# SOLUTION STATIONNAIRE DE L'ÉQUATION DE DEPLACEMENT ET DE COAGULATION DES GOUTTELETTES DANS UN VENT VERTICAL

# (STATIONARY SOLUTION TO THE EQUATION OF DISPLACEMENT AND COAGULATION OF DROPLETS IN A VERTICAL WIND)

MERAD MERIEM, MOHAMED ZINE AISSAOUI and HISAO FUJITA YASHIMA

*Communicated by Marius Tucsnak*

On considère une équation intégro-différentielle qui modélise le déplacement et la variation de la masse des gouttelettes se trouvant dans un vent vertical ascendant. Pour cette équation on démontre l'existence d'une solution stationnaire, en utilisant le théorème de point fixe de Schauder.

We consider an integro-differential equation which models the displacement and the variation of mass of droplets in a vertical ascending wind. For this equation we prove the existence of a stationary solution by using the fixed point theorem of Schauder.

*AMS 2010 Subject Classification:* 45K05, 45G10, 86A10.

*Key words:* ascending wind, growth of droplets by condensation, coagulation of droplets, method of characteristics.

## 1. INTRODUCTION

Dans le présent travail on considère le problème des gouttelettes qui se déplacent par la force gravitationnelle et le vent vertical ascendant pendant qu'elles accroissent leur poids par la condensation de la vapeur sur elles et se coagulent. Dans sa formulation mathématique, il s'agit d'une équation de transport avec des termes donnés par des opérateurs intégraux représentant le processus de coagulation.

Dans une série de travaux, Galkin [10–12] et Dubovskii [4–7] ont démontré l'existence et l'unicité de la solution d'une équation analogue, éventuellement avec le processus de fragmentation, sous de différentes conditions, toutefois sans l'effet spécifique du vent sur le déplacement des gouttelettes ; ils ont construit la solution suivant l'ordre naturel du temps de l'équation d'évolution. D'autre part, dans [15] et [2] la construction de la solution suivant les trajectoires des gouttelettes dans les positions verticales (ou spatiales) a été utlisée pour résoudre l'équation stationnaire et pour démontrer la convergence de la solution d'évolution vers la solution stationnaire.

Dans le présent travail, nous allons démontrer l'existence d'une solution stationnaire de l'équation décrivant le déplacement des gouttelettes dans l'intervalle $0 \leq z \leq 1$ avec les processus de coagulation et d'accroissement de poids dû à la condensation, équation dans laquelle la vitesse de déplacement est donnée comme fonction $u(m, z)$ de la masse d'une gouttelette $m$ et de la position $z$ avec les propriétés $u(m, z) > 0$ pour $m$ petits, $u(m, z) < 0$ pour $m$ grands et $\partial_m u(m, z) < 0$ pour tout $(m, z)$. C'est-à-dire, les conditions sur $u(m, z)$ sont telles que les petites gouttelettes montent, tandis que les grandes tombent.

L'étude de l'équation avec ces conditions particulières est motivée par l'intérêt pour les phénomènes de l'écoulement vertical de l'air, qui engendre la condensation de la vapeur dans l'air et cause des précipitations souvent intenses. En effet, les phénomènes de l'écoulement vertical de l'air accompagné par la formation des gouttelettes, où la chaleur latente de la condensation qui accélèrent l'écoulement ascendant de l'air, sont considérés comme moteur principal des pluies intense comme orage (voir par exemple [3]).

Du point de vue technique, pour montrer l'existence d'une solution stationnaire, nous construisons d'abord la solution $\sigma(m, z)$ dans la partie où la vitesse des gouttelettes $u(m, z)$ est positive, en supposant que la densité $\sigma(m, z)$ est donnée dans la partie où $u(m, z) < 0$, et puis la solution dans la partie où $u(m, z) < 0$, en supposant que la densité est donnée dans la partie où $u(m, z) > 0$. Ensuite nous allons appliquer le théorème de point fixe de Schauder pour trouver une solution dans le domaine entier. Pour élaborer ces raisonnements, comme il est naturel, nous avons besoin d'estimations adéquates. Or, ces estimations ne s'obtiennent pas facilement, en particulier, dans le voisinage des points $(m, z)$ où la vitesse $u(m, z)$ des gouttelettes de masse $m$ s'annule, et, pour les obtenir, nous avons besoin d'une élaboration considérable des estimations, ce qui constitue le point technique principal de notre travail.

## 2. POSITION DU PROBLEME

Nous allons considérer la densité $\sigma = \sigma(m, z)$ de l'eau liquide contenue dans les gouttelettes de masse $m$ à la hauteur $z \in [0, 1]$. En désignant par $u = u(m, z)$ la vitesse (verticale) des gouttelettes de masse $m$ à la position $z$, par $h_{gl} = h_{gl}(m, z)$ la quantité de condensation sur les gouttelettes de masse $m$ par unité de temps et par unité de masse de gouttelettes et par $\beta = \beta(m_1, m_2)$ le taut de coagulation entre les gouttelettes de masse $m_1$ et celles de masse $m_2$, nous considérons l'équation

$$\partial_z\big(\sigma(m,z)u(m,z)\big) + \partial_m\big(mh_{gl}(m,z)\sigma(m,z)\big) = h_{gl}\big(m,z\big)\sigma(m,z) + \tag{1}$$
$$+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)\mathrm{d}m' +$$
$$-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)\mathrm{d}m'$$

dans le domaine

$$\Omega = \{\,(m,z)\in\mathbb{R}^2 \,|\, m>\overline{m}_a,\ 0<z<1\,\}, \qquad \overline{m}_a>0; \tag{2}$$

dans le présent travail nous supposons que les fonctions $u(m,z)$ et $h_{gl}(m,z)$ sont données. L'équation (1) va être envisagée dans $\Omega$ avec les conditions d'entrée

$$\sigma(m,z) = \overline{\sigma}_0(m,z) \qquad \text{pour} \quad (m,z)\in S_0\cup S_1\cup S_a, \tag{3}$$

où

$$S_0 = \{\,(m,z)\in\overline{\Omega}\,|\, m\geq\overline{m}_a,\ z=0,\ u(m,0)\geq 0\,\}, \tag{4}$$

$$S_1 = \{\,(m,z)\in\overline{\Omega}\,|\, m\geq\overline{m}_a,\ z=1,\ u(m,1)< 0\,\}, \tag{5}$$

$$S_a = \{\,(m,z)\in\overline{\Omega}\,|\, m=\overline{m}_a,\ 0\leq z\leq 1\,\}. \tag{6}$$

On suppose que $\overline{\sigma}_0(m,z)$ est continue sur $S_0\cup S_a$ et uniformément continue sur $S_1$ et que

$$\overline{\sigma}_0(m,z)\geq 0 \qquad \forall (m,z)\in S_0\cup S_1\cup S_a, \tag{7}$$

$$\overline{\sigma}_0(m,z)=0 \qquad \text{si} \ \ m\geq\overline{m}_A \quad (\overline{m}_A>\overline{m}_a). \tag{8}$$

On remarque que $S_0\cup S_1\cup S_a$ est la partie de la frontière de $\Omega$ où le vecteur $(mh_{gl},u)^T$ est orienté vers l'intérieur de $\Omega$ ; on précise que, d'après la condition (16) (voir aussi (15)) formulée dans la suite, on aura $\overline{m}_a h_{gl}(\overline{m}_a,z)>0$ pour tout $z\in[0,1]$, ce qui nous garantit que le vecteur $(mh_{gl},u)^T$ est orienté vers l'intérieur de $\Omega$ même sur $S_a$. L'hypothèse de la continuité de $\overline{\sigma}_0(m,z)$ garantira que le problème ne sera pas influencé par la convention sur l'appartenance ou non à $S_0$ du point $(m,0)$ tel que $u(m,0)=0$ et sur l'appartenance du point $(\overline{m}_a,0)$ à $S_0$ ou à $S_a$. Quant au point $(m,1)$ tel que $u(m,1)=0$, nous convenons qu'il n'appartient pas à $S_1$ et nous formulerons le problème conformément à cette convention.

Il serait utile de rappeler que l'équation (1) est le cas stationnaire de l'équation décrivant de la variation de la densité de l'eau liquide $\sigma=\sigma(m,z,t)$ dans le cadre de la modélisation de l'atmosphère avec la condensation de la vapeur (voir [1] ; voir aussi [8, 9, 18]). Le choix d'une constante $\overline{m}_a$ strictement positive et convenablement petite et du domaine $\Omega$ donné dans (2) est, nous croyons, conforme à la nature physique du problème ; en effet, la courbure élevée des gouttelettes très petites ne leur permet pas de subsister dans l'atmosphère réelle et les gouttelettes se forment exclusivement sur des aérosols ayant une masse supérieure à une valeur critique (voir par exemple [13, 17]). En outre, même si la condition (8) est restrictive, nous la posons, car une généralisation envisageable dans la méthodologie du présent travail ne nous semble pas particulièrement intéressante ; la constante $\overline{m}_A$ sera choisie conformément à la condition (19) (voir le commentaire de la fin de ce paragraphe).

Il est bon de rappeler, en outre, que dans la litérature concernant l'équation de Smoluchowski on utilise souvent le nombre, au sens purement statistique, des gouttelettes de masse $m$ dans l'unité de volume

$$\tilde{n}(m,z,t) = \frac{\sigma(m,z,t)}{m}$$

au lieu de la densité $\sigma$. Mais nous préférons utiliser la densité $\sigma$ pour la commodité pour la modélisation générale des phénomènes météorologiques.

Maintenant on va préciser les hypothèses sur les fonctions $u(m,z)$, $h_{gl}(m,z)$ et $\beta(m_1,m_2)$. D'abord nous écrivons la formulation formelle des conditions et puis nous allons donner des motivations de ces conditions introduites.

