Méthodes de décomposition du domaine à deux niveaux pour les inégalités variationnelles de la deuxième espèce et les inégalités quasi-variationnelles

Lori BADEA

Institut de Mathématiques de l'Académie Roumaine

Plan de l'exposé

• inégalités variationnelles de la deuxième espéce

$$u \in K : \langle F'(u), v - u \rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \text{ for any } v \in K$$

et les inégalités quasi-variationnelles

$$u \in K : \langle F'(u), v - u \rangle + \varphi(u, v) - \varphi(u, u) \geq 0, \text{ for any } v \in K$$

sont équivalentes à de problèmes de minimisation

$$u \in K : F(u) + \varphi(u) \leq F(v) + \varphi(v), \text{ for any } v \in K$$

et

$$u \in K : F(u) + \varphi(u, u) \leq F(v) + \varphi(u, v), \text{ for any } v \in K.$$

respectivement, où les fonctions φ sont non différentiables

• de nombreux problèmes de mécanique sont modélisés avec de telles inégalités: l'infiltration d'un fluide par un milieu poreux, problèmes de contact avec friction, etc.

• L. B., R. Krause, *One- and two-level Schwarz methods for inequalities of the second kind and their application to frictional contact*, Numer. Math., 120, 4, 2012, pp. 573-599

on a introduit de méthodes multiplicatives à deux niveaux pour de telles inégalités

• les méthodes introduites dans cet exposé sont une amélioration de ces méthodes

- par l'introduction de certains ensembles convexes de niveau où on cherche les corrections
  - on évite l'utilisation de l'ensemble convexe initial (du problème) qui est définit sur le niveau de discrétisation fin, pour la recherche des corrections sur le niveau grossier (qui introduirait des interpolations supplémentaires)
  - de cette manière, les itérations ont une complexité de calcul optimale
- la condition de convergence des nouveaux algorithmes pour les inégalités quasi-variationnelles est similaire à la condition d'existence et d'unicité de la solution de l'inégalité et ne dépend pas du nombre de sous-domaines

• dans cet exposé, nous introduisons de méthodes additives et multiplicatives à deux niveaux pour les deux, les inégalités variationnelles de la deuxième espèce et les inégalités quasi-variationnelles

- on introduit des algorithmes de correction sur les sous-espaces correspondant aux méthodes dans un espace de Banach réflexif général
- on prouve leur convergence globale en utilisant d'hypothèses sur
  - la construction des ensembles convexes de niveau
  - la décomposition des éléments de l'ensemble convexe en fonction de la décomposition du domaine
- on estime l'erreur et écrit explicitement le taux de convergence qui dépend essentiellement d'une constante C_0 introduite par la condition de stabilité de la décomposition du domaine des hypothèses
- les algorithmes abstraits deviennent méthodes de Schwarz à deux niveaux dans le cas des espaces d'éléments finis, et nous montrons que
  - les hypothèses introduites dans le cadre abstrait sont satisfaites pour les ensembles convexes à deux obstacles
  - on écrit explicitement la constante C_0 en fonction des paramètres du maillage et de la décomposition du domaine
  - nous obtenons que les taux de convergence des méthodes à deux niveaux que nous avons introduit dpendent très faiblement ou, dans certains cas, sont totalement indépendants de ces paramètres

Cadre général pour

les algorithmes de correction sur les sous-espaces

- V - espace de Banach réflexif, $K \subset V$ - ensemble convexe fermé nonvide
- sous-espaces fermés de V:
  - V_0 - associé à la discrétisation grossière
  - $V_{11}, \dots, V_{1m}$ - associés à la décomposition du domaine
- hypothèse sur le choix des ensembles convexes où on cherche les corrections de niveau (les ensambles convexes de niveau dépendent de l'approximation courante des algorithmes)

Hypothèse (1)

On suppose que pour un $w \in K$, nous pouvons introduire récursivement les ensembles convexes K_1 et K_0:
$0 \in K_1$, $K_1 \subset \{v_1 \in V : w + v_1 \in K\}$ *et, pour un* $w_1 \in K_1$,
$0 \in K_0$, $K_0 \subset \{v_0 \in V_0 : w + w_1 + v_0 \in K\}$.

