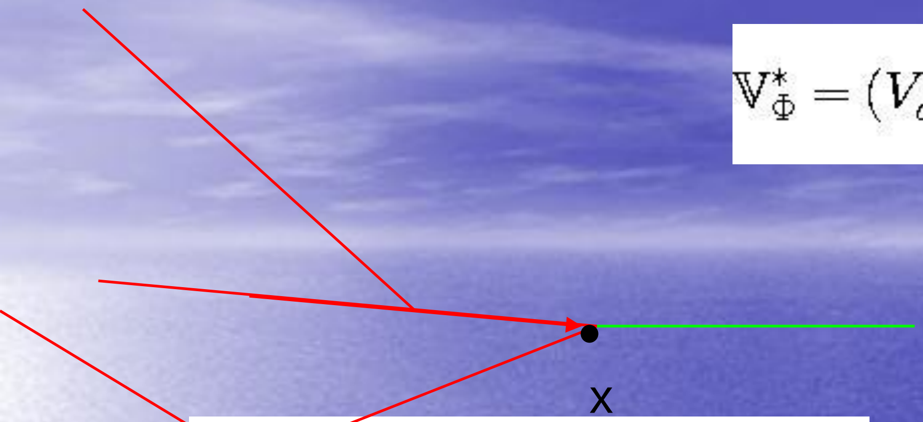
- B



$$\Lambda(B) = \Psi(x, y) + \Psi(z, w) + \Psi(t, v).$$

Résolvante duale associée au $SSD\ \Phi$:

$$\mathbb{V}^*_\Phi = (V^*_\alpha)_{\alpha \geq 0} : \ V^*_\alpha f(x) = \int e^{-\alpha \Psi(y,x)} G(y,x) f(y) d\Lambda.$$



Formule de dualité:

$$\int f V_\alpha g d\Lambda = \int g V^*_\alpha f d\Lambda, \forall f, \ g \in \mathcal{F}^*.$$

Fonctions Coexcessives:

$$\mathcal{E}^*_\Phi = \{f \geq 0, \text{tot. } \nearrow (\leq_\Phi), \ \text{tot. continue à gauche}\}$$

2 Processus dual droit associé à un SSD

Potential Analysis 21: 47-74, 2004.

Blumenthal et Getoor (1968), Dellacherie et Meyer(1980), Boboc, Bucur et Cornea (1981).

Hyp. Vue que toute fonction co-excessive finie s'annule, sur chaque $\mathcal{T}_\Phi^0$-composante connexe en dehors d'une σ-réunion de trajectoires, on suppose que par tout point de X_0 passe au plus une σ-infinité de trajectoires maximales.

$\mathcal{T}_\Phi^0$-Composantes Connexes. $M = \cup_{n \in \mathbb{N}^*} \Gamma_n$. En particulier M est un espace de Lusin et M est Φ-absorbant.

Semi-groupe dual: $\forall f \in \mathcal{F}^*$ et $\forall t \geq 0$,

$$P_t f(x) := \sum_{\Psi(y,x)=t} f(y), x \in X_0, \mathbb{P} = (P_t)_{t \geq 0} \text{ est un SG } .$$

Formule de dualité.

$$\int f H_t g d\Lambda = \int g P_t f d\Lambda, \forall f,\ g \in \mathcal{F}^*.$$

u-transformation de Doob. $M = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\Gamma_n$ une composante connexe et $u := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\chi_{\Gamma_n}$.
$\forall\, f \in \mathcal{F}^*$,

$$P_t^u f(x) := \begin{cases} \frac{P_t(uf)(x)}{u(x)} & \text{si } x \in M \\ 0 & \text{si } x \in X_0 \backslash M. \end{cases}$$

Alors
$(P_t^u)_{t\geq 0}$ SG sous-markovien en dualité avec $\mathbb{H}$ par rapport à $u\Lambda$.

Processus Dual Droit. $X_0 = \cup_n \Gamma_n$ est supposè connexe. Alors X_0 est semi-saturé par rapport à $\mathbb{H}$ (resp. $\mathbb{P}^u$). En particulier, $\exists$ $(Y_t)_{t \geq 0}$ un processus droit sur $(X_0, \mathcal{B}_0)$ ayant $\mathbb{P}^u$ comme SG de transition. Un tel processus $(Y_t)_{t \geq 0}$ est appelé processus dual associé à Φ.