On suppose que $u(m,z)$ a l'expression

$$u(m,z) = v(z) - \frac{g}{\alpha(m)} \tag{9}$$

et que $g$ est une constante strictement positive et

$$v(\cdot) \in C^1([0,1]), \qquad \inf_{z\in[0,1]} v(z) > 0, \tag{10}$$

$$\alpha(\cdot) \in C^1([\overline{m}_a,\infty[\,), \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}m}\alpha(m) < 0 \quad \forall m \geq \overline{m}_a, \tag{11}$$

$$0 < \inf_{m\geq\overline{m}_a} \alpha(m) < \sup_{m\geq\overline{m}_a} \alpha(m) < \infty, \tag{12}$$

$$\inf_{z\in[0,1]} (v(z) - \frac{g}{\alpha(\overline{m}_a)}) > 0, \tag{13}$$

$$\exists m_1 > \overline{m}_a \quad \text{tel que} \quad \sup_{z\in[0,1]} (v(z) - \frac{g}{\alpha(m_1)}) < 0. \tag{14}$$

Pour la fonction $h_{gl}(m,z)$ on suppose que

$$h_{gl}(\cdot,\cdot) \in C^1(\overline{\Omega}), \tag{15}$$

$$0 < \inf_{(m,z)\in\Omega} mh_{gl}(m,z) \leq \sup_{(m,z)\in\Omega} mh_{gl}(m,z) < \infty. \tag{16}$$

En ce qui concerne $\beta(m_1, m_2)$ nous supposons que

$$\beta(\cdot,\cdot) \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+), \qquad \beta(m_1,m_2) \geq 0 \ \ \forall (m_1,m_2) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+, \tag{17}$$

$$\beta(m_1,m_2) = \beta(m_2,m_1) \tag{18}$$

$$\beta(m_1,m_2) = 0 \qquad \text{pour} \ \ m_1 + m_2 \geq \overline{m}_A, \tag{19}$$

où $\overline{m}_A$ est une constante telle que $\overline{m}_a < \overline{m}_A < \infty$.

Pour la vitesse des gouttelettes, conformément à ce que les météorologues suggèrent (voir par exemple [17, 19]), nous adoptons l'approximation (9), dans laquelle $v(z)$, $g$ et $\alpha(m)$ représentent respectivement la vitesse de l'air (dans la direction de l'axe $z$), l'accélération gravitationnelle et le coefficient de friction entre les gouttelettes et l'air. La première inégalité de (12) et les conditions (13)–(14) pourraient être remplacées par des conditions plus générales ; mais cette généralisation ne nous semblent pas particulièrement intéressante, donc nous adoptons ces conditions qui nous permettent d'épargner des précisations ennuyeuses dans nos raisonnements.

Rappelons que l'écoulement ascendant de l'air cause généralement, par la transformation adiabatique de l'air, la diminution de la température de chaque partie de l'air qui se déplace ; la diminution de la température, à son tour, implique la diminution de la densité de la vapeur saturée, ce qui cause la condensation de la vapeur, si l'humidité de l'air est déjà au niveau de la saturation. Pour que la position de notre problème corresponde à cette situation, nous supposons que $v(z) > 0$ et $h_{gl} > 0$ (voir (10), (16)).

En ce qui concerne $\beta(m_1, m_2)$, on remarque que les conditions (17) et (18) sont des conditions naturelles de la fonction de probabilité de rencontre de gouttelettes. D'autre part, la condition (19) est une approximation motivée par le fait que dans l'atmosphère les grandes gouttelettes subissent également le processus de fragmentation, qui contrebalance la croissance de la population de gouttelettes de masse élevée due à la coagulation (cette approximation a été adoptée même dans [1, 2, 9, 15, 18]).

Le résultat principal de ce chapitre est le théorème suivant.

THÉORÈME 2.1. *Sous les hypothèses* (10)–(19), *il existe une constante* $\overline{A}_0 > 0$ *telle que, si*

$$\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0 \cup S_1 \cup S_a)} \leq \overline{A}_0, \tag{20}$$

*alors l'équation* (1) *avec les conditions* (3) *admette une solution* $\sigma$ *dans la classe* $L^\infty(\Omega)$ *; cette solution* $\sigma$ *est non-négative, bornée et continue à morceaux dans* $\Omega$.

La constante $\overline{A}_0$ mensionnée dans l'énoncé du théorème 2.1 pourra être mieux déterminée, comme on le verra dans la remarque 8.1.

## 3. DIVISION DU DOMAINE ET CARACTERISTIQUES

Nous définissons d'abord la division du domaine $\Omega$ en trois parties $\Omega_1$, $\Sigma_{int}$, $\Omega_2$ :

$$\begin{cases} \Omega_1 = \{\, (m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) > 0 \,\}, \\ \Sigma_{int} = \{\, (m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) = 0 \,\}, \\ \Omega_2 = \{\, (m,z) \in \Omega \,|\, u(m,z) < 0 \,\}. \end{cases} \tag{21}$$

Nous posons également

$$\Sigma = \{(m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, u(m,z) = 0\}.$$

En vertu des conditions (9)–(14) la relation

$$u(m_\Sigma(z), z) = 0, \quad z \in [0,1]$$

définit une fonction $m_\Sigma(z)$ de classe $C^1([0,1])$ de sorte que $\Sigma$ est représentée par

$$\Sigma = \{\, (m,z) \in \overline{\Omega} \,|\, m = m_\Sigma(z),\ z \in [0,1]\} \tag{22}$$

et on a

$$\overline{m}_a < m_\Sigma^- \leq m_\Sigma^+ < \infty,$$

où

$$m_\Sigma^- = \inf_{0 \leq z \leq 1} m_\Sigma(z), \qquad m_\Sigma^+ = \sup_{0 \leq z \leq 1} m_\Sigma(z). \tag{23}$$

La fonction $m_\Sigma(z)$ jouit de la propriété suivante.

Lemme 3.1. *On a*

$$\frac{\mathrm{d}m_\Sigma(z)}{\mathrm{d}z} = -\frac{\alpha(m)^2 \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z}}{g \frac{\mathrm{d}\alpha(m)}{\mathrm{d}m}}. \tag{24}$$

*Démonstration.* Comme $m_\Sigma(z)$ est définie par la relation

$$u(m_\Sigma(z), z) = v(z) - \frac{g}{\alpha(m)} = 0,$$

en désignant par $\vec{w}_\Sigma = (\frac{\mathrm{d}m_\Sigma(z)}{\mathrm{d}z}, 1)^T$ le vecteur tangent à la courbe $\Sigma$, de la relation

$$\nabla u \cdot \vec{w}_\Sigma = \frac{g}{\alpha(m)^2} \frac{\mathrm{d}\alpha(m)}{\mathrm{d}m} \frac{\mathrm{d}m_\Sigma(z)}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z} = 0$$

on obtient (24). □

Maintenant on va définir les caractéristiques pour l'équation (1), qui peut être écrite dans la forme

$$u(m,z)\partial_z \sigma(m,z) + m h_{gl}(m,z) \partial_m \sigma(m,z) = \tag{25}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\sigma(m,z)\big(\partial_z u(m,z) + m\partial_m h_{gl}(m,z)\big) + \\
&+\frac{m}{2}\int_0^m \beta(m-m',m')\sigma(m',z)\sigma(m-m',z)\mathrm{d}m' + \\
&-m\int_0^\infty \beta(m,m')\sigma(m,z)\sigma(m',z)\mathrm{d}m'.
\end{aligned}
$$

De l'expression de l'équation (25) il résulte que les caractéristiques sont déterminées par le système d'équations

$$
\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t} = u(m(t), z(t)), \tag{26}
$$

$$
\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = m(t)h_{gl}(m(t), z(t)) \tag{27}
$$

avec les conditions initiales pour $(m(t_0), z(t_0))$. Comme le second membre des équations (26)–(27) est de classe $C^1$ par rapport à $(m,z)$, pour tout $(m,z) \in \overline{\Omega}$ il existe une courbe et une seule qui est définie par les équations (26)–(27) et qui passe par $(m,z)$. Nous désignons ces courbes par

$$
\gamma = \{(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) \in \overline{\Omega} \mid t \in [t_0, t_1]\} \tag{28}
$$

et par $\Gamma$ l'ensemble de toutes ces caractéristiques $\gamma$; dans (28) $m_\gamma(t)$ et $z_\gamma(t)$ sont des fonctions qui satisfont au système d'équations (26)–(27), tandis que $t_0$ et $t_1$ sont tels que $z_\gamma(t_0) = 0$ ou $1$ ou $m_\gamma(t_0) = \overline{m}_a$ et $z_\gamma(t_1) = 0$ ou $1$, mais, comme on le voit aisément, $t_0$ peut être choisi arbitrairement.

LEMME 3.2. *Chaque courbe $\gamma \in \Gamma$, définie par les équations* (26)–(27) *et les conditions initiales, peut être représentée par une fonction continue $\widetilde{z}(m) = \widetilde{z}_\gamma(m)$ de $m \in [m_0, m_1]$ à valeurs dans $[0,1]$ (avec certains $m_0$, $m_1 \in [\overline{m}_a, \infty[$ ) et la fonction $\widetilde{z}_\gamma(m)$ est strictement croissante dans la partie où $(m, \widetilde{z}_\gamma(m)) \in \Omega_1$ et strictement décroissante dans la partie où $(m, \widetilde{z}_\gamma(m)) \in \Omega_2$.*

*Démonstration.* Comme $mh_{gl}(m,z) > 0$ pour tout $(m,z) \in \Omega$ (voir(16)), l'équation (27) implique que sur $\gamma$ la fonction $m_\gamma(t)$ est strictement croissante, ce qui nous permet de représenter $\gamma$ par une fonction $\widetilde{z}(m) = \widetilde{z}_\gamma(m)$ pour $m \in [m_0, m_1]$, $m_0 = m(t_0), m_1 = m(t_1)$. Des équations (26)–(27) on déduit que

$$
\frac{\mathrm{d}\widetilde{z}(m)}{\mathrm{d}m} = \frac{u(m,z)}{mh_{gl}(m,z)} \quad \text{pour } (m,z) \in \gamma. \tag{29}
$$

La définition des sous-domaine $\Omega_1$ et $\Omega_2$ et la relation (29) entraînent que $\frac{\mathrm{d}\widetilde{z}(m)}{\mathrm{d}m} > 0$ si $(m, \widetilde{z}(m)) \in \Omega_1$ et que $\frac{\mathrm{d}\widetilde{z}(m)}{\mathrm{d}m} < 0$ si $(m, \widetilde{z}(m)) \in \Omega_2$, ce qui prouve la deuxième partie de l'énoncé du lemme. □

On voit aisément que, quelque soit $\gamma \in \Gamma$, les courbes $\Sigma$ et $\gamma$ possèdent au plus un point commun, que nous notons

$$(m_\Sigma(\gamma), z_\Sigma(\gamma)).$$

Si on définit $t_\Sigma$ par la relation

$$(m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)) \in \Sigma,$$

on a

$$(m_\Sigma(\gamma), z_\Sigma(\gamma)) = (m_\gamma(t_\Sigma), z_\gamma(t_\Sigma)).$$

On remarque que $m_\Sigma(\gamma)$ et $z_\Sigma(\gamma)$ vérifient les relations

$$m_\Sigma(\gamma) = m_\Sigma(z_\Sigma(\gamma)) = m_\gamma(t_\Sigma), \qquad z_\Sigma(\gamma) = \max_{m_0 \le m \le m_1} \widetilde{z}_\gamma(m).$$

