

Projets de Recherche dans le cadre du GDRI ECO-Math

1 Titre

Modèles mathématiques et méthodes numériques en mécanique des solides

2 Participants

- Lori Badea, Directeur de recherche, Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine.
- Caroline Bauzet, Maître de conférences à l'Université d'Aix-Marseille, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique.
- Cédric Bellis, Chargé de recherche CNRS, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique.
- Marius Cocou, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique.
- Frédéric Lebon, Professeur à l'Université d'Aix-Marseille, Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique.

3 Description du projet

3.1 Méthodes numériques pour les problèmes de contact et de couplage - L. Badea, M. Cocou et F. Lebon

Une première direction de recherche de ce projet a comme objectif la modélisation d'interactions surfaciques entre solides élastiques et viscoélastiques en contact quasi-statique (avec frottement local ou non local, adhésion, interface endommageable, etc.) et l'étude de méthodes de décomposition de domaine pour les problèmes d'évolution qui décrivent ces comportements complexes. Une première partie concernera l'analyse mathématique d'une inéquation d'évolution implicite ayant comme inconnues les déplacements et des multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de contact. Cette inéquation constitue une formulation unifiée pour les problèmes variationnels de contact qui généralise les formulations primales introduites dans [1] et mixtes, étudiées dans [6] et [7] pour un modèle d'interpénétrabilité limitée. En utilisant une méthode de semi-discrétisation temporelle, on s'intéressera à l'existence et à la régularité des solutions. Dans une deuxième partie, pour ces problèmes

d'évolution, des algorithmes de résolution simultanée en temps et en espaces seront introduits et analysés. Plus précisément, nous nous proposons d'introduire et d'étudier la convergence d'un algorithme "pararéel" pour nos problèmes d'évolution. Le premier algorithme pararéel a été introduit dans [8]. Dans [1], le problème totalement discrétisé (en temps et en espace) a été résolu par un algorithme additif de corrections par sous-espaces. Nous avons démontré que cet algorithme est globalement convergent et on a estimé le taux de convergence. L'algorithme pararéel que nous proposons dans ce projet utilise deux échelles de temps et est appliqué directement aux inéquations variationnelles. Les sous-problèmes obtenus sur l'échelle fine seront discrétisés en espace et résolus par une méthode connue, par exemple la méthode de [1].

Une deuxième direction est constituée par la continuation d'un travail commencé dans un projet LEA Math-Mode. Suite aux recherches effectuées dans le cadre de ce projet, nous avons publié l'article [2], dans lequel nous avons montré que la méthode de Schwarz converge pour les problèmes de contact avec frottement formulés en contraintes. Les résultats ont été obtenus pour le problème continu. Nous nous proposons dans ce projet d'aborder l'étude de la méthode pour le problème discrétisé par éléments finis.

Finalement, une troisième direction de recherche est l'étude d'un problème de couplage entre deux corps élastiques avec des conditions sur l'interface données par les sauts des déplacements et des contraintes. Pour ce problème, nous avons déjà donné une formulation variationnelle et formulé une méthode d'éléments finis pour le résoudre. Nous nous proposons d'élaborer un code de calcul et de comparer les résultats numériques avec ceux obtenus par deux autres méthodes.

3.2 Modèles stochastiques d'endommagement et de rupture - C. Bauzet et F. Lebon

Dans un travail récent [3] en collaboration avec E. Bonetti (Université de Milan), G. Bonfanti (Université de Brescia) et G. Vallet (Université de Pau) nous nous sommes intéressés à l'analyse mathématique d'une équation de type Allen-Cahn avec contrainte et forcée par une composante stochastique. Plus précisément nous nous sommes attachés à montrer l'existence et l'unicité d'une solution u pour le problème stochastique suivant:

$$(1) \quad w_s(u) + f - \partial_t \left(u - \int_0^t h(u) dW \right) + \Delta u \in \partial I_{[0,1]}(u) \text{ dans } \Omega \times D \times (0, T),$$

en considérant des conditions de Neumann homogènes sur le bord de $D \subset \mathbb{R}^d$ et une donnée initiale u_0 déterministe. La composante stochastique de cette équation est matérialisée par la présence d'une l'intégrale d'Itô " $\int_0^t h(u) dW$ " construite à partir d'un processus stochastique $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ (appelé mouvement brownien) défini sur l'espace de probabilité Ω . L'inconnue du problème u apparaissant dans ce terme stochastique, on parle alors de bruit de type multiplicatif. Dans le cas déterministe (c'est-à-dire quand $h = 0$), l'équation considérée est connue dans la littérature sous le nom d'équation d'Allen-Cahn et est utilisée pour décrire divers phénomènes physiques, en particulier ceux concernant les phénomènes de changements de phases.