Schéma SSD Connexe

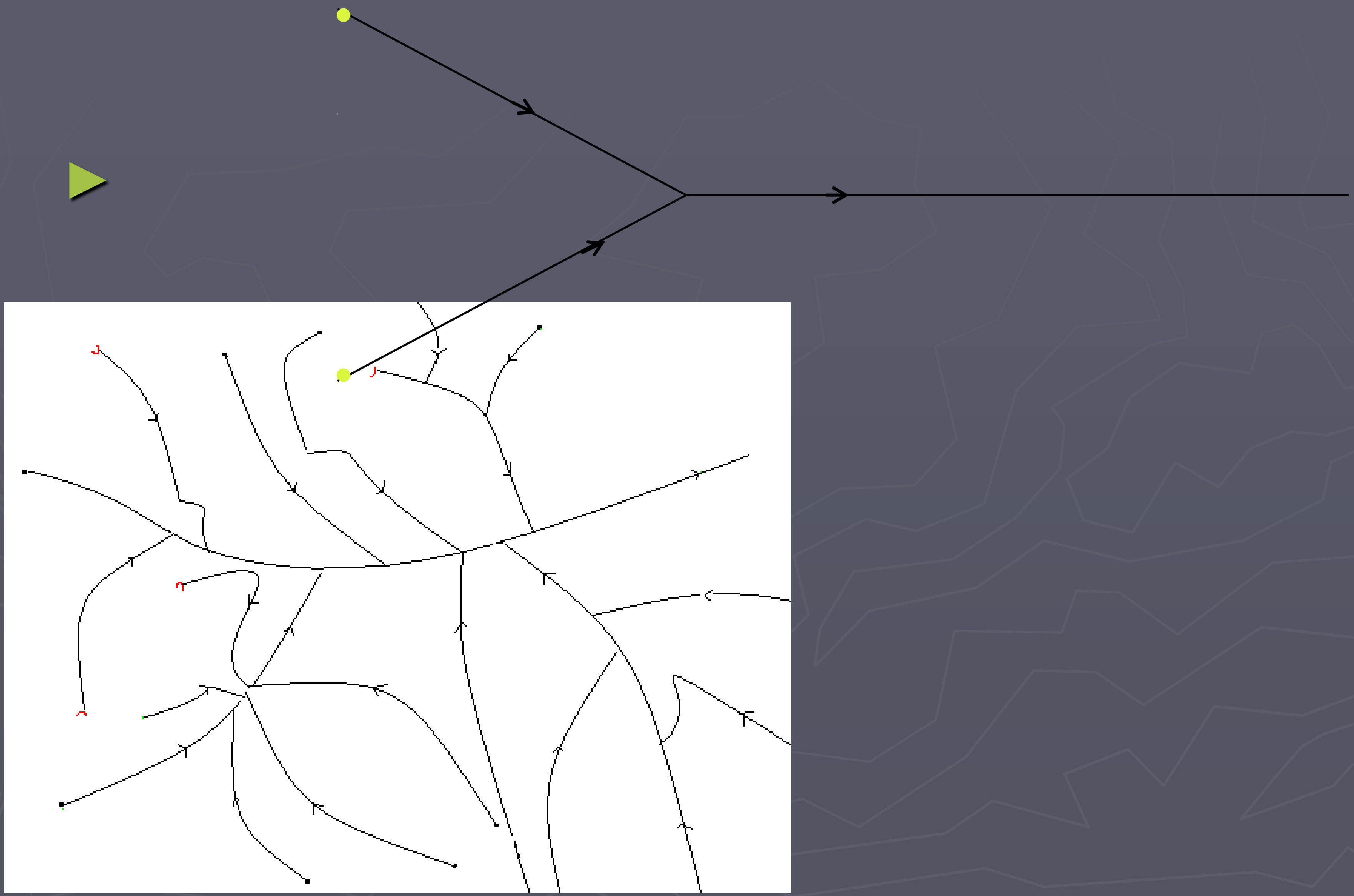
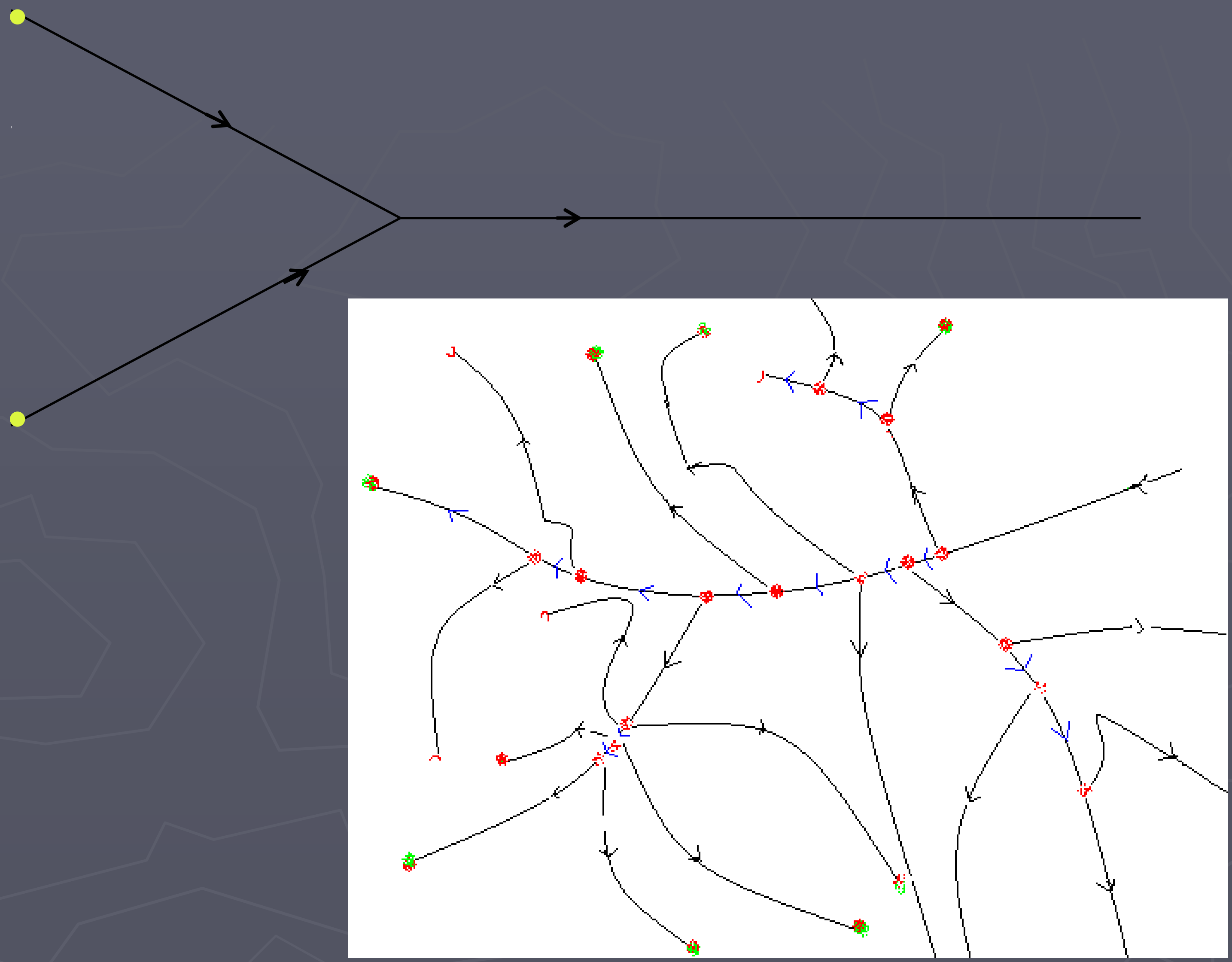