Nous posons

$$\gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1}, \qquad \gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2}, \tag{30}$$

$$\Gamma^{(1)} = \{\, \gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1} \,|\, \gamma \in \Gamma \,\}, \qquad \Gamma^{(2)} = \{\, \gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2} \,|\, \gamma \in \Gamma \,\}$$

(le fait que $\Gamma^{(1)}$ et $\Gamma^{(2)}$ contiennent l'ensemble vide ne causera pas d'obstacle à nos raisonnements). Comme $\widetilde{z}(m)$ est strictement croissante pour $m_0 \le m \le m_\Sigma(\gamma)$ et strictement décroissante dans $m_\Sigma(\gamma) \le m \le m_1$ (voir le lemme 3.2), on peut définir les fonctions $m_\gamma^{(1)}(z)$ et $m_\gamma^{(2)}(z)$ par les relations

$$m = m_\gamma^{(1)}(z) \;\Leftrightarrow\; (m, z) \in \gamma^{(1)}, \qquad m = m_\gamma^{(2)}(z) \;\Leftrightarrow\; (m, z) \in \gamma^{(2)}. \tag{31}$$

Lemme 3.3. *On suppose que $\Sigma \cap \gamma \neq \emptyset$. Alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')}\, \mathrm{d}z' \le \varepsilon, \qquad \int_{z_\Sigma(\gamma)}^{z_\Sigma(\gamma)-\delta} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}(z'), z')}\, \mathrm{d}z' \le \varepsilon. \tag{32}$$

*Démonstration.* En vertu des conditions (10)–(12) on peut choisir un voisinage $U_\Sigma$ de $\Sigma$ et quatre constantes $c_1$, $c_2$, $c_3$, $c_4$ tels que

$$-c_2 \le \frac{g}{\alpha(m)^2}\frac{\mathrm{d}\alpha(m)}{\mathrm{d}m} \le -c_1 < 0 \qquad \text{dans } \; U_\Sigma, \tag{33}$$

$$m h_{gl}(m, z) \ge c_3 > 0 \qquad \text{dans } \; U_\Sigma, \tag{34}$$

$$\Big|\frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z}\Big| \le c_4 < \infty \qquad \forall z \in [0, 1]. \tag{35}$$

Nous nous limitons d'abord à la partie de $\gamma$ contenue dans $\overline{\Omega_1}$ et donc à $[t_0, t_\Sigma]$ pour $t$. On pose

$$\zeta(t) = z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t) = z_\Sigma(\gamma) - z_\gamma(t) \qquad \text{pour } \; t \in [t_0, t_\Sigma]. \tag{36}$$

On a alors

$$\frac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\mathrm{d}t} = -u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)). \tag{37}$$

Or, comme on a $u(m,z) = 0$ sur $\Sigma$, en utilisant la fonction $m_\Sigma(z)$ (voir (22)), on a

$$\begin{aligned} u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) &= u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) - u(m_\Sigma(z_\gamma(t)), z_\gamma(t)) = \\ &= -\int_{m_\gamma(t)}^{m_\Sigma(z_\gamma(t))} \frac{\partial u}{\partial m}\mathrm{d}m = -\int_{m_\gamma(t)}^{m_\Sigma(z_\gamma(t))} \frac{g}{\alpha(m)^2}\frac{\mathrm{d}\alpha(m)}{\mathrm{d}m}\mathrm{d}m. \end{aligned} \tag{38}$$

D'autre part, d'après le lemme 3.1, on a

$$m_\gamma(t_\Sigma) - m_\Sigma(z_\gamma(t)) = m_\Sigma(z_\gamma(t_\Sigma)) - m_\Sigma(z_\gamma(t)) = -\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{\alpha(m_\Sigma(z))^2 \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z}}{g\frac{\mathrm{d}\alpha(m)}{\mathrm{d}m}|_{m=m_\Sigma(z)}}\mathrm{d}z. \tag{39}$$

Maintenant nous nous limitons à $t$ tels que $(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) \in \Omega_1 \cap U_\Sigma$. Alors, de (37), (38), (33) on déduit que

$$\frac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\mathrm{d}t} \leq -c_1(m_\Sigma(z_\gamma(t)) - m_\gamma(t)). \tag{40}$$

Or, comme en vertu de (33) et (35) on a

$$-\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{\alpha(m_\Sigma(z))^2 \frac{\mathrm{d}v(z)}{\mathrm{d}z}}{g\frac{\mathrm{d}\alpha(m)}{\mathrm{d}m}|_{m=m_\Sigma(z)}}\mathrm{d}z \leq \frac{c_4}{c_1}(z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)) = \frac{c_4}{c_1}\zeta(t),$$

de (39) on obtient

$$\begin{aligned} m_\Sigma(z_\gamma(t)) - m_\gamma(t) &= m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) - (m_\gamma(t_\Sigma) - m_\Sigma(z_\gamma(t))) \geq \\ &\geq m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) - \frac{c_4}{c_1}\zeta(t), \end{aligned}$$

ce qui, joint à (40), nous donne

$$\frac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\mathrm{d}t} \leq -c_1(m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t)) + c_4\zeta(t). \tag{41}$$

En outre, en vertu de (34) et (27), on a

$$m_\gamma(t_\Sigma) - m_\gamma(t) \geq c_3(t_\Sigma - t),$$

ce qui nous permet de déduire de (41) que

$$\frac{\mathrm{d}\zeta(t)}{\mathrm{d}t} \leq -c_1c_3(t_\Sigma - t) + c_4\zeta(t) \qquad \text{pour} \quad t_\Sigma - \widetilde{\delta} \leq t \leq t_\Sigma \tag{42}$$

avec un certain $\widetilde{\delta} > 0$.

Comme la fonction

$$\overline{\zeta}(t) = c_1 c_3 \int_t^{t_\Sigma} (t_\Sigma - t') e^{-c_4(t'-t)} \mathrm{d}t'$$

vérifie l'égalité

$$\frac{\mathrm{d}\overline{\zeta}(t)}{\mathrm{d}t} = -c_1 c_3 (t_\Sigma - t) + c_4 \overline{\zeta}(t)$$

et que

$$\overline{\zeta}(t_\Sigma) = \zeta(t_\Sigma) = 0,$$

d'après le théorème de comparaison, on déduit de (42) que

$$\zeta(t) \geq c_1 c_3 \int_t^{t_\Sigma} (t_\Sigma - t') e^{-c_4(t'-t)} \mathrm{d}t' \geq \frac{c_1 c_3}{2} (t_\Sigma - t)^2 e^{-c_4(t_\Sigma - t)}$$

pour $t_\Sigma - \widetilde{\delta} \leq t \leq t_\Sigma$ ; en particulier, pour $t_\Sigma - \widetilde{\delta}_1 \leq t \leq t_\Sigma$, $\widetilde{\delta}_1 = \min(\widetilde{\delta}, \frac{\log 2}{c_4})$, on a

$$\zeta(t) \geq \frac{c_1 c_3}{4} (t_\Sigma - t)^2,$$

ou

$$t_\Sigma - t \leq \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} \sqrt{\zeta(t)} = \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} \sqrt{z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)}. \tag{43}$$

On rappelle que d'après la définition de la vitesse $u(m, z)$, on a

$$t_\Sigma - t = \int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')} \mathrm{d}z'$$

(pour la fonction $m_\gamma^{(1)}(z)$, voir (31)). Donc, de (43) on déduit que

$$\int_{z_\gamma(t)}^{z_\gamma(t_\Sigma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')} \mathrm{d}z' \leq \frac{2}{\sqrt{c_1 c_3}} \sqrt{z_\gamma(t_\Sigma) - z_\gamma(t)},$$

ce qui implique que, étant donné $\varepsilon > 0$, on peut choisis

$$\delta = \delta(\varepsilon) = \frac{\varepsilon^2 c_1 c_3}{4},$$

de sorte que la première inégalité de (44) sera vérifiée.

La deuxième inégalité de (44) se démontre de manière analogue.

Le lemme est démontré. $\square$

Corollaire. *On pose*

$$z_1^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma) \quad si \quad \Sigma \cap \gamma \neq \emptyset, \qquad z_1^{(\gamma)} = 1 \quad si \quad \gamma \subset \overline{\Omega_1},$$
$$z_2^{(\gamma)} = z_\Sigma(\gamma) \quad si \quad \Sigma \cap \gamma \neq \emptyset, \qquad z_2^{(\gamma)} = 1 \quad si \quad \gamma \subset \overline{\Omega_2}.$$

*Alors, quelque soit $\varepsilon > 0$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tel que*

$$\int_{z_1^{(\gamma)} - \delta}^{z_1^{(\gamma)}} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')} \, \mathrm{d}z' \leq \varepsilon, \qquad \int_{z_2^{(\gamma)}}^{z_2^{(\gamma)} - \delta} \frac{1}{u(m_\gamma^{(2)}(z'), z')} \, \mathrm{d}z' \leq \varepsilon. \tag{44}$$

*Démonstration.* Le corollaire résulte immédiatement du lemme et des hypothèses sur $u(m, z)$. $\square$

## 4. TRANSFORMATION DE L'EQUATION

Les caractéristiques $\gamma$ étant définies, nous pouvons écrire l'équation (25) comme la famille d'équations sur $\gamma \in \Gamma$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) = \tag{45}$$
$$= -\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\big(m\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) + \partial_z u(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\big)+$$
$$+\frac{m_\gamma(t)}{2}\int_0^{m_\gamma(t)} \beta(m_\gamma(t) - m', m')\sigma(m', z_\gamma(t))\sigma(m_\gamma(t) - m', z_\gamma(t))\mathrm{d}m'+$$
$$-m_\gamma(t)\int_0^{\infty} \beta(m_\gamma(t), m')\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\sigma(m', z_\gamma(t))\mathrm{d}m';$$

ici, pour ne pas alourdir l'écriture, nous avons écrit

$$\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t), z_\gamma(t)), \qquad \partial_z u(m_\gamma(t), z_\gamma(t))$$

au lieu de

$$\partial_m h_{gl}(m, z)\big|_{(m,z)=(m_\gamma(t), z_\gamma(t))}, \qquad \partial_z u(m, z)\big|_{(m,z)=(m_\gamma(t), z_\gamma(t))}.$$

