Projet de recherche

Courbes singulières planes et fibrés vectoriels

Marian Aprodu et Alexandru Dimca

Le but de ce projet de recherche est de réaliser des progrès sur une conjecture sur les courbes singulières planes en utilisant la géométrie des fibrés vectoriels sur le plan projectif.

Soient $S = \mathbb{C}[x, y, z]$ et $f \in S$ un polynôme homogène de fegré d. Supposons que la courbe plane C définie par l'annulation de f est réduite. Nous considérons $J_f \subset S$ l'idéal Jacobien de C, $I_f := \mathrm{Sat}(J_f)$ le saturé de J_f, $M(f) := S/J_f$ l'algèbre de Milnor de C et $N(f) := I_f/J_f$ le module Jacobien, voir [4]. Considérons aussi le S-module gradué

$$AR(f) := \{(a, b, c) \in S^3 |\ af_x + bf_y + cf_z = 0\}$$

Si $AR(f)$ est libre, la courbe C s'appelle *libre*. Il existent des courbes planes, même rationnelles, qui ne sont pas libres ; en général, la liberté d'une courbe plane est controlée par un invariant numérique $\nu(C)$, nommé *le defaut de liberté*, défini comme suit :

$$\nu(C) := \max\{\dim(N(f)_j\};$$

d'aprés un résultat de [3], il s'ensuit que $\nu(C)$ est fini. La terminologie est justifiée par le fait suivant :

Théorème. (Saito, 1990) *C est libre si et seulement si $\nu(C) = 0$.*

En suivant [5], nous appellons la courbe C *presque libre* si $\nu(C) = 1$. Alors, la conjecture qui nous concerne est la suivante :

Conjecture. (voir [2, 5]) *Toute courbe rationnelle cuspidale plane est libre ou presque libre. Toute courbe irréductible libre ou presque libre est rationnelle.*

Cette conjecture a été déjà démontrée dans le cas ou d est paire, voir [5, 6], ou bien si d est impair et petit. Dans le cas impair assez grand, une approche possible de cette conjecture en utilisant les fibrés vectoriels sur $\mathbb{P}^2$ a été sugérée dans les articles récents [1], [7].

Le faisceau $\widetilde{AR(f)}$ est en fait un fibré de rang 2, puisqu'il est reflexif sur le plan projectif, donc localement libre. Ce fibré E_C est isomorphe au fibré $T\langle C\rangle(-1)$, oú $T\langle C\rangle$ est le fibré des champs vectoriels logarithmiques lelong C. Si L est une droite générique, nous avons le scindage de $E_C|_L \cong \mathcal{O}_L(-d_1)\oplus\mathcal{O}_L(-d_2)$ avec $0 \le d_1 \le d_2$ et $d_1+d_2 = d-1$. Comme démontré dans [1], nous avons le lien suivant entre ces entiérs et le défaut de liberté :

$$(d-1)^2 - d_1 d_2 = \tau(C) + \nu(C),$$

oú $\tau(C)$ est le nombre de Tjurina de C. Par conséquent, nous ésperons qu'un effort commun sur une analyse plus fine des fibrés associés aux courbes cuspidales rationnelles, en particuliér, un calcul explicit de nombres de saut génériques d_1, d_2 nous permettrait obtenir des progrès sur la conjecture formulée ci-dessus.

Dans le même cercle d'idées, Dimca a conjecturé que, dans le cas des arrangements de droites, $\nu(C)$ est un invariant de nature combinatoire. Il est possible aussi qu'une analyse des fibrés associés dans ce cas pourrait mener à une solution de cette conjecture.

Pour conclure, notre projet de recherche concerne l'étude des certains fibrés vectoriels de rang deux sur le plan projectif qui proviennent des courbes singulières. Cet étude est motivé par des problémes ouverts dans la théorie des courbes singulières planes.

Visites prevues :

1. Marian Aprodu - une semaine à Nice.
2. Alexandru Dimca – une semaine à Bucarest.

Estimation des frais : 1540 euros, dont :

1. Marian Aprodu : billet d'avion Bucarest - Nice (200 euros), hotel à Nice (650 euros), per-diem (245 euros).
2. Alexandru Dimca : billet d'avion Nice–Bucarest (200 euros), per-diem (245 euros).

References

[1] T. Abe, A. Dimca, On the splitting types of bundles of logarithmic vector fields along plane curves, International J. Math., 29 (2018) 1850055 (20 pages), DOI: 10.1142/S0129167X18500556.

[2] A. Dimca, On rational cuspidal plane curves and the local cohomology of Jacobian rings. Comment. Math. Helv. 94 (2019), 689–700.

[3] A. Dimca, D. Popescu, Hilbert series and Lefschetz properties of dimension one almost complete intersections, Comm. Algebra 44 (2016), 4467–4482.

[4] A. Dimca, E. Sernesi, Syzygies and logarithmic vector fields along plane curves, Journal de l'École polytechnique-Mathématiques 1 (2014), 247–267.

[5] A. Dimca, G. Sticlaru, Free and nearly free curves vs. rational cuspidal plane curves, Publ. RIMS Kyoto Univ. 54 (2018), 163–179.

[6] A. Dimca, G. Sticlaru, On the freeness of rational cuspidal plane curves, Moscow Math. J. 18(2018) 659–666.

[7] A. Dimca, G. Sticlaru, On the jumping lines of bundles of logarithmic vector fields along plane curves, arXiv: 1804.06349.to appear in Publicacions Matemàtiques.

[8] K. Saito, Theory of logarithmic differential forms and logarithmic vector fields, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo Sect. IA Math. 27 (1980), no. 2, 265–291