Schéma.(Réalisation Proc. Dual)

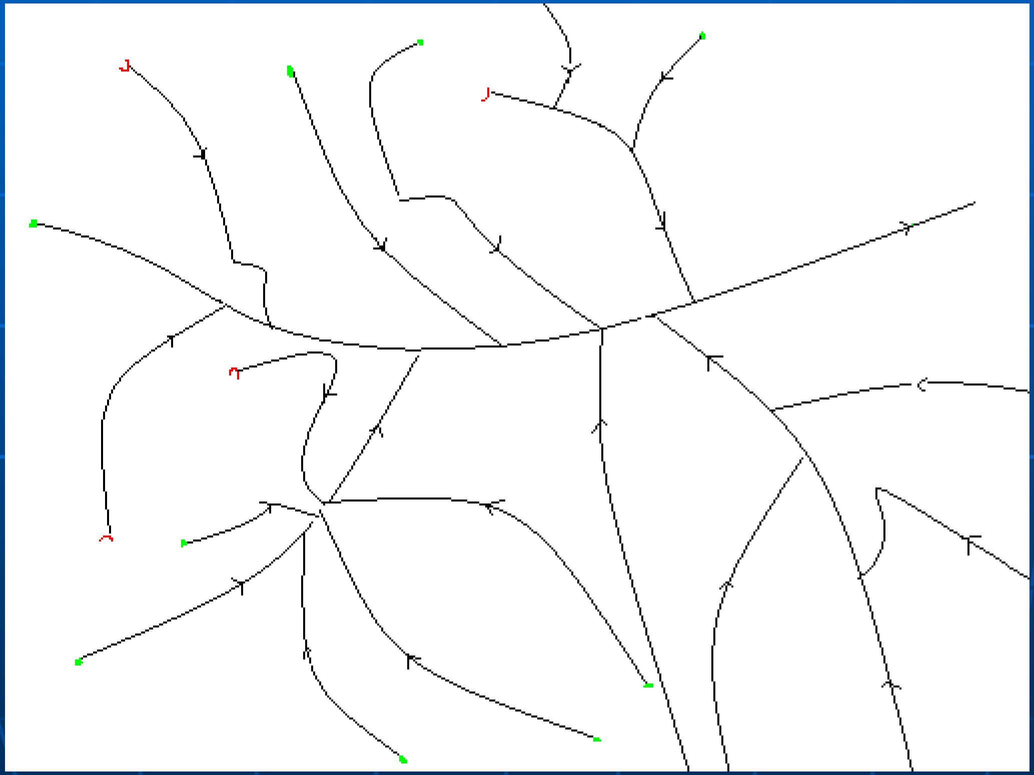


Probabilités $\mathbb{P}^u$-Invariantes

$X_0 = \cup_{n\in\mathbb{N}^*}\Gamma_n$ est supposé $\mathcal{T}_\Phi^0$-connexe .