Si nous introduisons les opérateurs $K[m, z; \sigma, \sigma]$ et $L[m, z; \sigma]$ par

$$K[m, z; \sigma, \sigma] = \int_0^m \beta(m - m', m')\sigma(m - m', z)\sigma(m', z)\mathrm{d}m', \tag{46}$$

$$L[m, z; \sigma] = \int_0^\infty \beta(m, m')\sigma(m', z)\mathrm{d}m', \tag{47}$$

nous pouvons écrire l'équation (45) sur $\gamma$ dans la forme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) = \tag{48}$$
$$= -\sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\big(m\partial_m h_{gl}(m_\gamma(t), z_\gamma(t)) + \partial_z u(m_\gamma(t), z_\gamma(t))\big)+$$
$$+m_\gamma(t)\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma(t), z_\gamma(t); \sigma, \sigma] - \sigma(m_\gamma(t), z_\gamma(t))L[m_\gamma(t), z_\gamma(t); \sigma]\Big).$$

Si on considère l'équation (48) séparément sur $\gamma^{(1)} = \gamma \cap \overline{\Omega_1}$ et sur $\gamma^{(2)} = \gamma \cap \overline{\Omega_2}$, on peut même transformer (48) dans une forme relative à la variable $z$. On rappelle que sur $\gamma = \gamma^{(1)} \cup \gamma^{(2)}$ on a

$$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}z}u(m_\gamma(t), z_\gamma(t)). \tag{49}$$

Considérons d'abord l'équation sur $\gamma^{(1)}$ et utilisons la fonction $m_\gamma^{(1)}(z)$ (voir (31)). Si on introduit les notations $\sigma(\gamma;z)$, $h_{gl}(\gamma;z)$, $u(\gamma;z)$ par

(50)

$$\sigma(\gamma;z)=\sigma(m_\gamma^{(1)}(z);z),\quad h_{gl}(\gamma;z)=h_{gl}(m_\gamma^{(1)}(z);z),\quad u(\gamma;z)=u(m_\gamma^{(1)}(z);z),$$

compte tenu de la relation (49), nous pouvons écrire l'équation (45) dans la forme

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\gamma;z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}\big(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)+\partial_z u(\gamma;z)\big)+ \tag{51}$$

$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}\big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma,\sigma]-\sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma]\big).$$

L'équation (51) doit être envisagée sur l'intervalle $[z_0^{(\gamma)},z_1^{(\gamma)}]$ et avec la condition initiale

$$\sigma(\gamma;z_0^{(\gamma)})=\overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}),z_0^{(\gamma)}), \tag{52}$$

où $z_0^{(\gamma)}$ (resp. $z_1^{(\gamma)}$) est la valeur la plus petite (resp. grande) de $z$ sur $\gamma^{(1)}$. La condition (52) n'est autre que la condition (3) restreinte sur $S_0\cup S_a$ et exprimée par rapport à $\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}$.

Sur $\gamma^{(2)}$, en utilisant la fonction $m_\gamma^{(2)}(z)$ et les notations $\sigma(\gamma;z)$, $h_{gl}(\gamma;z)$, $u(\gamma;z)$ tout analogues (avec $m_\gamma^{(2)}(z)$ au lieu de $m_\gamma^{(1)}(z)$ dans (50)), compte tenu de (49), l'équation (48), de manière tout analogue à (51), peut être écrite dans la forme

$$\frac{\mathrm{d}\sigma(\gamma;z)}{\mathrm{d}z}=-\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}\big(m_\gamma^{(2)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z)+\partial_z u(\gamma;z)\big)+ \tag{53}$$

$$+\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)}\big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(2)}(z),z;\sigma,\sigma]-\sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(2)}(z),z;\sigma]\big).$$

L'équation (53) doit être considérée sur l'intervalle $[0,z_2^{(\gamma)}]$, où $z_2^{(\gamma)}$ est la valeur la plus grande de $z$ sur $\gamma^{(2)}$. Si $\gamma^{(2)}\cap\Sigma=\emptyset$, alors $z_2^{(\gamma)}=1$ ; si $\gamma^{(2)}\cap\Sigma\neq\emptyset$, alors $z_2^{(\gamma)}=z_\Sigma(\gamma)$. La condition (3) se traduit en

$$\sigma(\gamma;z_2^{(\gamma)})=\sigma(\gamma;1)=\overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\qquad \text{si}\ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\in S_1. \tag{54}$$

D'autre part, si $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}),z_2^{(\gamma)})\in\Sigma$, alors la valeur de $\sigma(\gamma;z_2^{(\gamma)})$ doit être égale à la valeur au point $z=z_2^{(\gamma)}=z_1^{(\gamma)}$ de la fonction $\sigma(\gamma;z)$ qui satisfait à (51).

Il est utile de rappeler que dans $\Omega_1$ on a $u(m,z)>0$ et dans $\Omega_2$ on a $u(m,z)<0$. Donc, même si formellement (53) ne diffère de (51) que par la présence de $m_\gamma^{(2)}(z)$ au lieu de $m_\gamma^{(1)}(z)$, les signes des facteurs $\frac{\sigma(\gamma;z)}{u(\gamma;z)}$ et $\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}$ (respectivement $\frac{m_\gamma^{(2)}(z)}{u(\gamma;z)}$) dans leur second membre sont opposés l'un à l'autre.

## 5. RESOLUTION DE L'EQUATION DANS $\Omega_1$

Pour résoudre l'équation (1) (ou (25)) avec les conditions (3), nous la résolvons d'abord dans $\Omega_1$, en supposant que dans $\Omega_2$ la fonction $\sigma$ est égale à une fonction donnée $\overline{\sigma}_2$ et puis nous allons résoudre l'équation dans $\Omega_2$ avec la fonction $\sigma = \sigma_1$ dans $\Omega_1$, $\sigma_1$ étant la solution obtenue dans l'étape précédente. On cherchera ensuite un point fixe de l'opérateur qui, à $\overline{\sigma}_2$, associe la solution $\sigma_2$ de la seconde étape.

Pour construire la solution $\sigma = \sigma_1$ dans $\Omega_1$ avec la donnée $\overline{\sigma}_2$ dans $\Omega_2$, on suppose qu'une fonction $\overline{\sigma}_2(m, z)$ est donnée dans $\Omega_2$ et vérifie la condition

(55) $$0 \leq \inf_{(m,z)\in\Omega_2} \overline{\sigma}_2(m, z) \leq \sup_{(m,z)\in\Omega_2} \overline{\sigma}_2(m, z) < \infty.$$

(56) $$\overline{\sigma}_2(m, z) = 0 \quad \text{pour } \ m \geq \overline{m}_B$$

où

$$\overline{m}_B = \sup\{m_\gamma^{(2)}(0) | m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}) \leq \overline{m}_A, \ \gamma^{(2)} \in \Gamma^{(2)}\}.$$

Pour préciser les conditions sur l'existence et l'unicité de la solution $\sigma$ dans $\Omega_1$ avec $\overline{\sigma}_2$ dans $\Omega_2$, nous posons

(57) $$C_h = \sup_{(m,z)\in\Omega} |m\partial_m h_{gl}(m, z) + \partial_z u(m, z)|,$$

(58) $$C_\beta = \sup_{m,m'\in\mathbb{R}_+} m\beta(m, m').$$

En vertu du lemme 3.3 nous pouvons choisir un $\delta_1 > 0$ tel que

(59) $$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta_1}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')} \, \mathrm{d}z' \leq$$
$$\leq \frac{1}{4 \max(C_h + C_\beta \|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)} (\overline{m}_B - m_\Sigma^-), \frac{3C_\beta}{2}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))}.$$

(pour $m_\Sigma^-$, $m_\Sigma^+$ voir (23)). Posons encore

(60)
$$M_1 = \sup_{(m,z)\in\Omega_1^{(\delta_1)}} \frac{1}{u(m, z)}, \qquad \Omega_1^{(\delta_1)} = \bigcup_{\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}} \{(m, z) \in \gamma^{(1)} | \ z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta_1\}.$$

Proposition 5.1. *On suppose que $\overline{\sigma}_2$ vérifie la condition (55) et que*

(61) $$\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)} < \frac{1}{2(e^{c_1} + \frac{c_2}{c_1}(e^{c_1} - 1))}.$$

*où*

(62) $$c_1 = 2(C_h + C_\beta \|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)} (\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_1, \quad c_2 = 3C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)M_1.$$

*Alors il existe une fonction $\sigma(m,z) = \sigma_1(m,z)$ qui vérifie dans $\Omega_1$ l'équation (1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_2$ et la condition (3) (restreinte à $S_0 \cup S_a$) ; cette solution est unique dans la classe $L^\infty(\Omega_1)$.*

*Démonstration.* Pour construire la solution $\sigma$ dans $\Omega_1$, on construit d'abord une approximation successive $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$, en utilisant la structure de l'équation (51) (et de la condition (52)). On pose

$$\sigma^{[0]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) \tag{63}$$

et, si $\sigma^{[n]}$ est bien définie, on pose

$$\sigma^{[n+1]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) + R_1(\sigma^{[n]})(\gamma;z), \tag{64}$$

où $R_1(\cdot)$ est l'opérateur intégral défini par

$$R_1(\sigma)(\gamma;z) = -\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}(m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z'))\mathrm{d}z' + \tag{65}$$
$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma,\sigma] - \sigma(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma]\Big)\mathrm{d}z'.$$

Lemme 5.1. *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie et on a*

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a,m_\Sigma(z))} \leq \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}e^{c_1 z}}{1-2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{c_1 z}-1)} \qquad \textit{pour } 0 \leq z \leq 1. \tag{66}$$

*Démonstration du lemme.* On déduit de (64) (voir aussi (112)) que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \overline{\sigma}_0(m_\gamma^{(1)}(z_0^{(\gamma)}), z_0^{(\gamma)}) + \tag{67}$$
$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{|\sigma^{[n]}(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')}|m_\gamma^{(1)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z')|\mathrm{d}z' +$$
$$+\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(1)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}|K[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n]},\sigma^{[n]}]| + |\sigma^{[n]}(\gamma;z')L[m_\gamma^{(1)}(z'),z';\sigma^{[n]}]|\Big)\mathrm{d}z'.$$

En écrivant $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a,m_\Sigma(z))}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}$, on déduit de (67) (voir aussi (57), (58)) que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \tag{68}$$
$$+(C_h + C_\beta\|\overline{\sigma}_2\|_{L^\infty(\Omega_2)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}\mathrm{d}z',$$
$$+\frac{3C_\beta}{2}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma;z')}\mathrm{d}z'$$

