Projet de recherche

Pour 2018, nous nous proposons de travailler sur trois problèmes.

1.1 Titre : Factorisation des polynômes

1.2 Participants :

Yann Bugeaud et Maurice Mignotte (Université de Strasbourg, Institut de Recherche Mathématique Avancée – UMR 7501),

Anca Iulia Bonciocat, Nicolae Ciprian Bonciocat et Mihai Cipu (Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Bucarest)

1.3 Description du problème :

On va obtenir des majorants du nombre total des facteurs irréductibles (comptés avec leur ordre de multiplicité) des polynômes à coefficients entiers, en combinant des informations sur la décomposition canonique des valeurs qu'ils prennent en certains entiers consécutifs, ou en certains entiers suffisamment éloignés, avec des informations sur la localisation de leurs racines. En particulier, on va obtenir des critères d'irréductibilité pour les polynômes qui ont plusieurs coefficients dominants en valeur absolue.

Une étude similaire sera effectuée pour obtenir des majorants du nombre total des facteurs irréductibles des polynômes à plusieurs variables sur un corps arbitraire, en analysant la décomposition canonique des polynômes obtenus en particularisant quelques-unes des indéterminées, ou en remplaçant quelques-unes des indéterminées par d'autre polynômes. En particulier, on va obtenir ici des critères d'irréductibilité pour des polynômes ayant quelques coefficients de degré dominant par raport à une des indéterminées. Pour obtenir des informations sur la localisation des racines dans une clôture algébrique du corps des coefficients, on va utiliser ici des valeurs absolues non-archimédiennes.

Références

[1] A.I. Bonciocat and A. Zaharescu, Irreducibility results for compositions of polynomials in several variables, *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)* **115** (2005), no. 2, 117–126.

[2] N. C. Bonciocat, Y. Bugeaud, M. Cipu and M. Mignotte, Irreducibility criteria for sums of two relatively prime polynomials, *Int. J. Number Theory* **9** (2013), 1529–1539.

[3] N. C. Bonciocat, Y. Bugeaud, M. Cipu and M. Mignotte, Irreducibility criteria for compositions of polynomials with integer coefficients, *Monath. Math.* **182** (2017), no. 3, 499–512.

2.1 Titre : La conjecture d'Abbott sur la hauteur du carré d'un polynôme à coefficients entiers

2.2 Participants :

Yann Bugeaud et Maurice Mignotte (Université de Strasbourg, Institut de Recherche Mathématique Avancée – UMR 7501),

Anca Iulia Bonciocat, Nicolae Ciprian Bonciocat et Mihai Cipu (Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Bucarest)

2.3 Description du problème :

Pour un polynôme $P = \sum_{i=0}^{d} a_i X^i$ de degré d, on pose $\mathrm{ht}(P) = \max_{0\le i\le d} |a_i|$, que l'on nomme la *hauteur* de P. La conjecture d'Abbott qui nous intéresse affirme que si P est un polynôme à coefficients entiers qui n'est pas un monôme alors $\mathrm{ht}(P^2) \ge 2\,\mathrm{ht}(P)$. Cette inégalité a des conséquences importantes dans le calcul symbolique.

En utilisant la relation de Parseval, on peut montrer que pour chaque degré d il existe au plus un nombre fini de polynômes P appartenant à $\mathbb{Z}[X]$ pour lesquels la conjecture d'Abbott est fausse. Des calculs sur ordinateur montrent que la conjecture est vraie en degré ≤ 10. Sans une nouvelle idée, les calculs deviennent trop complexes pour de plus grands degrés.

On peut envisager d'étudier la conjecture en filtrant les polynômes selon leur hauteur ou le nombre de leurs monômes. Une autre démarche est fondée sur l'idée de décomposer le polynôme en une combinaison de polynômes pour lesquels la conjecture a été déjà vérifiée. Vu l'état préliminaire des travaux, le cheminement vers une preuve de la conjecture d'Abbott n'est pas facile à anticiper.

Références

[1] J. Abbott, Bounds on factors in $\mathbb{Z}[x]$, *J. Symbolic Comput.* **50** (2013), 532–563.

3.1 Titre : Indépendance linéaire des monômes décalés

3.2 Participants :

Yann Bugeaud et Maurice Mignotte (Université de Strasbourg, Institut de Recherche Mathématique Avancée – UMR 7501),

Anca Iulia Bonciocat, Nicolae Ciprian Bonciocat et Mihai Cipu (Institut de Mathématiques Simion Stoilow de l'Académie Roumaine, Bucarest)

3.3 Description du problème :

Un monôme *décalé* est un polynôme de la forme $(x-a)^e$ avec $a \in K$, $e \in \mathbb{N}$, où K est un corps de caractéristique nulle. Dans une prépublication récente, Koiran et Pecatte avancent la conjecture suivante : on peut trouver des constantes a et b telles que, pour tout entier naturel s suffisamment grand, les éléments de n'importe quelle famille $F = \{(x - a_i)^{e_i} \,:\, 1 \leq i \leq s\}$ $(a_i \in \mathbb{C})$ sont linéairement indépendants si $e_i \geq as + b$ pour tout i.

En principe, la réponse s'obtient à l'aide du déterminant Wronskien, mais la complexité des calculs rend cette approche d'importance limitée. La vérification de cette conjecture a comme conséquence immédiate de nouvelles bornes pour la complexité algébrique.

Les auteurs ont une preuve pour l'analogue réel de l'énoncé, mais les idées utilisées ne sont plus valables pour les polynômes à coefficients complexes.

Références

[1] P. Koiran, T. Pecatte, On the linear independence of shifted powers, arXiv :1705.03842.

4. Visites envisagées :

Côté Roumanie : à Strasbourg – 1 semaine en 2018 (une visite d'une semaine)

5. Financement demandé au GDIR :

Frais d'hébergement et perdiem pour 1 semaine de séjour en France pour une personne.
Frais de voyage pour 1 voyage aller-retour Bucarest-Strasbourg.