Alors une probabilité μ sur $(X_0, \mathcal{B}_0)$ est $\mathbb{P}^u$-invariante $\Leftrightarrow$ $\exists$ $(\alpha_n)_n$, $\alpha_n \geq 0$, $\sum \alpha_n = 1$ et $(x_n)_n$ de points minimaux de X_0: $\mu = \sum \alpha_n \varepsilon_{x_n}$.

Schéma (Prob. Inv.)



Journal of Mathematics and Statistics 1 (1): 58-65, 2005
ISSN 1549-3644

A Theorem of Hunt for Semidynamical Systems

[1]Mounir Bezzarga and [2]Gheorghe Bucur
[1]Institut Préparatoire aux Etudes d'Ingénieur de Tunis
2 rue Jawaher Lel Nehru, 1008 Montfleury-Tunis, Tunisia
[2]Faculty of Mathematics, University of Bucharest
Str. Academiei 14, RO-70109 Bucharest, Romania

Hunt (1957)

Soit $A \in \mathcal{B}_0^*$,

temps de début, $D_A := \inf\{t \geq 0 : \Phi(t,.) \in A\}$

temps d'entrée, $T_A := \inf\{t > 0 : \Phi(t,.) \in A\}$.

Soit $s \in \mathcal{E}_\Phi(\Lambda)$,

réduite, $R_s^A := \inf\{t \in \mathcal{E}(\Lambda) : t \geq s \text{ sur } A\}$.

Théorème de Hunt.

$$s(\Phi(T_A,.)) \leq R_s^A, \text{sur } X_0$$

$s(\Phi(T_A,.)) = R_s^A$ sauf sur $A \cap (A^r)^c$, où $A^r := [T_A = 0]$.

4 Subordination de systèmes semi-dynamiques (..& N.BelhajRhouma)

Tokyo J. Mathematics Vol.26 No 2, 2003.

Dynkin, Meyer (1962), Blumenthal et Getoor (1968): Processus de Markov.

Temps Terminal. $T \in [0, \infty]^X$ est un temps d'arrêt si T est $\mathcal{B}_0^*$-mesurable.
Si de plus, $\forall\, t \geq 0$,

$$T = t + T(\Phi(t, .)) \text{ sur } [T > t],$$

on dira que T est un temps terminal.

Exemple. D_A (resp.T_A) temps terminal, $\forall A \in \mathcal{B}_0^*$.

Fonctionelle Multiplicative:

$\mathcal{M} = \{M_t; 0 \leq t < \infty\} \subset [0,1]^X$ est appelée (FM) si:

(M_1) $\forall\, t \geq 0$, M_t est $\mathcal{B}_0^*$-mesurable.

(M_2)