Donc, en vertu de (59) et (60) on a

$$
\begin{aligned}
(69) \qquad & |\sigma^{[n+1]}(\gamma; z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \\
& + \frac{c_1}{2} \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty} \mathrm{d}z' + \frac{1}{4} \sup_{z_0^{(\gamma)} \leq z' \leq z} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty} + \\
& + \frac{c_2}{2} \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2 \mathrm{d}z' + \frac{1}{4} \sup_{z_0^{(\gamma)} \leq z' \leq z} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2,
\end{aligned}
$$

où $c_1$ et $c_2$ sont les constantes définies dans (62). Comme (68) est valable pour tout $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, en définissant de manière naturelle la fonction $\sigma^{[n+1]}(m, z)$ sur $\Omega_1$ et les normes $\|\sigma^{[n+1]}(\cdot, z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a, m_\Sigma(z))}$ (pour $m_\Sigma(z)$ voir (22)), on déduit de (69) que

$$
\begin{aligned}
(70) \qquad & \|\sigma^{[n+1]}(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \\
& + \frac{c_1}{2} \int_{0}^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty} \mathrm{d}z' + \frac{1}{4} \sup_{z_0^{(\gamma)} \leq z' \leq z} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty} + \\
& + \frac{c_2}{2} \int_{0}^{z} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2 \mathrm{d}z' + \frac{1}{4} \sup_{z_0^{(\gamma)} \leq z' \leq z} \|\sigma^{[n]}(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2.
\end{aligned}
$$

Considérons la fonction

$$
(71) \qquad \overline{X}(z) = \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} e^{c_1 z}}{1 - 2\frac{c_2}{c_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}(e^{c_1 z} - 1)}, \qquad 0 \leq z \leq 1.
$$

On constate que $\overline{X}(z)$ vérifie les relations

$$
\frac{d}{\mathrm{d}z}\overline{X}(z) = c_1 \overline{X}(z) + c_2 \overline{X}^2(z), \qquad \overline{X}(0) = 2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}
$$

et donc

$$
(72) \qquad \overline{X}(z) = 2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + c_1 \int_0^z \overline{X}(z')\mathrm{d}z' + c_2 \int_0^z (\overline{X}(z'))^2 \mathrm{d}z'.
$$

D'après (61) et (71) on a également

$$
\overline{X}(1) \leq 1.
$$

On va montrer que, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\sigma^{[n]}$ vérifie l'inégalité

$$
(73) \qquad \|\sigma^{[n]}(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq \overline{X}(z).
$$

En effet, pour $n = 0$, l'inégalité (73) résulte immédiatement de la définition (63).

Supposons maintenant que $\sigma^{[n]}$ vérifie (73). En substituant (73) dans (70), on a

$$
\|\sigma^{[n+1]}(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \frac{c_1}{2} \int_0^z \overline{X}(z')\mathrm{d}z' + \frac{c_2}{2} \int_0^z \overline{X}^2(z')\mathrm{d}z' + \frac{1}{4}\overline{X}(z) + \frac{1}{4}\overline{X}^2(z),
$$

ou, compte tenu de la relation $\overline{X}(z) \leq \overline{X}(1) \leq 1$,

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + \frac{c_1}{2}\int_0^z \overline{X}(z')\mathrm{d}z' + \frac{c_2}{2}\int_0^z \overline{X}^2(z')\mathrm{d}z' + \frac{1}{2}\overline{X}(z).$$

Cette inégalité et l'égalité (72) entraînent

$$\|\sigma^{[n+1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \overline{X}(z) \quad \text{pour } z \in [0,1],$$

ce qui démontre (73) et donc (66). Le lemme est démontré. $\square$

Continuation de la démonstration de la proposition 5.1. En faisant la différence entre la $n+m$-ième approximation $\sigma^{[n+m]}$ et la $n$-ième approximation $\sigma^{[n]}$, des définitions (64) et (112) on obtient

$$\sigma^{[n+m]}(\gamma;z) - \sigma^{[n]}(\gamma;z) = \int_{\widetilde{z}_0}^z \frac{1}{u(\gamma;z')}D(z')\mathrm{d}z', \tag{74}$$

où

$$D(z) = -(\sigma^{[n+m-1]} - \sigma^{[n-1]})(m_\gamma^{(1)}(z)\partial_m h_{gl}(\gamma;z) + \partial_z u(\gamma;z)) +$$
$$+\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{2}\big(K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n+m-1]},\sigma^{[n+m-1]}] - K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n-1]},\sigma^{[n-1]}]\big) +$$
$$-m_\gamma^{(1)}(z)\big(\sigma^{[n+m-1]}(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n+m-1]}] - \sigma^{[n-1]}(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma^{[n-1]}]\big).$$

D'après les définitions (46), (47) et l'inégalité (66) ainsi que l'hypothèse sur $\overline{\sigma}_2$, il existe deux constantes $C_0$ et $C_1$ telles que

$$|D(z)| \leq C_0, \tag{75}$$

$$|D(z)| \leq C_1\|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z) - \sigma^{[n-1]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}. \tag{76}$$

Soit $\varepsilon$ un nombre réel strictement positif. D'après le lemme 3.3 il existe un $\delta(\varepsilon) > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\delta(\varepsilon)}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{u(\gamma;z')}\mathrm{d}z' = \frac{\varepsilon}{2eC_0} \qquad \forall \gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}. \tag{77}$$

On pose

$$L_1(\varepsilon) = \sup_{\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}} \{\, \frac{1}{u(\gamma;z)} \,|\, (m,z) \in \gamma^{(1)},\ z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta(\varepsilon)\,\}. \tag{78}$$

Des relations (74)–(78) on déduit que

$$|\sigma^{[n+m]}(\gamma;z) - \sigma^{[n]}(\gamma;z)| \leq L_1(\varepsilon)C_1\int_0^z \|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z') - \sigma^{[n-1]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}\mathrm{d}z' + \frac{\varepsilon}{2e},$$

d'où

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z) - \sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty([\overline{m}_a,m_\Sigma(z)])} \leq$$

$$\leq L_1(\varepsilon)C_1 \int_0^z \|\sigma^{[n+m-1]}(\cdot,z') - \sigma^{[n-1]}(\cdot,z')\|_{L^\infty} \mathrm{d}z' + \frac{\varepsilon}{2e}.$$

En répétant une procédure analogue, on arrive à l'inégalité

(79)

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z) - \sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq (L_1(\varepsilon)C_1)^n \frac{z^n}{n!} \|\sigma^{[m]} - \sigma^{[0]}\|_{L^\infty(\Omega_1)} + \frac{\varepsilon}{2e} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!}.$$

Comme, en vertu du lemme 3.4, il existe un $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que

$$(L_1(\varepsilon)C_1)^n \frac{z^n}{n!} \|\sigma^{[m]} - \sigma^{[0]}\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_\varepsilon,$$

on déduit de (79) que

$$\|\sigma^{[n+m]}(\cdot,z) - \sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(\Omega_1)} \leq \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\varepsilon, \quad \forall m \geq 1. \tag{80}$$

C'est-à-dire, $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans la topologie de $L^\infty(\Omega_1)$ et donc, quand $n$ tend vers l'infini, $\sigma^{[n]}$ converge vers une fonction $\sigma = \sigma_1$ dans $L^\infty(\Omega_1)$.

Il n'est pas difficile à démontrer que la limite $\sigma = \sigma_1$ satisfait à l'équation (1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m,z)$ à la place de $\sigma(m,z)$ pour $(m,z) \in \Omega_2$ et à la condition (3) et que la solution est unique. $\square$

## 6. RESOLUTION DE L'EQUATION DANS $\Omega_2$

Maintenant on se propose de résoudre l'équation (1) dans $\Omega_2$, en supposant que dans $\Omega_1$ la fonction $\sigma$ est égale à une fonction donnée $\overline{\sigma}_1$ (plus tard on substituera à $\overline{\sigma}_1$ la solution $\sigma_1$ de l'équation (1) dans $\Omega_1$ avec $\overline{\sigma}_2$ donnée dans $\Omega_2$). On suppose que

$$\overline{\sigma}_1 \in C(\overline{\Omega_1}), \qquad 0 \leq \inf_{(m,z)\in\Omega_1} \overline{\sigma}_1(m,z) \leq \sup_{(m,z)\in\Omega_1} \overline{\sigma}_1(m,z) < \infty \tag{81}$$

et, à l'aide du corollaire du lemme 3.3 on choisit un $\delta_2 > 0$ tel que

$$\int_{z_2^{(\gamma)}-\delta_2}^{z_2^{(\gamma)}} \frac{1}{|u(m_\gamma^{(2)}(z'),z')|} \,\mathrm{d}z' \leq \tag{82}$$

$$\leq \frac{1}{4\max(C_h + \frac{3C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + \frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-),\ \frac{3C_\beta}{2}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))}$$

où $m_\Sigma^-$, $m_\Sigma^+$, $C_h$ et $C_\beta$ sont les constantes introduites dans (57), (58) et (23) respectivement. On pose en outre

(83)

$$M_2 = \sup_{(m,z)\in\Omega_2^{(\delta_2)}} \frac{1}{|u(\gamma;z)|}, \quad \Omega_2^{(\delta_2)} = \bigcup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \{(m,z) \in \gamma^{(2)} \,|\, z \leq z_\Sigma(\gamma) - \delta_2\}.$$

$$T_2 = \sup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \int_{z_2^{(\gamma)}}^0 \frac{1}{u(\gamma,z')}\mathrm{d}z'; \tag{84}$$

on voit aisément que, en vertu de (9),(11), et (16), on a $T_2 < \infty$.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution $\sigma = \sigma_2$ dans $\Omega_2$, on suppose, de manière analogue à (61), que

$$\max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + \frac{C_\beta T_2}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \leq \tag{85}$$

$$\leq \frac{1}{2(e^{c_3} + \frac{c_4}{c_3}(e^{c_3}-1))},$$

où $\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma$ est la restriction de $\overline{\sigma}_1$ à $\Sigma$ et

$$c_3 = (2C_h + 3C_\beta\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + C_\beta\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_2, \tag{86}$$

$$c_4 = 3C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)M_2.$$

Proposition 6.1. *On suppose que les conditions* (81) *et* (85) *sont vérifiées. Alors il existe une fonction* $\sigma(m,z) = \sigma_2(m,z)$ *qui vérifie dans* $\Omega_2$ *l'équation* (1) *dans laquelle on substitue* $\overline{\sigma}_1(m,z)$ *à la place de* $\sigma(m,z)$ *pour* $(m,z)\in\Omega_1$ *et la condition* (3) *sur* $S_1$ *et la condition* $\sigma(m,z) = \overline{\sigma}_1(m,z)$ *pour* $(m,z)\in\Sigma$ *; cette solution* $\sigma$ *est unique dans la classe* $L^\infty(\Omega_2)$.

