

# Structures localement conformément kähleriennes invariantes sur les groupes de Lie

Andrei Moroianu (CNRS, Univ. Paris-Sud), Sergiu Moroianu (IMAR) et Liviu Ornea (IMAR et Univ. de Bucarest)

Les variétés localement conformément kähleriennes (LCK) sont des variétés hermitiennes  $(M, g, J)$  dont la 2-forme fondamentale  $\omega(\cdot, \cdot) = g(J\cdot, \cdot)$  vérifie

$$d\omega = \theta \wedge \omega$$

pour une 1-forme fermée  $\theta$  appelée forme de Lee. Une variété LCK dont la forme de Lee est parallèle par rapport à la connexion de Levi-Civita de  $g$  s'appelle Vaisman (V).

Le revêtement fondamental d'une variété LCK admet toujours une métrique kählerienne dans la classe conforme de la métrique LCK, et le groupe fondamental agit par homothéties par rapport à cette métrique.

Les exemples connus dans le cas compact sont les surfaces complexes à premier nombre de Betti impair (à l'exception de certaines surfaces d'Inoue, cf. [1]), les fibrations en courbes elliptiques au-dessus de variétés de Hodge (qui admettent des métriques de Vaisman) où les variétés d'Oeljeklaus-Toma (OT) qui sont des quotients de groupes de Lie résolubles par des lattices, définies à l'aide de corps de nombres.

On peut distinguer plusieurs classes de variétés LCK entre les cas générique et le cas Vaisman :

- (1) la classe E des variétés LCK *exactes*, dont la forme  $\omega$  s'écrit sous la forme  $\omega = d\eta - \theta \wedge \eta$  pour une certaine 1-forme  $\eta$  ;
- (2) la classe P des variétés LCK à *potentiel*, dont la métrique kählerienne sur le revêtement universel admet un potentiel équivariant, ou, de manière équivalente, satisfaisant  $d\omega = \theta \wedge J\theta - dJ\theta$  ;
- (3) la classe PC des variétés LCK pluricanoniques [2], dont la dérivée covariante de la forme de Lie anti-commute avec  $J$ .

Il est facile de voir qu'on a les inclusions  $LCK \supset E \supset P \supset PC \supset V$ . Dans [3] nous avons montré que dans le cas compact  $PC = V$ . Par ailleurs, H. Sawai a montré dans [5] le résultat suivant :

**Théorème.** Une solvariété LCK compacte  $M := \Gamma \backslash G$  de la classe  $P$  dont la forme de Lee  $\theta$  est co-homologue à une forme fermée  $G$ -invariante  $\theta$ , admet une structure de Vaisman  $G$ -invariante avec forme de Lee  $\theta$ .

N.B. Un objet sur  $M$  s'appelle  $G$ -invariant si c'est la projection sur  $M$  d'un objet sur  $G$  invariant par rapport à l'action à gauche de  $G$  sur lui-même.

Autrement dit, on a  $P = V$  dans le cas des structures LCK sur les quotients compacts de groupes de Lie résolubles, à condition que la forme de Lee soit co-homologue à une 1-forme invariante.

Dans ce projet, nous nous proposons d'étendre le résultat de Sawai à des groupes de Lie généraux, sans condition de réductivité, et sans supposer la compacité, en utilisant les méthodes introduites dans [3]. Nous allons également nous intéresser aux structures de la classe  $E$  sur les groupes de Lie, et chercher notamment des exemples qui ne sont pas Vaisman. Il est à noter que les variétés OT n'admettent aucune métrique LCK dans la classe  $E$ , cf. [4].

#### RÉFÉRENCES

- [1] F. A. Belgun, *On the metric structure of non-Kähler complex surfaces*, Math. Ann. **317** (1), 1–40, (2000).
- [2] G. Kokarev, *On pseudo-harmonic maps in conformal geometry*, Proc. London Math. Soc. **99**, 168–194 (2009).
- [3] A. Moroianu, S. Moroianu, *On pluricanonical locally conformally Kähler manifolds*, Int. Math. Res. Not. **2017** (14), 4398–4405 (2017).
- [4] A. Otiman, *Morse-Novikov cohomology of locally conformally Kähler surfaces*, arXiv :1609.07675.
- [5] H. Sawai, *Locally conformal Kähler structures on compact solvmanifolds*, Osaka J. Math. **49** (4), 1087–1102 (2012).