$$M_{s+t} = M_t M_s(\Phi(t, .)), \forall t, s \geq 0.$$

Exemple. $\forall f \in \mathcal{F}^*$,

$$T := \inf\{t > 0 : \int_0^t f(\Phi(s,.))ds = \infty\}.$$

est un temps terminal sur X_0 et

$$M_t = \chi_{[0,T[}(t) \exp\left(- \int_0^t f(\Phi(s,.))ds)\right)$$

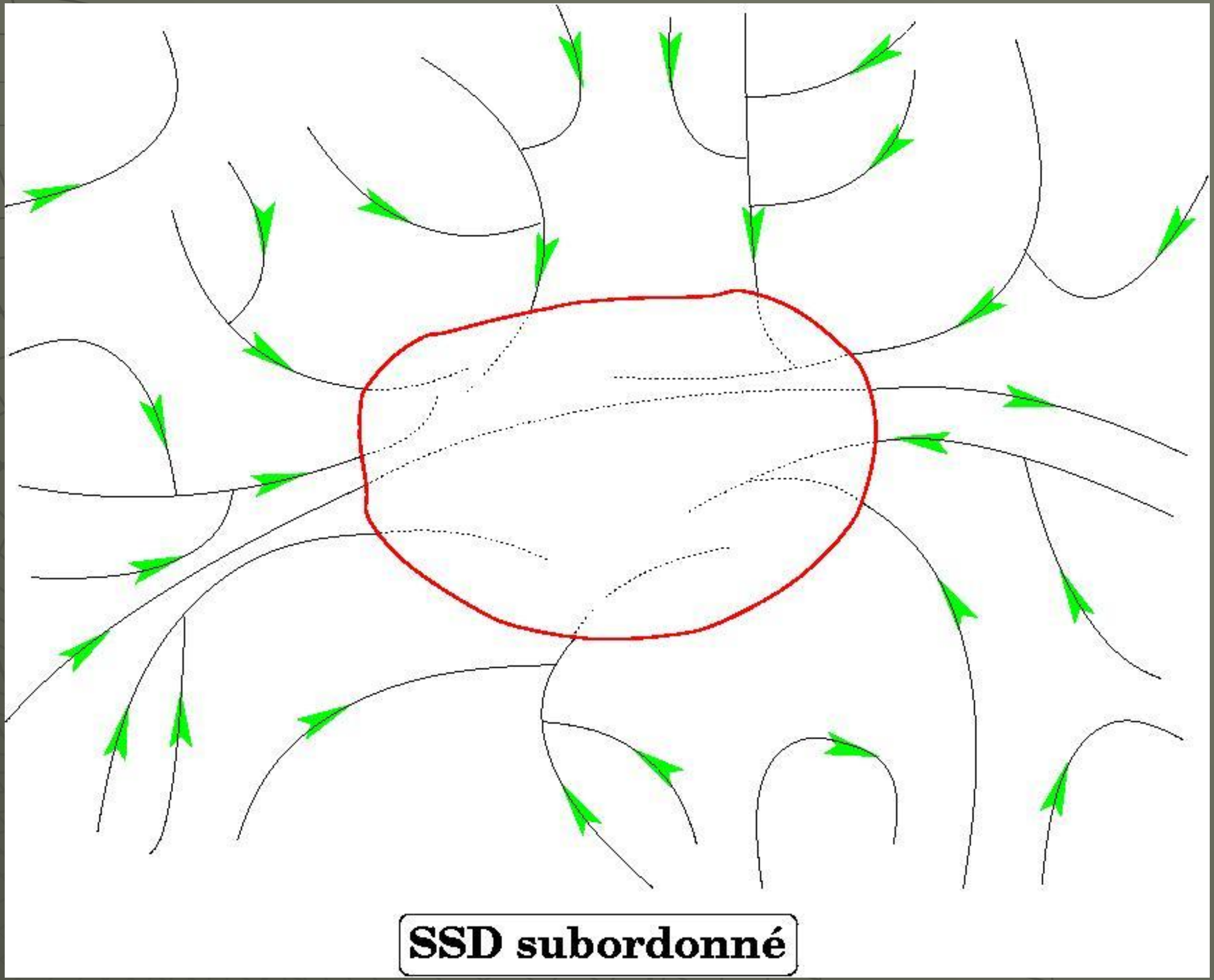
définit une FM.

Subordination. Φ un SSD sur $(X, \mathcal{B})$.
$\mathbb{P} = (P_t)_{t \geq 0}$ est subordonné à $\mathbb{H}$ si

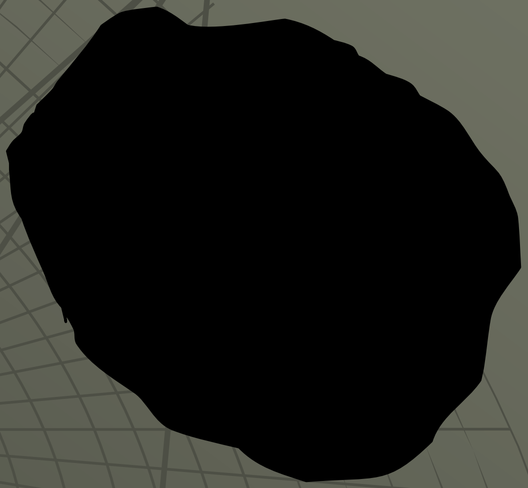
$$\mathcal{E}_x P_t \leq \mathcal{E}_x H_t, \ \forall\, x \in X, \ \forall\, t \geq 0.$$

Meyer (1962): Processus de Markov d'espace d'état LCD.

Théorème de Meyer. $\mathbb{H} = (H_t)_{t \geq 0}$ et $\mathbb{P} = (P_t)_{t \geq 0}$ deux SG déterministes sur $(X, \mathcal{B})$. Alors $\mathbb{P}$ est subordonné à $\mathbb{H}$ ssi $\exists\ T$ un temps terminal par rapport à $\mathbb{H}$: $P_t = \chi_{[0,T[} H_t$, $\forall\, t \geq 0$.


SSD subordonné

Sch. SSD Subordonné



Hyp. $\mathbb{P}$ multiplicatif tq: $V1 := \int_0^\infty P_t 1 dt > 0$

Caract. SG Mult. Supposons que $(X, \mathcal{B})$ est de Lusin, $V1 < \infty$ et que $\mathcal{E}_\mathbb{P}$ est minstable et sépare les points de X. De plus, $\forall x \in X, \exists\ \alpha_x < \beta_x$ tel que

$V1 : \Gamma_x^{\mathcal{E}_\mathbb{P}} := \{y :\ x \leq_{\mathcal{E}_\mathbb{P}} y\} \to]\alpha_x, \beta_x]$ isomorphisme.

Alors, $\mathbb{P}$ est déterministe continu à droite et $T := V1$ est un temps terminal par rapport à $\mathbb{P}$.

Hmissi (1989): X LCD.

5 Caracérisation des SSD produisant la même relation d'ordre (..& N.BelhajRhouma)

Proc. of the Int. Conf. on Stochastic Analysis and Appl. Hammamet, 2001, Kluwer.

Blumenthal et Getoor (1968) et Sharpe (1988), Ito et McKean (1965), Fitzimmons (1988) et (1990) et Glover (1983).