*Démonstration.* Comme pour la proposition 5.1, on va utiliser la forme (53) sur $\gamma^{(2)}$ de l'équation. Or, dans le cas où le point de départ $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)})$ de $\gamma^{(2)}$ se trouve sur $\Sigma$, nous posons la condition

$$\sigma(\gamma; z_2^{(\gamma)}) = \overline{\sigma}_1(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \qquad \text{si} \ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma, \tag{87}$$

tandis que, dans le cas où $(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in S_1$, nous considérons la condition (54) déjà introduite précédemment.

Toujours comme dans la démonstration de la proposition 3.1, on construit une approximation successive $\{\sigma^{[n]}\}_{n\in\mathbb{N}}$. On choisit $\sigma^{[0]}(\gamma;z)$ égale à la donnée initiale (54) ou (87), c'est-à-dire

$$\sigma^{[0]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}), \tag{88}$$

où

$$\overline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_1 \quad \text{si} \ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in \Sigma, \qquad \overline{\sigma}_i = \overline{\sigma}_0 \quad \text{si} \ \ (m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) \in S_1,$$

et, si $\sigma^{[n]}$ est bien définie, on pose (avec la même notation $\overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)})$ utilisée dans (88))

$$\sigma^{[n+1]}(\gamma;z) = \overline{\sigma}_i(m_\gamma^{(2)}(z_2^{(\gamma)}), z_2^{(\gamma)}) + R_2(\sigma^{[n]})(\gamma;z), \tag{89}$$

où $R_2(\cdot)$ est défini par

$$R_2(\sigma)(\gamma;z) = -\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\sigma(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}(m_\gamma^{(2)}(z')\partial_m h_{gl}(\gamma;z') + \partial_z u(\gamma;z'))\mathrm{d}z' + \tag{90}$$

$$+\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{m_\gamma^{(2)}(z')}{u(\gamma;z')}\Big(\frac{1}{2}K[m_\gamma^{(2)}(z'),z';\sigma,\sigma] - \sigma(\gamma;z')L[m_\gamma^{(2)}(z'),z';\sigma]\Big)\mathrm{d}z'.$$

LEMME 6.1. *Quelque soit $n \in \mathbb{N}$, $\sigma^{[n]}$ est bien définie et on a*

$$\sigma^{[n]}(m,z) = 0 \qquad si \;\; m > \overline{m}_B, \tag{91}$$

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(m_\Sigma(z),\overline{m}_B)} \leq \frac{2A_{0,1}e^{c_3(1-z)}}{1 - 2\frac{c_4}{c_3}A_{0,1}(e^{c_3(1-z)}-1)} \qquad pour \;\; 0 \leq z \leq 1, \tag{92}$$

*avec*

$$A_{0,1} = \max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + \frac{T_2 C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a).$$

*Démonstration du lemme.* Des conditions (8), (19), de la définition de $\overline{m}_B$ (voir (86)) et de la définition de $\sigma^{[n]}$ on déduit immédiatement que $\sigma^{[n]}(m,z) = 0$ pour $m > \overline{m}_B$.

De manière analogue à la déduction de (68), en écrivant $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty(m_\Sigma(z),\overline{m}_B)}$, on déduit de (89)–(114), (57), (58) que

$$|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)| \leq \max\left(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\overline{\sigma}_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty(\Sigma)}\right) + \tag{93}$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|^2_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(\gamma;z')}\mathrm{d}z' +$$

$$+(C_h + \frac{3C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) +$$

$$+\frac{C_\beta}{2}\|\overline{\sigma}_1\|_{L^\infty(\Omega_1)}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}\frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}\mathrm{d}z' +$$

$$+\frac{3C_\beta}{2}(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}\frac{\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|^2_{L^\infty}}{u(\gamma;z')}\mathrm{d}z'.$$

Or en décomposant l'intégrale $\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z}$ en

$$\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} = \int_{z_2^{(\gamma)}}^{\max(z_2^{(\gamma)}-\delta_2,z)} + \int_{\max(z_2^{(\gamma)}-\delta_2,z)}^{z}$$

et en utilisant (82), (83), (86), de manière analogue à l'obtention de (70) on déduit de (93) que

$$\|\sigma^{[n+1]}(\gamma;z)\|_{L^\infty} \leq A_{0,1} + \tag{94}$$

$$+\frac{c_3}{2}\int_z^1 \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}\mathrm{d}z' + \frac{1}{4}\sup_{z\le z'\le 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|_{L^\infty}+$$
$$+\frac{c_4}{2}\int_z^1 \|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|^2_{L^\infty}\mathrm{d}z' + \frac{1}{4}\sup_{z\le z'\le 1}\|\sigma^{[n]}(\cdot,z')\|^2_{L^\infty}.$$

Ayant obtenu une inégalité similaire à (70), nous pouvons procéder de la même manière, en définissant

$$\overline{Y}(z) = \frac{2A_{0,1}e^{c_3(1-z)}}{1-2\frac{c_4}{c_3}A_{0,1}(e^{c_3(1-z)}-1)} \qquad \text{pour } \ 0<z<1,$$

et en démontrant

$$\|\sigma^{[n]}(\cdot,z)\|_{L^\infty} \le \overline{Y}(z),$$

ce qui nous amène au lemme. □

*Continuation de la démonstration de la proposition 6.1.* Une fois construite la suite de solutions approchées $\sigma^{[n]}$ vérifiant les relations (91), (92), on peut procéder de manière tout analogue à la démonstration de la proposition 5.1, en faisant la différence $\sigma^{[n+m]}(\gamma;z)-\sigma^{[n]}(\gamma;z)$ (pour $\sigma^{[n]}$ construites dans le lemme 6.1) comme dans (74) et en l'estimant comme dans (75)-(80), de sorte que la démonstration de la proposition 6.1 sera complétée. □

## 7. ESTIMATIONS DE $\sigma_1$ SUR $\Omega_1$ ET DE $\sigma_2$ SUR $\Omega_2$

Même si la démonstration des propositions 5.1 et 6.1 contient implicitement (voir les lemmes 5.1 et 6.1) une majoration de la norme de $\sigma_1$ dans $L^\infty(\Omega_1)$ et de celle de $\sigma_2$ dans $L^\infty(\Omega_2)$, pour nos ultérieurs raisonnements il nous convient d'améliorer ces estimations. Nous commençons par la démonstration de la positivité de $\sigma_1$.

LEMME 7.1. *Soit $\sigma=\sigma_1$ la solution de l'équation* (1) *dans $\Omega_1$, obtenue dans la proposition 5.1 (sous les conditions de la proposition 5.1). Alors on a*

$$\sigma_1(m,z)\ge 0 \qquad \forall (m,z)\in\Omega_1. \tag{95}$$

*En outre, $\sigma_1$ est continue dans $\Omega_1$.*

*Démonstration.* On rappelle que $\sigma=\sigma_1$ satisfait, sur chaque $\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}$, à l'équation (51) et que, en vertu de la définition (46) de $K$, on a

$$\frac{m_\gamma^{(1)}(z)}{u(\gamma;z)}K[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma,\sigma]\ge 0.$$

Donc la condition $\sigma(\gamma; z_0^{(\gamma)}) \geq 0$ (voir (52), (3)) et l'expression du second membre de l'équation (51), considérée comme équation différentielle ordinaire, impliquent que $\sigma(\gamma; z) \geq 0$ là où $\sigma(\gamma; z)$ est bien définie.

La continuité de $\sigma_1$ résulte de la continuité de $\overline{\sigma}_0$ sur $S_0 \cup S_a$ et du fait que, sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, $\sigma_1$ est la solution de l'équation (51), dont les coefficients sont continus. $\square$

A l'aide du corollaire du lemme 3.3 on choisit un $\vartheta_1 > 0$ tel que

(96)
$$\int_{z_1^{(\gamma)}-\vartheta_1}^{z_1^{(\gamma)}} \frac{1}{u(m_\gamma^{(1)}(z'), z')} \mathrm{d}z' \leq \frac{1}{4 \max(C_h, C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))}$$

et on pose

(97)
$$\mu_1 = \sup_{(m,z) \in \Omega_1^{(\vartheta_1)}} \frac{1}{u(m,z)}, \qquad \Omega_1^{(\vartheta_1)} = \bigcup_{\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}} \{(m,z) \in \gamma^{(1)} \mid z \leq z_\Sigma(\gamma) - \vartheta_1 \},$$

(98)
$$a_1 = 2C_h \mu_1, \qquad a_2 = 2C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a)\mu_1.$$

On a le lemme suivant.

LEMME 7.2. *Soit $\sigma = \sigma_1$ la solution de l'équation* (1) *dans $\Omega_1$, obtenue dans la proposition 5.1 (sous les conditions de la proposition 5.1). Alors on a*

(99)
$$\sigma_1(m,z) \leq \overline{A}_1 \qquad \forall (m,z) \in \Omega_1,$$

*où*

(100)
$$\overline{A}_1 = \frac{2e^{a_1} \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0 \cup S_a)}}{1 - 2\frac{a_2}{a_1} \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0 \cup S_a)} (e^{a_1} - 1)}.$$

*Démonstration.* On considère de nouveau l'équation (51) vérifiée par $\sigma$. En vertu de la condition (55) et du lemme 7.1 on a

$$\sigma(\gamma; z) L[m_\gamma^{(1)}(z), z; \sigma] \geq 0,$$

ce qui nous permet de déduire de (51) que

(101)
$$|\sigma(\gamma; z)| \leq \|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty} + C_h \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}}{u(\gamma; z')} \mathrm{d}z' +$$
$$+ C_\beta(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \int_{z_0^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot, z')\|_{L^\infty}^2}{u(\gamma; z')} \mathrm{d}z',$$

où on a écrit $\|\sigma(\cdot, z)\|_{L^\infty}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}$ au lieu de $\|\sigma(\cdot, z)\|_{L^\infty(\overline{m}_a, m_\Sigma(z))}$ et $\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0 \cup S_a)}$.

L'inégalité (101) étant établie, on peut procéder d'une manière analogue à la démonstration du lemme 5.1 (en particulier, à partir de (68)), en y remplaçant $c_1$ et $c_2$ par $a_1$ et $a_2$ définis dans (98) (vois aussi (96), (97)). De la sorte on aura

$$\|\sigma(\cdot,z)\|_{L^\infty} \leq \frac{2\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}e^{a_1 z}}{1-2\frac{a_2}{a_1}\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_0\cup S_a)}(e^{a_1 z}-1)} \qquad \text{pour} \quad 0\leq z\leq 1,$$

d'où le lemme. □

*Remarque* 7.1. La valeur $\overline{A}_0$ donnée dans (100) ne dépend pas $\overline{\sigma}_2$. En effet, $a_1$ et $a_2$ ne dépendent pas de $\overline{\sigma}_2$ (voir (96)–(98)).