• hypothèses sur la décomposition des éléments de l'ensemble convexe K

- pour l'algorithme multiplicatif

Hypothèse (2)

Il existe une constante $C_0 > 0$ telle que pour tout $u, w \in K$, pour tout $w_{1i} \in V_{1i}$, $w_{11} + \ldots + w_{1i} \in K_1$, $i = 1, \ldots, m$, et pour tout $w_0 \in K_0$, il existe $u_{1i} \in V_{1i}$, $i = 1, \ldots, m$, et $u_0 \in V_0$, qui satisfont

$$u_{11} \in K_1 \text{ et } w_{11} + \ldots + w_{1i-1} + u_{1i} \in K_1,\ i = 2, \ldots, m,\ u_0 \in K_0$$
$$u - w = \sum_{i=1}^{m} u_{1i} + u_0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m} ||u_{1i}|| + ||u_0|| \leq C_0(||u - w|| + \sum_{i=1}^{m} ||w_{1i}|| + ||w_0||).$$

Les ensembles convexes K_1 et K_0 sont construits comme dans l'Hypothèse 1 en utilisant w et $w_1 = w_{11} + \ldots + w_{1m}$.

- pour l'algorithme additif

Hypothèse (3)

Il existe une constante $C_0 > 0$ tel que pour tout $u, w \in K$, il existe $u_{1i} \in V_{1i} \cap K_1$, $i = 1, \ldots, m$, et $u_0 \in K_0$, qui satisfont

$$u - w = \sum_{i=1}^{m} u_{1i} + u_0 \text{ et } \sum_{i=1}^{m} ||u_{1i}|| + ||u_0|| \leq C_0 ||u - w||.$$

Les ensembles convexes K_1 et K_0 sont construits comme dans l'Hypothèse 1 avec w ci-dessus et $w_1 = 0$.

• $F : V \to \mathbf{R}$ - fonctionnelle différentiable Gâteaux:
- il existe $p, q > 1$, et pour tout $M > 0$ il existe α_M, $\beta_M > 0$ pour lesquelles

$$\alpha_M ||v - u||^p \leq < F'(v) - F'(u), v - u >, \quad ||F'(v) - F'(u)||_{V'} \leq \beta_M ||v - u||^{q-1},$$

pour tout $u, v \in K$, $||u||, ||v|| \leq M$

$$\Downarrow$$

$$1 < q \leq 2 \leq p$$

F fonctionnelle strictement convexe

pour tout $u, v \in V$, $\|u\|, \|v\| \leq M$, on a

$$\alpha_M \|v - u\|^p \leq \langle F'(v) - F'(u), v - u \rangle \leq \beta_M \|v - u\|^q$$

et

$$\begin{aligned} \langle F'(u), v - u \rangle + \frac{\alpha_M}{p} \|v - u\|^p \; &\leq \; F(v) - F(u) \\ &\leq \; \langle F'(u), v - u \rangle + \frac{\beta_M}{q} ||v - u||^q \end{aligned}$$

Algorithmes de correction sur les sous-espaces

pour les inégalités variationnelles de la deuxième espèce

- $\varphi : V \to \mathbf{R}$ fonctionnelle propre, inférieurement semicontinue et convexe
  - $F + \varphi$ coercitive dans le sens $F(v) + \varphi(v) \to \infty$, quand $\|v\| \to \infty$, $v \in K$, si K n'est pas borné
  - l'hypothèse technique dans le cas multiplicatif

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{i=1}^{m}[\varphi(w + \sum_{j=1}^{i-1} w_{1j} + u_{1i}) - \varphi(w + \sum_{j=1}^{i-1} w_{1j} + w_{1i})]\\ &+\varphi(w + w_1 + u_0) - \varphi(w + w_1 + w_0)\\ &\le \varphi(u) - \varphi(w + \textstyle\sum_{i=1}^{m} w_{1i} + w_0)\end{aligned}$$

  pour $u, w \in K$, $u_{1i}, w_{1i} \in V_{1i}$ et $u_0, w_0 \in V_0$ comme dans l'Hypothèse 2, et $w_1 = \sum_{j=1}^{m} w_{1j}$.
  - l'hypothèse technique dans le cas additif,

$$\sum_{i=1}^{m} \varphi(w + u_{1i}) + \varphi(w + u_0) \le m\varphi(w) + \varphi(u)$$

  pour tout $u, w \in K$, $u_{1i} \in V_{1i}$, $i = 1, \dots, m$, et $u_0 \in V_0$ qui satisfont l'Hypothèse 3

• l'inégalité variationnelle de la deuxième espèce

$$u \in K : \langle F'(u), v - u\rangle + \varphi(v) - \varphi(u) \geq 0, \text{ for any } v \in K \tag{1}$$

– le problème a une solution unique

• pour résoudre le problème (1), nous introduisons deux algorithmes, l'un de type multiplicatif et l'autre du type additif

– les itérations ont une complexité de calcul optimale

• algorithme multiplicatif pour le problème (1)

Algorithme (1)