Fonctionnelle Additive:

$\mathcal{A} = \{A_t, t \in [0,\rho)\} \subset [0,\infty]^X$ est appelée (FA) de Φ si:

(A_1) $\forall x \in X$, $t \to A_t(x)$ est croissante, continue à droite et satisfait $A_0(x) = 0$.

(A_2) $\forall t \in [0,+\infty)$, $x \to A_t(x)$ est $\mathcal{B}_0^*$-mesurable.

(A_3) $\forall x \in X_0, s, t \geq 0$ tel que $s+t \in [0,\rho(x))$,

$$A_{t+s}(x) = A_t(x) + A_s(\Phi(t,x)).$$

(A_4) $A_t(w) = 0, \ \forall \ t \geq 0.$

Exemple.

$$\mathcal{A} = (A_t)_{t\geq 0} : A_t(x) = \int_0^{t\wedge\rho(x)} f(\Phi(u,x))du.$$

Hyp. $\mathcal{A}$ FAC stricte i.e. $t \mapsto A_t(x)$ continue strictement croissante sur $[0, \rho(x))$.

Inverse de $\mathcal{A}$.

$$\tau = (\tau_t)_{t\geq 0} : \tau_t(x) = \inf\{s : A_s(x) > t\}.$$

SSD Changé. L'application

$$\begin{aligned} \Phi_{\mathcal{A}} : \mathbb{R}_+ \times X &\longrightarrow X \\ (t, x) &\longmapsto \Phi_{\mathcal{A}}(t, x) = \Phi(\tau_t(x), x) \end{aligned}$$

est un SSD sur $(X, \mathcal{B})$ appelé SSD changé de Φ.

Soit deux SSD Φ et Φ' transients sur $(X, \mathcal{B})$ ayant le même pôle w.

$$^{\Phi}R_1^U = \inf\{s \in \mathcal{E}_\Phi : s \geq 1 \text{ sur } U\}$$

et

$$^{\Phi'}R_1^U = \inf\{s \in \mathcal{E}_{\Phi'} : s \geq 1 \text{ sur } U\},$$

les potentiels d'équilibre de $U \in \mathcal{B}$ par rapport à Φ et Φ' respectivement.

Caractérisation des SSD .... ⟲

1. $\forall\, x, y \in X_0$, on a $x \leq_\Phi y \Longleftrightarrow x \leq_{\Phi'} y$,

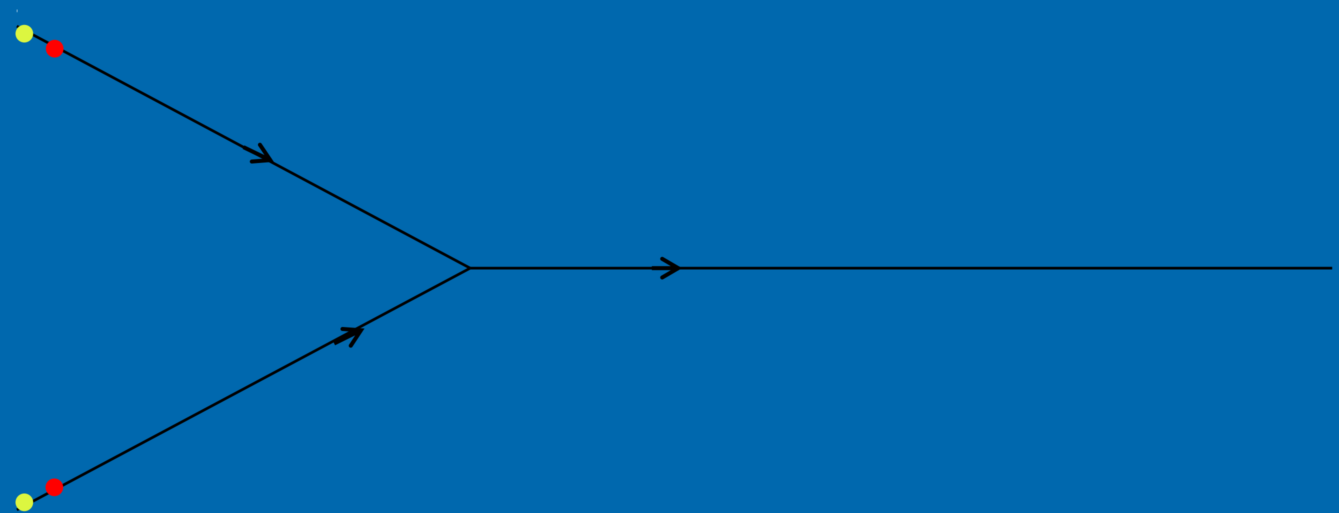
2. $\exists\, \mathcal{A}$ une FAC stricte telle que $\Phi' = \Phi_{\mathcal{A}}$,

3. $\mathcal{E}_\Phi = \mathcal{E}_{\Phi'}$,

4. ${}^{\Phi}R_1^U = {}^{\Phi'}R_1^U$, pour tout borélien U de X_0.

