Un problème variationnel dégénéré

Pierre Bousquet (Université Toulouse 3)

Workshop
Transitions de phase et équations non locales

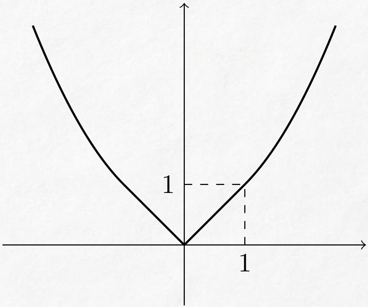
Bucarest, Avril 2018

Un problème variationnel dégénéré

$$\text{Minimiser } u \mapsto \int_\Omega \big(F(\nabla u(x)) - \lambda u\big)\, dx \quad , \quad u \in H_0^1(\Omega),$$

où

$$F(\xi) = \begin{cases} |\xi| \text{ if } |\xi| < 1, \\ \frac{1}{2}(|\xi|^2 + 1) \text{ if } |\xi| \geq 1. \end{cases}$$



Quand Ω est une boule

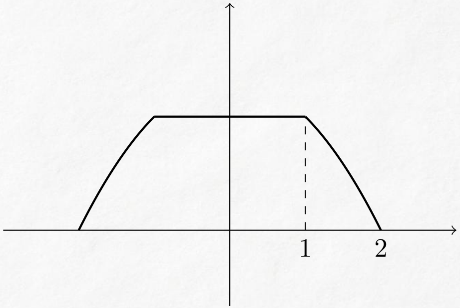


Figure : Solution quand Ω est un disque dans $\mathbb{R}^2$ de rayon $r = 2$ avec $\lambda = 2$.

$$u(x) = \frac{-\lambda}{2N}(|x|^2 - N^2/\lambda^2)_+ + \frac{\lambda}{2N}(r^2 - N^2/\lambda^2)_+.$$

Régularité pour les problèmes dégénérés I

Un problème plus général

$$\text{Minimiser } u \mapsto \int_\Omega \big(F(\nabla u) + h(x)u\big)\,dx.$$

Théorème (Fonseca-Fusco-Marcellini ; Brasco)

On suppose que

1. $F(\cdot)$ *est uniformément convexe et* C^1 *hors de la boule unité* B,
2. *il existe* $L > 0$ *tel que*

$$0 \le F(\xi) \le L(1 + |\xi|^2) \quad , \quad |\nabla F(\xi)| \le L(1 + |\xi|),$$

3. $h \in L^p(\Omega)$, $p > N$.

Alors tout minimiseur local est localement Lipschitz dans Ω.

Régularité pour les problèmes dégénérés II

Un problème plus général

$$\text{Minimiser } u \mapsto \int_\Omega \big(F(\nabla u) + h(x)u\big)\,dx \quad , \quad u \in W_0^{1,2}(\Omega) + \varphi.$$

Théorème (Bousquet-Brasco)

On suppose que

1. *F est uniformément convexe hors de la boule unité B,*
2. *$h \in L^\infty(\Omega)$,*
3. *Ω est convexe et φ vérifie la condition de pente bornée.*

Alors toute solution est Lipschitz sur $\overline{\Omega}$.

Régularité C^1 sur l'ouvert $[|\nabla u| > 1]$

Théorème (Colombo-Figalli)

On suppose que

1. F *est convexe,* C^2 *sur* $\mathbb{R}^N \setminus B$,
2. *il existe* $0 < \mu < M$ *tel que* $\forall \xi \in \mathbb{R}^N \setminus B$,

$$\mu Id \leq \nabla^2 F(\xi) \leq M Id.$$

3. $h \in L^q(\Omega)$ *avec* $q > N$.
4. u *est Lipschitz.*

Alors la fonction $(|\nabla u| - 1)_+$ *a un représentant continu sur* Ω.

Un résultat d'unicité

Un problème variationnel sans terme d'ordre inférieur

$$\text{Minimiser } u \mapsto \int_\Omega g(|\nabla u(x)|)\, dx \quad , \quad u \in W_0^{1,\infty} + \varphi.$$

Théorème (Marcellini)

On suppose que

1. $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *est convexe et* $g(t) > g(0)$ *pour tout* $t > 0$,
2. Ω *est convexe et* C^1,
3. *il existe une solution* $u \in C^1(\overline{\Omega})$ *telle que* $\nabla u \neq 0$ *dans* $\overline{\Omega}$.

Alors u *est l'unique solution.*

Régularité des ensembles de niveau

Lemme

Soit u une solution et U l'ouvert de Ω défini par $[|\nabla u| > 1]$. Alors pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, il existe un ouvert W dans Ω tel que

$$W \cap u^{-1}(t) \quad \textit{est une hypersurface } C^1$$

et pour tout $s > N - 8$,

$$\mathcal{H}^s(\Omega \setminus (W \cup \partial U)) = 0.$$

Le résultat d'unicité

Théorème (Bouchitté, B.)

On suppose que $\partial\Omega$ est connexe. Alors il existe une unique solution.

Structure de la preuve

Etape 1 $[|\nabla u| > 1] = [|\nabla v| > 1] =: U$ et $\nabla u = \nabla v$ sur U.

Etape 2 Chaque composante connexe de U intersecte la frontière $\partial\Omega$.

$$\Longrightarrow \qquad u = v \text{ sur } U.$$

Etape 3 v est constante sur les ensembles de niveau de u.

Etape 4 Pour presque tout $t \in \mathbb{R}$, chaque composante connexe de $u^{-1}(t)$ intersecte U.

$$\Longrightarrow \qquad u = v \quad \text{sur les ensembles de niveau de } u.$$