On commence l'algorithme avec un $u^0 \in K$ *arbitraire. En admettant qu'après* $n \geq 0$ *itérations nous avons* $u^n \in K$, *on effectue successivement les pas suivants:*
- au niveau 1, on construit l'ensemble convexe K_1 *comme dans l'Hypothèse 1 avec* $w = u^n$. *Ensuite, on écrit d'abord* $w_1^n = 0$, *et, pour* $i = 1, \dots, m$, *on calcule successivement* $w_{1i}^{n+1} \in V_{1i}$, $w_1^{n+\frac{i-1}{m}} + w_{1i}^{n+1} \in K_1$, *la solution des inégalités*

$$\begin{aligned}&\langle F'(u^n + w_1^{n+\frac{i-1}{m}} + w_{1i}^{n+1}), v_{1i} - w_{1i}^{n+1}\rangle \\ &+\varphi(u^n + w_1^{n+\frac{i-1}{m}} + v_{1i}) - \varphi(u^n + w_1^{n+\frac{i-1}{m}} + w_{1i}^{n+1}) \geq 0,\end{aligned}$$

pour tout $v_{1i} \in V_{1i}$, $w_1^{n+\frac{i-1}{m}} + v_{1i} \in K_1$, *et on écrit* $w_1^{n+\frac{i}{m}} = w_1^{n+\frac{i-1}{m}} + w_{1i}^{n+1}$,
- au niveau 0, on construit l'ensemble convexe K_0 *comme dans l'Hypothèse 1 avec* $w = u^n$ *et* $w_1 = w_1^{n+1}$. *Ensuite, on calcule* $w_0^{n+1} \in K_0$, *la solution de l'inégalité*

$$\begin{aligned}&\langle F'(u^n + w_1^{n+1} + w_0^{n+1}), v_0 - w_0^{n+1}\rangle \\ &+\varphi(u^n + w_1^{n+1} + v_0) - \varphi(u^n + w_1^{n+1} + w_0^{n+1}) \geq 0,\end{aligned}$$

pour tout $v_0 \in K_0$,
- on écrit $u^{n+1} = u^n + w_1^{n+1} + w_0^{n+1}$.

• algorithme additif pour le problème (1)

Algorithme (2)

On commence l'algorithme avec un $u^0 \in K$ arbitraire. En admettant qu'après $n \geq 0$ itérations nous avons $u^n \in K$, on effectue simultanément les pas suivants:
- on construit les ensembles convexes K_1 et K_0 comme dans l'Hypothèse 1 avec $w = u^n$ et $w_1 = 0$,
- pour $i = 1, \ldots, m$, on calcule simultanément:
(a) $w_{1i}^{n+1} \in V_{1i} \cap K_1$, les solutions des inégalités

$$\langle F'(u^n + w_{1i}^{n+1}), v_{1i} - w_{1i}^{n+1}\rangle + \varphi(u^n + v_{1i}) - \varphi(u^n + w_{1i}^{n+1}) \geq 0,$$

pour tout $v_{1i} \in V_{1i} \cap K_1$, on écrit $w_1^{n+1} = \sum_{i=1}^m w_{1i}^{n+1}$,
(b) $w_0^{n+1} \in K_0$, la solution de l'inégalité

$$\langle F'(u^n + w_0^{n+1}), v_0 - w_0^{n+1}\rangle + \varphi(u^n + v_0) - \varphi(u^n + w_0^{n+1}) \geq 0,$$

pour tout $v_0 \in K_0$,
Ensuite, on écrit $u^{n+1} = u^n + \frac{r}{m+1}(w_1^{n+1} + w_0^{n+1})$, avec un $0 < r \leq 1$ fixé.

- par l'introduction des ensembles convexes de niveau, les interpolations additionnelles pour vérifier les contraintes données sur la grille grossière sont évitées

Theorem (1)

Soit V un espace de Banach réflexif, $V_0, V_{11}, \dots, V_{1m}$ certains sous-espaces fermés de V et K un sous-ensemble convexe fermé non vide de V qui satisfait les hypothèses précédentes. De plus, on suppose que F est Gâteaux différentiable, φ est convexe et inférieurement semi-continue et elles ont les propriétés ci-dessus. Soit $M = \sup\{||v|| : F(v) + \varphi(v) \leq F(u^0) + \varphi(u^0)\}$ où u^0 est le point de départ des Algorithmes 1 ou 2. Alors, les normes des approximations de la solution u du problème (1) obtenues à partir de ces algorithmes sont bornées par M et nous avons les estimations d'erreur suivantes:

(i) si $p = q = 2$ on a

$$F(u^n) + \varphi(u^n) - F(u) - \varphi(u) \leq \left(\frac{C_1}{C_1+1}\right)^n [F(u^0) + \varphi(u^0) - F(u) - \varphi(u)],$$

$$\|u^n - u\|^2 \leq \frac{2}{\alpha_M}\left(\frac{C_1}{C_1+1}\right)^n [F(u^0) + \varphi(u^0) - F(u) - \varphi(u)].$$

(ii) si $p > q$ on a

$$F(u^n) + \varphi(u^n) - F(u) - \varphi(u) \leq \frac{F(u^0)+\varphi(u^0)-F(u)-\varphi(u)}{[1+nC_2(F(u^0)+\varphi(u^0)-F(u)-\varphi(u))^{\frac{p-q}{q-1}}]^{\frac{q-1}{p-q}}},$$

$$\|u - u^n\|^p \leq \frac{p}{\alpha_M} \frac{F(u^0)+\varphi(u^0)-F(u)-\varphi(u)}{[1+nC_2(F(u^0)+\varphi(u^0)-F(u)-\varphi(u))^{\frac{p-q}{q-1}}]^{\frac{q-1}{p-q}}}.$$

Les constantes $C_1 > 0$ et $C_2 > 0$ dépendent de la fonction F, la solution u, l'approximation initiale u^0, m et la constante C_0.

Remarque (1)

– *pour l'Algorithme 1, les constantes* C_1 *et* C_2 *peuvent être écrires comme,*

$$C_1 = \beta_M(1+2C_0)(m+1)^{2-\frac{q}{p}}(\frac{p}{\alpha_M})^{\frac{q}{p}}(F(u^0)-F(u)$$
$$+\varphi(u^0)-\varphi(u))^{\frac{p-q}{p(p-1)}} + \beta_M C_0(m+1)^{\frac{p-q+1}{p}}\frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{p-1}}}(\frac{p}{\alpha_M})^{\frac{q-1}{p-1}}$$
$$C_2 = \frac{p-q}{(p-1)(F(u^0)+\varphi(u^0)-F(u)-\varphi(u))^{\frac{p-q}{q-1}}+(q-1)C_1^{\frac{p-1}{q-1}}}$$

où $\varepsilon = \alpha_M/(p\beta_M C_0(m+1)^{\frac{p-q+1}{p}})$.

– *dans le cas de l'Algorithm 2, ces constantes peuvent être écrites comme,*

$$C_1 = \frac{m+1}{r}[1-\frac{r}{m+1}+(1+C_0)(m+1)\frac{\beta_M}{\frac{\alpha_M}{2}}+C_0^2(m+1)(\frac{\beta_M}{\frac{\alpha_M}{2}})^2]$$
$$C_2 = \frac{p-q}{(p-1)(F(u^0)+\varphi(u^0)-F(u)-\varphi(u))^{\frac{p-q}{q-1}}+(q-1)C_3^{\frac{p-1}{q-1}}}$$

où $C_3 = \frac{m+1-r}{r}[F(u^0)-F(u)+\varphi(u^0)-\varphi(u)]^{\frac{p-q}{p-1}} + (\frac{m+1}{r})^{\frac{q}{p}}\frac{\beta_M(1+C_0)(m+1)^{\frac{(p-1)q}{p}}}{(\frac{\alpha_M}{p})^{\frac{q}{p}}}\cdot$

$$(F(u^0)-F(u)+\varphi(u^0)-\varphi(u))^{\frac{p-q}{p(p-1)}} + (\frac{m+1}{r})^{\frac{q-1}{p-1}}\frac{\beta_M^{\frac{p}{p-1}}C_0^{\frac{p}{p-1}}(m+1)^{q-1}}{(\frac{\alpha_M}{p})^{\frac{q}{p-1}}}$$

Algorithmes de correction sur les sous-espaces

pour les inégalités quasi-variationnelles

• dans cette section, nous supposons que $p = q = 2$
• $\varphi : V \times V \to \mathbf{R}$ fonctionnelle (conditions imposées sur le second argument de $\varphi(u, v)$ sont similaires avec les conditions de $\varphi(v)$ dans le cas des inégalités variationnelles de la deuxième espèce)

