

Projet de Recherche

1. Titre: Optimisation topologique pour des équations nonlinéaires

2. Participants

- Cornel Marius Murea, Université Haute Alsace, IRIMAS, Dépt. Mathématiques.
- Dan Tiba, Institut de Mathématiques “Simion Stoilow” de l’Académie Roumaine.

3. Description du projet

3.1 Paramétrisation et régularisation/pénalisation des domaines

La paramétrisation implicite d’une variété, introduite par [7], a été employée avec succès pour des problèmes d’optimisation topologique gouvernées par des équations elliptiques linéaires, par exemple [1] (conditions aux limites Dirichlet), [3] (conditions aux limites Neumann) et des problèmes d’observation frontière. Les intégrales sur la frontière, à l’aide de la paramétrisation (globale) obtenu avec des systèmes Hamilton, on peut les écrire comme intégrales sur un intervalle réel, et ça va faciliter le calcul du gradient de la fonction coût.

Une autre approche, [4], [8], [2] traite l’équation d’état (linéaire) par pénalisation et discute des problèmes avec observation distribuée. Les deux approches utilisent des variations fonctionnelles pour la géométrie et ont des bonnes propriétés de différentiabilité qui permettent l’application des méthodes classiques de gradient pour l’optimisation du coût. C’est différent par rapport aux méthodes basées sur l’étude asymptotique des petites perturbations topologiques dans les systèmes elliptiques, [5], [6] et on obtient des avantages au niveau théorique et dans les applications numériques. On va étendre ces deux méthodologies à des équations non linéaires, dans deux situations importantes.

3.2 Équations de Navier-Stokes

On veut utiliser la technique de pénalisation pour les équations de Navier-Stokes stationnaires. Pour des géométries complexes, on peut faire les calculs dans un domaine fixe assez large, à l’aide d’une régularisation de la fonction caractéristique. Il faut prouver l’unicité de la solution des équations perturbées de Navier-Stokes, indépendamment du paramètre de pénalisation. Dans le cas du problème pénalisé, la viscosité dépend du paramètre de pénalisation. Classiquement, l’unicité est obtenu sous l’hypothèse que la viscosité est “grande”, mais ici elle peut devenir arbitrairement petite.

On va aussi étudier des problèmes d’optimisation topologique. Des tests numériques vont être réalisés pour étudier l’efficacité de la méthode.

3.3 Inéquations variationnelles

On considère des problèmes avec des conditions unilatéraux dans le domaine ou sur la frontière. Leur extension a un domaine donné, borné, peut être réalisé, en principe, comme dans le cas linéaire. On va étudier des observations distribués et frontière, en utilisant des systèmes Hamilton pour la paramétrisation globale des variétés. La méthode de pénalisation fonctionne aussi dans ce cas. On veut obtenir de résultats d’approximation et même d’équivalence avec de problèmes de contrôle optimale avec contraintes mixtes.

La technique de régularisation de la fonction caractéristique peut donner des propriétés de différentiabilité pour appliquer les méthodes de gradient dans les problèmes d’optimisation de forme, associés a des inéquations variationnelles. Des tests numériques vont aussi être réalisés pour confirmer les résultats théoriques.

References

- [1] C.M. Murea, D. Tiba, Topological optimization via cost penalization, *Topological Methods in Nonlinear Analysis*, 54 (2019), No. 2B, 1023–1050.
- [2] D.Tiba, C.M. Murea, Optimization of a plate with holes, *Computers and Mathematics with Applications* 77 (2019) 3010-3020.
- [3] C.M. Murea, D. Tiba, Periodic Hamiltonian systems in shape optimization problems with Neumann boundary conditions, *Journal of Differential Equations*, 321 (2022) 1-39.
- [4] P. Neittaanmäki, D. Tiba, Fixed domain approaches in shape optimization problems, *Inverse Problems*, 28 (2012) 1-35.
- [5] A. Novotny, J. Sokolowski, *Topological derivatives in shape optimization*, Springer, Berlin, 2013.
- [6] A. Novotny, J. Sokolowski, A. Zochowski, *Applications of the Topological Derivative Method*, Springer Studies in Systems, Decision and Control 188, 2019.
- [7] D. Tiba, Iterated Hamiltonian type systems and applications. *J. Differential Equations* 264 (2018), no. 8, 5465-5479.
- [8] G. Zhou, The fictitious domain method for the Stokes problem with Neumann/fretraction boundary condition, *Jpn. J. Ind. Appl. Math.* 34 (2017), no. 2, 585-610.

4. Visites envisagées et autres missions

- C.M. Murea, Participation au Colloque Franco-Roumain 2022, Toulouse et visite d'une semaine à l'Institut de Mathématiques "Simion Stoilow", Bucarest en 2023
- D. Tiba, Participation au Colloque Franco-Roumain 2022, Toulouse et visite d'une semaine à l'Université Haute Alsace, Mulhouse