SSD produisant le même ordre

➤



Nedra Belhaj Rhouma; Mounir Bezzarga
Regular potentials of additive functionals in semidynamical systems
Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae, Vol. 45 (2004), No. 3, 555--572

Mokobodzki (1968), Boboc,Bucur et Cornea (1981).

Not. $\mathbb{A}$ l'ensemble des (FAC) de Φ.

Potentiels Réguliers. $f \geq 0$ sur X_0 est de Liapunov (resp. Liapunov stricte) si f est décroissante (resp. strictement décroissante) suivant " $\leq_\Phi$ " et $\mathcal{T}_0^\Phi$-continue. Si de plus, $\lim_{t \to +\infty} f(\Phi(t,.)) = 0$, f est dite potentiel régulier.

$$\mathcal{P} := \{\text{potentiels réguliers}\}$$

Potentiel d'une FAC $\mathcal{A}$. Pour tout $f \in \mathcal{F}^*$, on définit

$$U_{\mathcal{A}}f(x) = \int_0^{+\infty} f(\Phi(t,x))dA_t(x).$$

On écrit $u_{\mathcal{A}} = U_{\mathcal{A}}1$, pour le potentiel de $\mathcal{A}$.

Ordre pour les FAC.

$$\mathcal{A} \leq \mathcal{B} \Longleftrightarrow \exists\, \mathcal{C} \in \mathbb{A} : \mathcal{A}+\mathcal{C} = \mathcal{B}, \forall \mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{A}.$$

Not. $\mathbb{A}_\Phi = \{\mathcal{A} \in \mathbb{A} : u_{\mathcal{A}} < \infty\}.$

Corresp. FAC et Pot. rég.

$(\mathbb{A}_\Phi, \leq) \to (\mathcal{P}, \preceq) : \mathcal{A} \hookrightarrow u_\mathcal{A}$est un isomorphisme.

De plus $f = u_\mathcal{A}$ est de Liapunov strict sur $\mathrm{supp}\mathcal{A} = \{x \in X : A_s(x) > 0, \forall\, s > 0\}$.

Radon-Nikodym. Soit $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \mathbb{A}$.

$\mathcal{B} \leq \mathcal{A} \Longleftrightarrow \exists\, f \in \mathcal{F}^*, 0 \leq f \leq 1,$ tq $\mathcal{B} = f\mathcal{A}$.

Structure de $\mathbb{A}_\Phi$.

1. $\forall (\mathcal{A}^i)_{i\in I} \uparrow$ dominée dans $\mathbb{A}_\Phi$,
   $\mathcal{A} := \sup_i \mathcal{A}^i \in \mathbb{A}_\Phi$.

2. $\forall (\mathcal{A}^i)_{i\in I} \downarrow$ dans $\mathbb{A}_\Phi$, $\exists\ \mathcal{A} = \wedge_i \mathcal{A}^i$ dans $\mathbb{A}_\Phi$.

3. La décomposition de Riesz est satisfaite dans
   $\mathbb{A}_\Phi : \mathcal{A} \leq \mathcal{B}^1 + \mathcal{B}^2 \Rightarrow \mathcal{A} = \mathcal{A}^1 + \mathcal{A}^2,\ \mathcal{A}^i \leq \mathcal{B}^i$

Structure de $\mathcal{P}$.

1. $\forall (u_i)_{i\in I} \nearrow$ et dominée dans $(\mathcal{P}, \preceq)$, $\sup\limits_i u_i = \curlyvee_i u_i \in \mathcal{P}$.

2. $\forall (u_i)_{i\in I} \searrow$ dans $(\mathcal{P}, \preceq)$, $\wedge_i u_i \in \mathcal{P}$ et $\wedge_i u_i = \curlywedge_i u_i \in \mathcal{P}$.

3. La décomposition de Riesz dans $\mathcal{P}$ est satisfaite pour l'ordre naturel et l'ordre spécifique.

7 Potentiels de FA dans les SSD instables (..& N.BelhajRhouma)

Afr. Diasp. J. of Mathematics, Vol.3, N.1, 2004.

Bhatia, Hajek & Szego (1970).

$(X, \mathcal{T})$ un espace LCD et $\Phi : \mathbb{R}_+ \times X \to X$, un SSD "global" continu.

Attracteur. $\forall x \in X$, on note

$$J_x = \left\{ \lim_n \Phi(t_n, x_n) \in X : \lim_n x_n = x, \lim_n t_n = +\infty \right\}$$

l'attracteur de x et on note $J = \cup_{x \in X} J_x$ l'attracteur uniforme.

Instabilité. Le SSD Φ est dit instable si $\forall x \in X$, on a $x \notin J_x$.

Hyp. $\mathcal{A}$ $(FA) \Rightarrow x \to A_t(x)$ continue, $\forall t \geq 0$.

Caract. de l'Instab.. $\circlearrowleft$

1. Φ est un SSD instable sur $(X, \mathcal{T})$.

