

# Projet de Recherche

**1. Titre:** Méthodes de Décomposition du Domaine pour les Problèmes de Stokes et de Navier-Stokes

**2. Participants:** Frédéric Nataf (Laboratoire Jacques Louis Lions, CNRS UMR 7598 Université Pierre et Marie Curie) et Lori Badea (Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine).

**3. Description du projet:**

Ce projet a comme but principal l'étude de la convergence des méthodes de Schwarz (y compris des méthodes multiniveaux) pour le problème de Stokes et, si possible, en général pour les problèmes de point selle. Aussi, nous avons en vue l'étude de la convergence de ces méthodes pour le cas nonlinéaire du problème de Navier-Stokes. Evidemment, les problèmes de point selle sont plus compliqués que les problèmes de minimisation et l'approche des méthodes pour la résolution de ces dernières n'est pas le même et à notre avis, il y a encore beaucoup de choses à étudier et à comprendre. Dans ce projet, nous avons en vue d'abord pour le début les sujets suivants concernant la convergence et l'estimation de l'erreur des méthodes de Schwarz pour les problèmes de Stokes et de Navier-Stokes avec aussi en vue l'extension aux problèmes de point selle.

Le problème de Stokes peut être réduit à un problème seulement en vitesses sur le sous-espace donné par les fonctions à divergence nulle de  $H_0^1$ . Ce problème peut être résolu par une méthode de Schwarz donnée pour les inégalités variationnelle de la première espèce. Par exemple, la convergence et le taux de convergence d'une méthode additive de Schwarz dans un espace général de Banach réflexif et donné dans

[1] L. Badea, Additive Schwarz method for the constrained minimization of functionals in reflexive Banach spaces, in U. Langer et al. (eds.), Domain decomposition methods in science and engineering XVII, LNCSE 60, Springer, 2008, pp. 427-434.

Aussi, la convergence de la méthode multiplicative de Schwarz dans le même cadre général

[2] L. Badea, Convergence rate of a multiplicative Schwarz method for strongly nonlinear variational inequalities, in Analysis and Optimization of Differential Systems, V.Barbu et al. (eds), Kluwer Academic Publishers, 2003, pp. 31-42.

De plus, dans l'article

[3] L. Badea, Schwarz methods for inequalities with contraction operators, Journal of Computational and Applied Mathematics, 215, 1, 2008, pp. 196-219

la convergence de plusieurs méthodes de Schwarz pour les inégalités perturbées par un opérateur de Lipschitz est approchée et l'une des applications est donnée pour le problème de Navier-Stokes.

Cependant, dans les papiers cités plus haut, comme on l'a déjà dit, les thèromes sont donnés pour un espace de Banach réflexif et la convergence est établie sous certaines hypothèses. Ces hypothèses sont facilement vérifiables dans le cas des équations ou des inégalités dans  $H_0^1$ , aussi dans le cas continu comme dans le cas des éléments finis, mais, en principe, ils restent à montrer qu'elles sont vraies pour le cas spécifique des problèmes de Stokes et Navier-Stokes, surtout dans le cas des éléments finis. Ce sera l'une des tâches de ce projet.

Dans un deuxième temps, on s'intéressera plus généralement aux problèmes point-selle. En effet, pour des problèmes où le milieu est presque incompressible (problème d'élasticité avec des matériaux de type caoutchouc et d'écoulements dont on veut modéliser aussi la propagation du son), l'écoulement n'est pas à divergence nulle. Ces problèmes sont aussi raides que ceux à divergence nulle mais sans la possibilité de les formuler comme un problème de minimisation. En effet, les formulations en vitesse seulement ne sont pas stables numériquement et il est nécessaire d'introduire la pression comme inconnue supplémentaire pour avoir une formulation stable. On aboutit alors à des problèmes de point selle. Dans l'article,

[4] R. Haferssas, P. Jolivet and F. Nataf, An additive Schwarz method type theory for Lions algorithm and Optimized Schwarz Methods , SIAM Journal on Scientific Computing 39 (4), 2017.

une méthode de décomposition de domaine efficace est proposée. Il serait intéressant d'en proposer une analyse complète.

#### **4. Visites et d'autres activités envisagées pour l'année 2018:**

Frédéric Nataf:

- une visite d'une semaine à l'Institut de Mathématiques "Simion Stoilow" de l'Académie Roumaine, Bucarest.

Lori Badea:

- une visite de 2 semaines au Laboratoire Jacques Louis Lions
- participation au IX-ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliqués, Université de Bordeaux