Dans notre contexte, l'idée est de décrire l'évolution de l'endommagement d'un matériau au cours du temps. Plus précisément, notre solution u représente la proportion locale de

liens intacts à l'intérieur du matériau considéré: il s'agit alors d'une quantité comprise entre 0 et 1 (le cas $u = 0$ correspondant à un matériau totalement endommagé, le cas $u = 1$ à un matériau sans endommagement). La fonction w_s est reliée à la cohésion interne du matériau alors que la fonction f représente une source externe d'endommagement (d'origine mécanique ou chimique), quant au sous-différentiel $\partial I_{[0,1]}$, il permet de forcer la solution à rester comprise entre 0 et 1. L'ajout d'une perturbation stochastique à ce modèle d'Allen-Cahn est motivé par la prise en compte des changements à l'échelle microscopique de la structure du matériau comme par exemple la formation de cavités au cours de l'endommagement.

Suite à ce premier travail, plusieurs directions de recherche sont envisageables tant d'un point de vue théorique que numérique:

1. Analyse numérique: approcher par une méthode de type éléments finis ou volumes finis l'EDP stochastique (1).
2. Analyse théorique: une direction de recherche naturelle serait de compléter l'équation (1) par l'ajout d'une pénalisation sur le terme d'évolution en temps comme étudié dans le cas déterministe [5]. Ensuite, la question de l'analyse d'un problème de contact avec adhésion irréversible sera envisagée. L'idée serait d'étudier un système couplant (1) avec d'autres équations, en suivant le travail [4] dans le cas déterministe.

3.3 Méthodes d'homogénéisation avec applications et problèmes inverses - C. Bellis

Dans ce projet, nous nous proposons pour les méthodes d'homogénéisation les directions suivantes:

- 1) Développer des approches numériques efficaces pour l'homogénéisation d'ordres élevés.
- 2) Étudier les méthodes d'homogénéisation numérique dans un cadre variationnel adapté.
- 3) Mettre en oeuvre ces approches pour des problèmes transitoires (homogénéisation en élastodynamique).
- 4) Faire le lien entre les méthodes directes pour l'homogénéisation et une approche multi-échelle pour l'inversion.

4 Visites envisagées et autres missions

- Lori Badea - à Marseille - 2 semaines en 2018.
- Caroline Bauzet - à Bucarest - 1 semaine en 2018.
+Participation au Colloque Franco-Roumain 2018.
- Cédric Bellis - à Bucarest - 1 semaine en 2018.
+Participation au Colloque Franco-Roumain 2018.
- Marius Cocou - à Bucarest - 2 semaines en 2018.
+Participation au Colloque Franco-Roumain 2018.
- Frédéric Lebon - à Bucarest - 1 semaine en 2018.
+Participation au Colloque Franco-Roumain 2018.

References

- [1] L. Badea and M. Cocou, Internal and subspace correction approximations of implicit variational inequalities, *Mathematics and Mechanics of Solids*, 20, pp. 1026-1048, 2015.
- [2] L. Badea and F. Lebon, Schwarz method for dual contact problems, *Computational and Applied Mathematics*, 36, pp. 719-731, 2017.
- [3] C. Bauzet, E. Bonetti, G. Bonfanti, F. Lebon and G. Vallet, A global existence and uniqueness result for a stochastic Allen-Cahn equation with constraint, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 40, pp. 5241-5261, 2017.
- [4] E. Bonetti, G. Bonfanti and R. Rossi, Global existence for a contact problem with adhesion, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 31, pp. 1029-1064, 2008.
- [5] G. Bonfanti, M. Frémond and F. Luterotti, Global solution to a nonlinear system for irreversible phase changes, *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 10, pp. 1-24, 2000.
- [6] M. Cocou, A class of dynamic contact problems with Coulomb friction in viscoelasticity, *Nonlinear Analysis-Real World Applications*, 22, pp. 508-519, 2015.
- [7] M. Cocou, A variational inequality and applications to quasistatic problems with Coulomb friction, *Applicable Analysis*, DOI: 10.1080/00036811.2017.1376249, 2017.
- [8] J.-L. Lions, Y. Maday and G. Turinici, A "parareal" in time discretization of PDE's, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332, pp. 661-668, 2001.