2. $0 \leq f \in C_c(X) \Longrightarrow Vf := \int_0^{+\infty} f(\Phi(t,.))dt$ est borné.

3. V est propre.

4. $\forall \mathcal{A}$ (FA) et $\forall$ $0 \leq f \in C_c(X), U_{\mathcal{A}}f$ est borné.

5. $\forall \mathcal{A}$ (FA) , $U_{\mathcal{A}}$ est propre.

Remarque. Les équivalences $(1) \Longleftrightarrow (2) \Longleftrightarrow (3)$ ont été démontrées par M.Hmissi (1994).

Prop. Loc. de Cont.. Φ est un SSD instable, $\mathcal{A}$ une FAC stricte et $0 \leq f \in C_c(X)$.

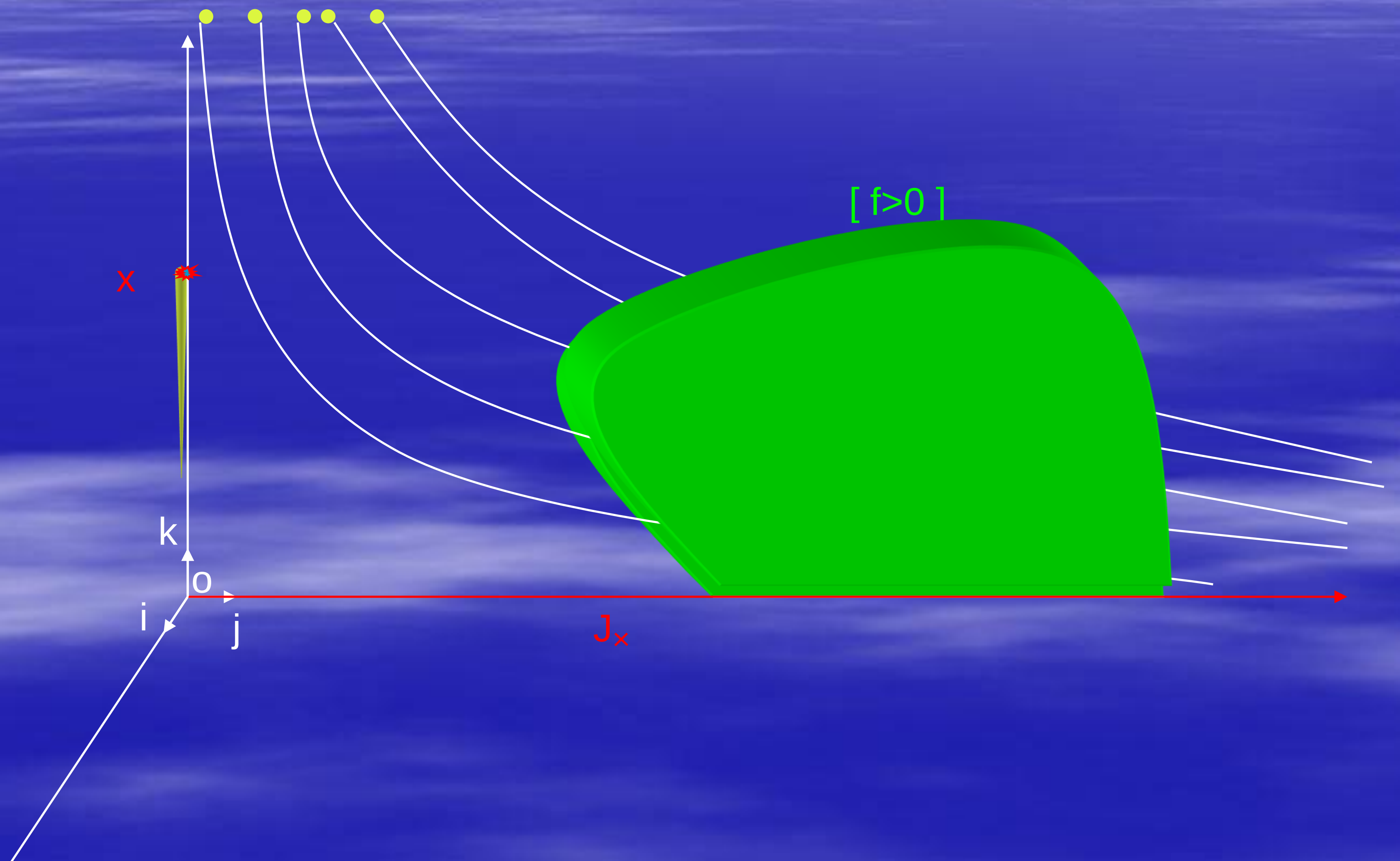
Alors $\forall x \in X$,

$$U_{\mathcal{A}}f \text{ est continue en } x \Longleftrightarrow [f > 0] \cap J_x = \emptyset.$$

Remarque. M. Hmissi (1994):

$$Vf \text{est continue} \Leftrightarrow J \cap supp\ f = \emptyset.$$

$U_A f$ est continue en x



Je vous remercie pour

votre attention