Maintenant on considère l'équation (1) dans $\Omega_2$ avec $\sigma=\sigma_1$ dans $\Omega_1$, où $\sigma_1$ est la solution de l'équation (1) dans $\Omega_1$ obtenue dans la proposition 3.1. Pour mieux caractériser la solution $\sigma=\sigma_2$ de ce problème, en désignant par $\overline{\gamma}_b$ la caractéristique qui passe par le point $(m_\Sigma(1),1)$ (pour la notation $m_\Sigma(z)$, voir (22)), on divise $\Omega_2$ en deux parties

$$\Omega_{2,1}=\{\,(m,z)\in\Omega_2\,|\,m_\Sigma(z)<m\leq m^{(2)}_{\overline{\gamma}_b}(z)\,\}, \tag{102}$$

$$\Omega_{2,2}=\Omega_2\backslash\Omega_{2,1}=\{\,(m,z)\in\Omega_2\,|\,m>m^{(2)}_{\overline{\gamma}_b}(z)\,\}, \tag{103}$$

où $m^{(2)}_\gamma(z)$ est la fonction définie dans (31).

Lemme 7.3. *Soit $\sigma=\sigma_2$ la solution de l'équation (1) dans $\Omega_2$, obtenue dans la proposition 6.1 (sous les conditions de la proposition 6.1) avec $\overline{\sigma}_1=\sigma_1$ dans $\Omega_1$, où $\sigma_1$ est la solution de l'équation (1) dans $\Omega_1$ obtenue dans la proposition 5.1. Alors on a*

$$\sigma_2(m,z)\geq 0 \qquad \forall (m,z)\in\Omega_2. \tag{104}$$

*En outre, $\sigma_2$ est continue dans $\Omega_{2,1}$ et continue dans $\Omega_{2,2}$.*

*Démonstration.* On procède d'une manière analogue à la démonstration du lemme 7.1. On rappelle d'abord que $\sigma=\sigma_2$ satisfait, sur chaque $\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}$, à l'équation (53) et que, en vertu de la définition de $K$, on a

$$\frac{m^{(2)}_\gamma(z)}{|u(\gamma;z)|}K[m^{(2)}_\gamma(z),z;\sigma,\sigma]\geq 0.$$

Rappelons que les conditions initiales sur $S_1$ sont données par (54) et elles sont non-négatives par l'hypothèse (20), tandis que celles sur $\Sigma$ sont données par (87) et elles sont non-négatives en vertu du lemme 7.1. Par suite l'expression du second membre de l'équation (53) implique que $\sigma(\gamma;z)\geq 0$ là où $\sigma(\gamma;z)$ est bien définie, ce qui achève la démonstration du lemme. □

Analoguement au cas précédent, on choisit un $\vartheta_2 > 0$ tel que

$$\int_{z_\Sigma(\gamma)-\vartheta_2}^{z_\Sigma(\gamma)} \frac{1}{|u(m_\gamma^{(2)}(z'),z')|}\,\mathrm{d}z' \leq \tag{105}$$
$$\leq \frac{1}{4\max(C_h + C_\beta \overline{A}_1(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a), C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))},$$

et on pose
(106)
$$\mu_2 = \sup_{(m,z)\in\Omega_2^{(\vartheta_2)}} \frac{1}{|u(m,z)|}, \qquad \Omega_2^{(\vartheta_2)} = \bigcup_{\gamma^{(2)}\in\Gamma^{(2)}} \{(m,z)\in\gamma^{(2)} \mid\ z \leq z_\Sigma(\gamma) - \vartheta_2\},$$

$$a_3 = 2(C_h + C_\beta \overline{A}_1(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))\mu_2, \qquad a_4 = 2C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)\mu_2. \tag{107}$$

On a le lemme suivant.

Lemme 7.4. *Soit $\sigma = \sigma_2$ la solution de l'équation* (1) *dans $\Omega_2$, obtenue dans la proposition 6.1 (sous les conditions de la proposition 6.1) avec $\overline{\sigma}_1 = \sigma_1$ dans $\Omega_1$, où $\sigma_1$ est la solution de l'équation* (1) *dans $\Omega_1$ obtenue dans la proposition 5.1. Alors on a*

$$\sigma_2(m,z) \leq \overline{A}_2 \qquad \forall (m,z)\in\Omega_2, \tag{108}$$

*où*

$$\overline{A}_2 = \frac{2e^{a_3}\max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}_1)}{1 - 2\frac{a_4}{a_3}\max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \overline{A}_1)(e^{a_3}-1)}. \tag{109}$$

*Démonstration.* Comme dans la démonstration du lemme 7.2, on considère l'équation (53) vérifiée par $\sigma$ sur $\gamma^{(2)}$. En vertu des lemmes 7.1 et 7.3 on a $\sigma_1 \geq 0$ et $\sigma_2 \geq 0$, et donc

$$\sigma(\gamma;z)L[m_\gamma^{(1)}(z),z;\sigma] \geq 0.$$

Compte tenu de cette relation, on déduit de (53) que

$$|\sigma(\gamma;z)| \leq \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty}, \|\sigma_1\big|_\Sigma\|_{L^\infty}) + \tag{110}$$
$$+(C_h + C_\beta\|\sigma_1\|_{L^\infty}(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a))\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot,z')\|_{L^\infty}}{u(m_\gamma^{(2)},z')}\mathrm{d}z'$$
$$+C_\beta(\overline{m}_B - m_\Sigma^-)\int_{z_2^{(\gamma)}}^{z} \frac{\|\sigma(\cdot,z')\|_{L^\infty}^2}{u(m_\gamma^{(2)};z')}\mathrm{d}z'.$$

L'inégalité (110) étant établie, on peut procéder d'une manière analogue à la démonstration du lemme 6.1 (en particulier, à partir de (93)), en y remplaçant

$c_3$ et $c_4$ par $a_3$ et $a_4$ définis dans (107). De la sorte, en rappelant la continuité de $\sigma_1$ sur chaque $\gamma^{(1)} \in \Gamma^{(1)}$, on aura

$$\|\sigma(\cdot, z)\|_{L^\infty} \leq \frac{2e^{a_3(1-z)} \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\sigma_1\|_{L^\infty})}{1 - 2\frac{a_4}{a_3}(e^{a_3(1-z)} - 1) \max(\|\overline{\sigma}_0\|_{L^\infty(S_1)}, \|\sigma_1\|_{L^\infty})} \quad \text{pour } 0 \leq z \leq 1.$$

A l'aide du lemme 7.2 on en déduit le lemme. $\square$

## 8. EXISTENCE DE LA SOLUTION DANS $\Omega$

On va maintenant compléter la démonstration du théorème 3.1. On commence par définir l'ensemble

$$B_0 = \left\{\sigma_2 \in L^\infty(\Omega_2), 0 \leq \sigma_2(m, z) \leq \overline{A}_2\right\} \tag{111}$$

où $\overline{A}_2$ est la constante définie dans (109).

Si $\overline{\sigma}_2 \in B_0$, alors en vertu de la proposition 3.1 et des lemmes 3.6 et 3.7 il existe une unique fonction $\sigma_1(m, z)$ qui vérifie dans $\Omega_1$ l'équation (1) dans laquelle on substitue $\overline{\sigma}_2(m, z)$ à la place de $\sigma(m, z)$ pour $(m, z) \in \Omega_2$, la condition (3) (restreinte à $S_0 \cup S_a$) et l'inégalité

$$0 \leq \sigma_1(m, z) \leq \overline{A}_1 \qquad \forall (m, z) \in \Omega_1,$$

où $\overline{A}_1$ est la constante définie dans (100). Ceci nous permet de définir l'opérateur

$$G_1 : B_0 \to L^\infty(\Omega_1), \tag{112}$$

qui, à $\overline{\sigma}_2 \in B_0$, associe la solution $\sigma_1 \in L^\infty(\Omega_1)$ obtenue dans la proposition 5.1 et on a

$$G_1(B_0) \subset \{\, \sigma_1 \in L^\infty(\Omega_1) \,|\, 0 \leq \sigma_1(m, z) \leq \overline{A}_1 \ \forall (m, z) \in \Omega_1 \,\}. \tag{113}$$

Maintenant, à l'aide de la proposition 6.1, nous pouvons définir l'opérateur

$$G_2 : G_1(B_0) \to L^\infty(\Omega_2), \tag{114}$$

qui, à $\sigma_1 \in G_1(B_0)$, associe la fonction $\sigma_2 \in L^\infty(\Omega_2)$ qui vérifie dans $\Omega_2$ l'équation (1) dans laquelle on substitue $\sigma_1(m, z)$ à la place de $\sigma(m, z)$ pour $(m, z) \in \Omega_1$ et la condition (3) sur $S_1$ et la condition $\sigma(m, z) = \sigma_1(m, z)$ pour $(m, z) \in \Sigma$. En outre, en vertu des lemmes 7.3 et 7.4, on a

$$G_2(G_1(B_0)) \subset B_0. \tag{115}$$

Nous posons

$$G = G_2 \circ G_1, \tag{116}$$

$$B = \overline{\mathrm{conv}(G(B_0))}, \tag{117}$$

où la fermeture $\overline{\cdot}$ est prise par rapport à la topologie induite par la norme

$$\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m,z)|,$$

tandis que "conv$(A)$" désigne l'ensemble convexe le plus petit qui contient $A$.

LEMME 8.1. *On a*

$$G(B) \subset B, \tag{118}$$

*et*

$$B \text{ est convexe.} \tag{119}$$

*Démonstration.* L'affirmation (119) résulte immédiatement de la définition (117), tandis que (118) se déduit de (115) et des définitions (116)–(117). □

On va démontrer l'équicontinuité de $\sigma_2 \in G(B_0)$ dans $\Omega_{2,2}$ et dans $\Omega_{2,1}$.

LEMME 8.2. *Il existe une fonction continue* $\widetilde{\varepsilon}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *telle que*

$$\widetilde{\varepsilon}(r) \to 0 \qquad \textit{pour} \;\; r \to 0 \tag{120}$$

*et que, quelque soit* $\sigma_2 \in G(B_0)$ *et quelque soit* $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$ *ou* $\in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$, *on ait*

$$|\sigma_2(m_1, z_1) - \sigma_2(m_2, z_2)| \leq \widetilde{\varepsilon}(|m_1 - m_2| + |z_2 - z_1|). \tag{121}$$

*Démonstration.* Comme la démonstration de (121) pour $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$ ne diffère pas beaucoup de celle pour $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$, on examine de manière détaillée le cas de $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,2} \times \Omega_{2,2}$ et nous nous limiterons à des commentaires essentielles pour le cas de $((m_1, z_1), (m_2, z_2)) \in \Omega_{2,1} \times \Omega_{2,1}$.