– pour tout $u \in V$, $\varphi(u, \cdot) : V \to \mathbf{R}$ est convexe et inférieurement semicontinue
– si K n'est pas borné, $F + \varphi$ est coercitif dans le sens que $F(v) + \varphi(u, v) \to \infty$, when $\|v\| \to \infty,\ v \in K$, pour tout $u \in K$
– pour tout $M > 0$ il existe $c_M > 0$ tel que
$|\varphi(v_1, w_2) + \varphi(v_2, w_1) - \varphi(v_1, w_1) - \varphi(v_2, w_2)| \leq c_M \|v_1 - v_2\| \|w_1 - w_2\|$
pour tout $v_1,\ v_2,\ w_1\ w_2 \in K$, $\|v_1\|,\ \|v_2\|,\ \|w_1\|\ \|w_2\| \leq M$
– hypothèse technique dans le cas multiplicatif
$\sum_{i=1}^m [\varphi(u, w + \sum_{j=1}^{i-1} w_{1j} + u_{1i}) - \varphi(u, w + \sum_{j=1}^{i-1} w_{1j} + w_{1i})]$
$+\varphi(u, w + w_1 + u_0) - \varphi(u, w + w_1 + w_0) \leq \varphi(u, v) - \varphi(u, w + \sum_{i=1}^m w_{1i} + w_0)$
pour tout $u, w \in K$, $u_{1i}, w_{1i} \in V_{1i}$ et $u_0, w_0 \in V_0$ satisfesant l'Hypothèse 2, et $w_1 = \sum_{j=1}^m w_{1j}$.
– hypothèse technique dans le cas l'additif
$\sum_{i=1}^m \varphi(u, w + u_{1i}) + \varphi(u, w + u_0) \leq m\varphi(u, w) + \varphi(u, u)$
pour tout $u, w \in K$, $u_{1i} \in V_{1i}$, $i = 1, \ldots, m$, et $u_0 \in V_0$ qui satisfont l'Hypothèse 3

• inégalité quasi-variationnelle

$$u \in K : \langle F'(u), v - u \rangle + \varphi(u, v) - \varphi(u, u) \geq 0, \text{ pour tout } v \in K. \quad (2)$$

- (condition d'existence et d'unicité de la solution) le problème (2) a une solution unique s'il existe une constante $\varkappa < 1$ telle que

$$\frac{c_M}{\alpha_M} \leq \varkappa \text{ pour tout } M > 0. \quad (3)$$

• pour résoudre le problème (2), on introduit deux algorithmes, un du type multiplicatif et l'autre du type additif

- les algorithmes exécutent κ itérations internes à chaque itération, où le premier argument de φ est maintenu inchangé (ayant la valeur obtenue à l'itération précédente)
- les conditions de convergence sont indṕendantes du nombre de sous-espaces
- les itérations ont une complexité de calcul optimale

• algorithme multiplicatif pour le problème (2)

Algorithme (3)

On commence l'algorithme avec un $u^0 \in K$ arbitraire. En supposant qu'après $n \geq 0$ itérations nous avons $u^n \in K$, on écrit $\tilde{u}^n = u^n$ et effectuons les deux pas suivants:
1. On effectue $\kappa \geq 1$ itérations multiplicatives, en gardant le premier argument de φ égal à u^n.
On commence par $\tilde{u}^n$ et ayant $\tilde{u}^{n+k-1}$ à l'itération $1 \leq k \leq \kappa$, on calcule successivement les corrections de niveau et $\tilde{u}^{n+k}$:
− au niveau 1, on construit l'ensemble convexe K_1 comme dans l'Hypothèse 1 avec $w = \tilde{u}^{n+k-1}$. Ensuite, on écrit d'abord $w_1^k = 0$, et, pour $i = 1, \ldots, m$, on calcule successivement $w_{1i}^{k+1} \in V_{1i}$, $w_1^{k+\frac{i-1}{m}} + w_{1i}^{k+1} \in K_1$, les solutions des inégalités

$$\langle F'(\tilde{u}^{n+k-1} + w_1^{k+\frac{i-1}{m}} + w_{1i}^{k+1}), v_{1i} - w_{1i}^{k+1}\rangle +$$
$$\varphi(u^n, \tilde{u}^{n+k-1} + w_1^{k+\frac{i-1}{m}} + v_{1i}) - \varphi(u^n, \tilde{u}^{n+k-1} + w_1^{k+\frac{i-1}{m}} + w_{1i}^{k+1}) \geq 0,$$

pour tout $v_{1i} \in V_{1i}$, $w_1^{k+\frac{i-1}{m}} + v_{1i} \in K_1$, and write $w_1^{k+\frac{i}{m}} = w_1^{k+\frac{i-1}{m}} + w_{1i}^{k+1}$
− au niveau 0, on construit l'ensemble convexe K_0 comme dans l'Hypothèse 1 avec $w = \tilde{u}^{n+k-1}$ et $w_1 = w_1^{k+1}$. Ensuite, on calcule $w_0^{k+1} \in K_0$, la solution de l'inégalité

$$\langle F'(\tilde{u}^{n+k-1} + w_1^{k+1} + w_0^{k+1}), v_0 - w_0^{k+1}\rangle +$$
$$\varphi(u^n, \tilde{u}^{n+k-1} + w_1^{k+1} + v_0) - \varphi(u^n, \tilde{u}^{n+k-1} + w_1^{k+1} + w_0^{k+1}) \geq 0,$$

pour tout $v_0 \in K_0$
− on écrit $\tilde{u}^{n+k} = \tilde{u}^{n+k-1} + w_1^{k+1} + w_0^{k+1}$.
2. On écrit $u^{n+1} = \tilde{u}^{n+\kappa}$

