Projet de recherche

Marian Aprodu et Daniel Naie

Dans le papier [3], Naie et Reider ont utilisé les classes de Kodaira-Spencer tordues pour essayer de borner l'irrégularité des surfaces lisses de $\mathbb{P}^4$. Sous une certaine condition technique, la borne de l'irrégularité est 3 pour les surface contenues dans une quintique de $\mathbb{P}^4$. La seule surface d'irrégularité > 1 connue est la surface abélienne construite par Horrocks et Mumford en [2] ; cette surface est de degré 10 et est contenue dans une quintique de $\mathbb{P}^4$. Comme la situation des surfaces contenues dans des quadriques ou des cubiques est bien comprise, il est naturelle de s'interroger sur l'irrégularité des surfaces contenues dans des quartiques. En essayant une étude le long de ces lignes, le second auteur réussit à résoudre le problème en imposant l'existence d'une quartique ayant seulement des nœuds comme seules singularités. Peut-on affaiblir cette condition sur les singularités ?

Dans le même cercle d'idées, en regardant les classes de Chern des surfaces de $\mathbb{P}^4$, on sait, depuis le travail [1] d'Ellingsrud et Peskine, que pour les surfaces qui satisfont $c_1^2 \leq \alpha c_2$, avec $\alpha < 1$, les composantes irréductibles du schéma de Hilbert de ces surfaces sont en nombre fini. Le point important est de borner le degré ; l'argument repose sur le fait que pour le degré ≥ 90, toute surface avec $c_1^2 \leq c_2$ est contenue dans une quintique. Deux questions naturelles apparaissent : Si $c_1^2 > c_2$, peut-on obtenir l'existence d'une quintique ou d'une hypersurface de degré fixé plus grand qui contiendrait "toutes" ces surfaces ? Sinon, en changeant le point de vue, peut-on démontrer la finitude du nombre des familles des surfaces contenues dans des volumes de degré fixé ?

References

[1] G. Ellingsrud, C. Peskine, Sur les surfaces lisses de $\mathbb{P}^4$, *Invent.math. 95* (1989), 1–11

[2] G. Horrocks, D. Mumford, A rank 2 vector bundle on $\mathbb{P}^4$ with $15,000$ symmetries. *Topology 12* (1973), 63–81

[3] D. Naie, I. Reider, Twisted Kodaira-Spencer classes and the geometry of surfaces of general type. *Journal of Algebraic Geometry* 23 (2014), 165–200