• algorithme additif pour le problème (2)

Algorithme (4)

On commence l'algorithme avec un $u^0 \in K$. *En supposant qu'après l'itération* $n \geq 0$ *nous avons* $u^n \in K$, *on écrit* $\tilde{u}^n = u^n$ *et effectuons les deux pas suivants:*

1.On effectue $\kappa \geq 1$ *itérations additives, en gardant le premier argument de* φ *égal à* u^n. *On commence par* $\tilde{u}^n$ *et ayant* $\tilde{u}^{n+k-1}$ *à l'itération* $1 \leq k \leq \kappa$, *on calcule simultanément les corrections de niveau et* $\tilde{u}^{n+k}$*:*

$-$ *on construit les ensembles convexes* K_1 *et* K_0 *comme dans l'Hypothèse 1 avec* $w = \tilde{u}^{n+k-1}$ *et* $w_1 = 0$,

$-$ *pour* $i = 1, \ldots, m$, *on calcule simultanément:*

(a) $w_{1i}^{k+1} \in V_{1i} \cap K_1$, *les solutions des inégalités*

$$\langle F'(\tilde{u}^{n+k-1} + w_{1i}^{k+1}), v_{1i} - w_{1i}^{k+1}\rangle$$
$$+\varphi(u^n, \tilde{u}^{n+k-1} + v_{1i}) - \varphi(u^n, \tilde{u}^{n+k-1} + w_{1i}^{k+1}) \geq 0,$$

pour tout $v_{1i} \in V_{1i} \cap K_1$, *on écrit* $w_1^{k+1} = \sum_{i=1}^m w_{1i}^{k+1}$, *et*

(b) $w_0^{k+1} K_0$, *la solution de l'inégalité*

$$\langle F'(\tilde{u}^{n+k-1} + w_0^{k+1}), v_0 - w_0^{k+1}\rangle$$
$$+\varphi(u^n, \tilde{u}^{n+k-1} + v_0) - \varphi(u^n, \tilde{u}^{n+k-1} + w_0^{k+1}) \geq 0,$$

pour tout $v_0 \in K_0$.

$-$ *on écrit* $\tilde{u}^{n+k} = \tilde{u}^{n+k-1} + \frac{r}{m+1}(w_1^{k+1} + w_0^{k+1})$, *avec un* $0 < r \leq 1$ *fixé.*

2. On écrit $u^{n+1} = \tilde{u}^{n+\kappa}$

Theorem (2)

Soit V un espace de Banach réflexif, $V_0, V_{11}, \dots, V_{1m}$ de sous-espaces fermés de V et K un sous-ensemble convexe fermé non vide de V qui satisfont les hypothèses précédentes. Aussi, nous supposons que F est Gâteaux différentiable, φ est convexe et semi-continue inférieurement dans la deuxième variable et elles satisfont les conditions de cette section. Soit $M = \sup\{||v|| : F(v) + \varphi(u,v) \le F(u^0) + \varphi(u,u^0)\}$ où u est la solution du problème (2) et u^0 est son approximation initiale dans l'Algorithmes 3 ou 4. Dans ces conditions, si

$$\frac{c_M}{\alpha_M} < \frac{1}{2} \text{ pou tout } M > 0 \tag{4}$$

et κ satisfait $(\frac{C_1}{C_1+1})^\kappa < \frac{1-2\frac{c_M}{\alpha_M}}{1+3\frac{c_M}{\alpha_M}+4\frac{c_M^2}{\alpha_M^2}+\frac{c_M^3}{\alpha_M^3}}$ alors, les normes des approximations de la solution u du problème (2) obtenues à partir de ces algorithmes sont bornées par M, les deux algorithmes sont convergents et nous avons les estimations d'erreur suivantes:

$$F(u^{n+1}) + \varphi(u,u^{n+1}) - F(u) - \varphi(u,u) \le [2\frac{c_M}{\alpha_M} + (\frac{C_1}{C_1+1})^\kappa(1 + 3\frac{c_M}{\alpha_M} + 4\frac{c_M^2}{\alpha_M^2} + \frac{c_M^3}{\alpha_M^3})]^n \cdot [F(u^0) + \varphi(u,u^0) - F(u) - \varphi(u,u)]$$

et

$$\|u^n - u\|^2 \le \frac{2}{\alpha_M}[2\frac{c_M}{\alpha_M} + (\frac{C_1}{C_1+1})^\kappa(1 + 3\frac{c_M}{\alpha_M} + 4\frac{c_M^2}{\alpha_M^2} + \frac{c_M^3}{\alpha_M^3})]^n \cdot [F(u^0) + \varphi(u,u^0) - F(u) - \varphi(u,u)].$$

La constante $C_1 > 0$ dépend des fonctions F et φ, la solution u, l'approximation initiale u^0, m et le constante C_0.

Remarque (2)

– *constante C_1 peut être écrit comme*

$$C_1 = (m+1)[(1+2C_0)\frac{\beta_M}{\frac{\alpha_M}{2}} + C_0^2(\frac{\beta_M}{\frac{\alpha_M}{2}})^2]$$

pour l'Algorithme 3 et

$$C_1 = \frac{m+1}{r}[1 - \frac{r}{m+1} + (1+C_0)(m+1)\frac{\beta_M}{\frac{\alpha_M}{2}} + C_0^2(m+1)(\frac{\beta_M}{\frac{\alpha_M}{2}})^2]$$

pour l'Algorithme 4

Remarque (3)

Théoréme 2 montre que:

1. *si la condition de convergence (4) est satisfaite et le nombre κ des itérations internes est suffisamment grand, alors les Algorithmes 3 et 4 sont globalement convergent et nous avons estimé les erreurs*
2. *condition de convergence (4) est un peu plus restrictive que la condition d'existence et d'unicité de la solution (3) mais elles sont du même type*
3. *condition de convergence (4) ne dépend pas du nombre m de sous-domaines*

Méthodes à deux niveaux

- deux maillages $\mathcal{T}_h$ et $\mathcal{T}_H$ du domaine $\Omega \subset \mathbf{R}^d$ avec les tailles des mailles de h et H

- les deux familles, des maillages fins et grossiers, sont rǵulieres et le maillage $\mathcal{T}_h$ est un raffinement de $\mathcal{T}_H$

- le domaine Ω est décomposé $\Omega = \bigcup_{i=1}^{m} \Omega_i$, le paramètre de chevauchement est désigné par δ

- $\mathcal{T}_h$ fournit un maillage pour chaque sous-domaine Ω_i, $i = 1, \ldots, m$

- $\text{diam}(\Omega_i) \leq CH$, la constante C est une constante générique, indépendante des deux maillages et du paramètre de chevauchement

- domaine Ω peut être différent de $\Omega_0 = \cup_{\tau \in \mathcal{T}_H} \tau$, mais on suppose
  - si un noeud de $\mathcal{T}_H$ se trouve sur $\partial\Omega_0$ alors il se trouve aussi sur $\partial\Omega$
  - $\text{dist}(x, \Omega_0) \leq CH$ pour tout noeud x de $\mathcal{T}_h$

- éléments finis linéaires par morceaux
  - $V_h = \{v \in C^0(\bar{\Omega}) : v|_\tau \in P_1(\tau),\ \tau \in \mathcal{T}_h,\ v = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$ correspondant au domaine Ω
  - $V_h^i = \{v \in V_h : v = 0 \text{ dans } \Omega\backslash\Omega_i\}$, for $i = 1, \dots, m$, correspondant à la décomposition du domaine
  - $V_H^0 = \{v \in C^0(\bar{\Omega}_0) : v|_\tau \in P_1(\tau),\ \tau \in \mathcal{T}_H,\ v = 0 \text{ sur } \partial\Omega_0\}$ correspondant à la décomposition grossière, du niveau H, où les fonctions v sont étendues avec zéro dans $\Omega\backslash\Omega_0$

- espaces V_h et V_h^i, $i = 1, \dots, m$, et V_H^0 sont considérés comme sous-espaces de $W^{1,s}$, pour un $1 < s < \infty$ fixé (on note $\|\cdot\|_{0,s}$ la norme dans L^s, et par $\|\cdot\|_{1,s}$ et $|\cdot|_{1,s}$ la norme et la seminorme de $W^{1,s}$)

- problèmes (1) et (2) sont considérés dans l'espace $V = V_h$ avec l'ensamble convexe de la forme $K = \{v \in V_h : a \le v \le b\}$, où $a,\ b \in V_h$, $a \le b$

- les méthodes à deux niveaux sont obtenus à partir des algorithmes des sections précédentes avec $V_0 = V_H^0, V_{11} = V_h^1, \dots, V_{1m} = V_h^m$

• conditions techniques sont satisfaites par des approximations des fonctions φ, obtenues par de formules de quadrature numérique dans V_h, de la forme

– pour les inégalités variationnelles de la deuxième espèce

$$\varphi(v) = \sum_{k \in \mathcal{N}_h} s_k(h)\phi(v(x_k))$$

où $\phi : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est une fonction continue et convexe, $\mathcal{N}_h$ est l'ensemble des noeuds du maillage $\mathcal{T}_h$, et $s_k(h) \geq 0$, $k \in \mathcal{N}_h$, sont des nombres réels non négatifs qui peuvent dépendre de la taille h du maillage

– pour les inégalités quasi-variationnelles

$$\varphi(u, v) = \sum_{k \in \mathcal{N}_h} s_k(h)\phi(u, v(x_k))$$

où $\phi : V_h \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est continue, et, comme ci-dessus, $s_k(h) \geq 0$, $k \in \mathcal{N}_h$, sont des nombres réels non négatifs qui peuvent dépendre de la taille h du maillage. En outre, on suppose que $\phi(u, \cdot)$:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ est convexe pour tout $u \in V_h$

• les ensembles convexes de niveau K_1 et K_0 peuvent être construits comme dans la proposition suivante

Proposition (1)

L'hypothèse 1 est valable pour les ensembles convexes K_1 et K_0 définis par

$$\begin{aligned} K_1 &= [a_1, b_1],\ a_1 = a - w,\ b_1 = b - w, \\ K_0 &= [a_0, b_0],\ a_0 = I_H(a_1 - w_1),\ b_0 = I_H(b_1 - w_1) \end{aligned}$$

pour tout $w \in K$ et $w_1 \in K_1$, $I_H : V_h \to V_H^0$ étant un opérateur d'interpolation non linéaire.

• la proposition suivante montre que le taux de convergence des algorithmes dépend très faiblement (par la constante C_0 des Hypothèses 2 et 3) sur les paramètres de la décomposition domaine et du maillage et il est indépendant d'eux si H/δ et H/h sont constants quand $h \to 0$

Proposition (2)

Les Hypothèses 2 et 3 sur les ensembles convexes K_1 et K_0 définis dans la Proposition 1 sont satisfaites avec la constante C_0 de la forme

$$C_0 = C(m+1)C_{d,s}(H,h)[1+(m-1)\frac{H}{\delta}]$$

où C est indépendante des paramètres du maillage et de la décomposition du domaine, m est le nombre de sous-domaines et

$$C_{d,s}(H,h) = \begin{cases} 1 & \text{if } d = s = 1 \text{ or} \\ & 1 \le d < s \le \infty \\ (\ln \frac{H}{h} + 1)^{\frac{d-1}{d}} & \text{if } 1 < d = s < \infty \\ (\frac{H}{h})^{\frac{d-s}{s}} & \text{if } 1 \le s < d < \infty, \end{cases}$$

Remarque (4)

Les résultat précédents ont fait référence à des problèmes dans $W^{1,s}$ avec conditions aux limites de Dirichlet. De résultats similaires peuvent être obtenus pour les problèmes de $(W^{1,s})^d$ ou les problèmes avec de conditions mixtes aux limites.

Conclusions

• les algorithmes ont été introduits sous la forme de méthodes de correction sur les sous-espaces dans un espace de Banach reflexif pour les inégalités varaitionnelles de la deuxième espèce et les inégalités quasi-variationnelles
• nous avons prouvé leur convergence globale et estimé les erreurs en faisant

- une hypothèse sur la construction des ensembles convexes de niveau
- des hypothèses sur la décomposition des éléments de l'ensemble convexe selon la décomposition de l'espace en sous-espaces
- des hypothèses techniques

- les méthodes additives et multiplicatives de Schwarz à deux niveaux sont obtenues en utilisant les espaces d'éléments finis
  - nous avons prouvé que les hypothèses faites dans le cadre général ainsi que les hypothèses techniques sont satisfaites pour les ensembles convexes fermés K du type à deux obstacles
  - on a écrit explicitement la dépendance de la constante C_0 (introduite dans la condition de stabilité de la décomposition des hypothèses) des paramètres de la décomposition du domaine et du maillage
  - des Théorèmes 1 et 2, on peut conclure
    - les méthodes à deux niveaux convergent globalement pour les inégalités variationnelles de la deuxième espèce et les inégalités quasi-variationnelles
    - les taux de convergence dépendent essentiellement de la constante C_0
    - compte tenu de la dépendance de C_0 des paramètres du maillage et de la décomposition du domaine, le taux de convergence dépend très faiblement de ces paramètres et il est même indépendant d'eux pour certains choix particuliers
    - les méthodes introduites ont une complexité de calcul optimale par itération