Considérons deux points $(m_1, z_1)$ et $(m_2, z_2)$ appartenant à $\Omega_{2,2}$ et supposons, sans restreindre la généralité, que $z_1 \leq z_2$. Désignons par $\gamma_1$ (resp. $\gamma_2$) la caractéristique qui passe par $(m_1, z_1)$ (resp. $(m_2, z_2)$). On pose en outre

$$m_1^{(z_2)} = m_{\gamma_1}^{(2)}(z_2).$$

En rappelant la définition des caractéristiques $\gamma$ (voir (26)–(27)) et les hypothèses sur $u(m, z)$ et $h_{gl}(m, z)$, on voit aisément qu'il existe une fonction $\widetilde{d}_m$ telle que

$$|m_1^{(z_2)} - m_2| = |m_{\gamma_1}^{(2)}(z_2) - m_2| \leq \widetilde{d}_m(|m_1 - m_2| + |z_2 - z_1|). \tag{122}$$

En vertu de (122), pour démontrer l'existence d'une fonction $\widetilde{\varepsilon}(\cdot)$ vérifiant (120) et (121), il suffit de montrer l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_z(\cdot)$ telle que

$$\widetilde{\varepsilon}_z(r) \to 0 \qquad \text{pour} \;\; r \to 0, \tag{123}$$

$$|\sigma_2(\gamma; z_1) - \sigma_2(\gamma; z_2)| \leq \widetilde{\varepsilon}_r(|z_2 - z_1|) \tag{124}$$

(ici $\sigma_2(\gamma; z)$ désigne la valeur de $\sigma_2(m, z)$ sur la courbe $\gamma$ comme dans (53)) et l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$ telle que

$$\widetilde{\varepsilon}_m(r) \to 0 \qquad \text{pour} \ \ r \to 0, \tag{125}$$

$$|\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z)| \leq \widetilde{\varepsilon}_m(|m_1 - m_2|). \tag{126}$$

Or, de l'équation (53) on déduit que

$$|\sigma_2(\gamma; z_1) - \sigma_2(\gamma; z_2)| = \int_{z_1}^{z_2} \Big|\frac{\Phi(\gamma; z)}{u(\gamma; z)}\Big| \mathrm{d}z,$$

où $\Phi(\gamma; z)$ est le second membre de (53) multiplié par $u(\gamma; z)$. Comme on le voit aisément, les hypothèses sur $h_{gl}$, $u$, $\beta$ implique qu'il existe une constante $C_1$ telle que

$$|\Phi(\gamma; z)| \leq C_1$$

pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour tout $z \in [0, 1]$. Donc, d'après le corollaire du lemme 3.3, il existe une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_z(\cdot) : [0, 1] \to \mathbb{R}_+$ vérifiant (123) et (124).

Pour montrer l'existence de la fonction $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$, on considère un nombre $\varepsilon$ strictement positif. Si $(m_1, z)$, $(m_2, z) \in \Omega_{2,2}$, $(m_1, z) \in \gamma_1$, $(m_2, z) \in \gamma_2$, alors il résulte de l'équation (53) que

$$\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z) = \sigma(\gamma_1; z) - \sigma(\gamma_2; z) = \tag{127}$$

$$= \sigma_2(m^{(2)}_{\gamma_1}, 1) - \sigma_2(m^{(2)}_{\gamma_2}, 1) + \int_1^z \Big(\frac{\Phi(\gamma_1; z')}{u(\gamma_1; z')} - \frac{\Phi(\gamma_2; z')}{u(\gamma_2; z')}\Big) \mathrm{d}z'.$$

En vertu du corollaire du lemme 3.3 il existe un $\delta_{1,\varepsilon}$ tel que

$$\int_{\max(z, 1-\delta_{1,\varepsilon})}^{1} \Big|\frac{\Phi(\gamma_1; z')}{u(\gamma_1; z')} - \frac{\Phi(\gamma_2; z')}{u(\gamma_2; z')}\Big| \mathrm{d}z' \leq \frac{\varepsilon}{3}. \tag{128}$$

D'autre part, comme les hypothèses sur $u(m, z)$ implique que

$$\sup_{(m,z) \in \Omega_{2,2}, z \leq 1-\delta_{1,\varepsilon}} \frac{1}{|u(m, z)|} < \infty,$$

les hypothèses de la régularité des coefficients qui figurent dans le second membre de (53) impliquent que

$$\int_{z}^{\max(z, 1-\delta_{1,\varepsilon})} \Big|\frac{\Phi(\gamma_1; z')}{u(\gamma_1; z')} - \frac{\Phi(\gamma_2; z')}{u(\gamma_2; z')}\Big| \mathrm{d}z' \leq \varphi_{1,\varepsilon}(\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2)), \tag{129}$$

où $\varphi_{1,\varepsilon}(\cdot)$ est une fonction continue telle que $\varphi_{1,\varepsilon}(r) \to 0$ pour $r \to 0$, tandis que

$$\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{z \in [0,1]} |m^{(2)}_{\gamma_1}(z) - m^{(2)}_{\gamma_2}(z)|. \tag{130}$$

On rappelle en outre que, comme le système d'équations (26)–(27) peut être résolu avec les conditions "initiales" $(m(t_0), z(t_0)) = (m_1, z)$ ou $(m(t_0), z(t_0)) = (m_2, z)$ dans toutes les deux directions de $t$ et les coefficients sont des fonctions lipschitziennes, il existe une fonction continue $\widetilde{\delta}_m : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2) \leq \widetilde{\delta}_m(|m_1 - m_2|) \tag{131}$$

et que

$$\widetilde{\delta}_m(r) \to 0 \qquad \text{pour} \quad r \to 0.$$

Enfin, en vertu de la régularité supposée pour $\overline{\sigma}_0$, il existe une fonction continue $\varphi_0$ telle que $\varphi_0(r) \to 0$ pour $r \to 0$ et que

$$|\overline{\sigma}_0(m_1, 1) - \overline{\sigma}_0(m_2, 1)| \leq \varphi_0(|m_1 - m_2|).$$

On a donc

$$|\sigma_2(m^{(2)}_{\gamma_1}, 1) - \sigma_2(m^{(2)}_{\gamma_2}, 1)| \leq \varphi_0(\mathrm{dist}(\gamma_1, \gamma_2)). \tag{132}$$

Des relations (127)–(132) on déduit qu'il existe un $\delta_\varepsilon > 0$ tel que, si

$$|m_1 - m_2| \leq \delta_\varepsilon,$$

alors on ait

$$|\sigma_2(m_1, z) - \sigma_2(m_2, z)| \leq \varepsilon,$$

ce qui implique l'existence d'une fonction continue $\widetilde{\varepsilon}_m(\cdot)$ vérifiant (125) et (126). □

Corollaire. *L'ensemble $B$ est compact dans la topologie induite par la norme $\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m, z)|$.*

*Démonstration.* D'après le lemme 8.2, $G(B_0)$ est équicontinu. Donc l'est aussi $B$. D'autre part, en vertu des lemmes 7.3 et 7.4, $B$ est uniformément borné. Donc d'après le théorème d'Ascoli-Arzelà l'ensemble $B$ est compact. □

Maintenant on va démontrer que l'opérateur $G$ est continu.

Lemme 8.3. *L'opérateur $G$ est continu de $B$ dans lui même dans la topologie induite par la norme*

$$\|\varphi\| = \sup_{(m,z)\in\Omega_2} |\varphi(m, z)|.$$

*Démonstration.* On va montrer la continuité de $G_1$ et celle de $G_2$, qui impliqueront la continuité de $G$.

On va d'abord montrer que $G_1$ est continu. On remarque que, comme les fonctions appartenant à $B$ sont continues à morceaux et celles de $G_1(B)$ sont continues, ici on peut utiliser la norme de $L^\infty$. En effet, si on pose

$$\sigma_1 = G_1(\overline{\sigma}_2), \qquad \sigma_1^* = G_1(\overline{\sigma}_2^*), \qquad \Xi = \sigma_1 - \sigma_1^*, \qquad \Pi = \overline{\sigma}_2 - \overline{\sigma}_2^*, \tag{133}$$

on déduit de (51) (voir aussi (46), (47)) que, en désignant $\Xi(\gamma;z)=\sigma_1(\gamma;z)-\sigma_1^*(\gamma;z)$, etc..., on a

$$
|\Xi(\gamma;z)|\leq C_h\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{|\Xi(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')}\mathrm{d}z'+ \tag{134}
$$

$$
+C_\beta\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{1}{u(\gamma;z')}\int_0^{m_\gamma(z')}\big(|\sigma_1(m',z')\Xi(m-m',z')|+
$$

$$
+|\sigma_1^*(m-m',z')\Xi(m',z')|\big)\mathrm{d}m'\mathrm{d}z'+
$$

$$
+C_\beta\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{\sigma_1(\gamma;z')}{u(\gamma;z')}\Big[\int_0^{m_\Sigma(z')}|\Xi(m',z')|\mathrm{d}m'+\int_{m_\Sigma(z')}^{\infty}|\Pi(m',z')|\mathrm{d}m'\Big]\mathrm{d}z'+
$$

$$
+C_\beta\int_{z_0^{(\gamma)}}^{z}\frac{|\Xi(\gamma;z')|}{u(\gamma;z')}\Big[\int_0^{m_\Sigma(z')}\sigma_1^*(m',z')\mathrm{d}m'+\int_{m_\Sigma(z')}^{\infty}\overline{\sigma}_2^*(m',z')\mathrm{d}m'\Big]\mathrm{d}z',
$$

où $C_h$ et $C_\beta$ sont les constantes définies dans (57)–(58).

Comme en vertu des lemmes 7.1–7.4 et de la définition de $B$ les valeurs $\sigma_1(m,z)$, $\sigma_1^*(m,z)$, $\overline{\sigma}_2(m,z)$, $\overline{\sigma}_2^*(m,z)$ sont uniformément bornées et $\overline{\sigma}_2(m,z)=\overline{\sigma}_2^*(m,z)=0$ pour $m\geq\overline{m}_B$, en vertu du corollaire du lemme 3.3 il existe un certain $\delta>0$ tel que le second membre de (134) restreint à l'intégrale sur l'intervalle $[\min(z,z_1^{(\gamma)}-\delta),z]$ est majoré par $\frac{1}{2}\sup_{0\leq z'\leq z}(\|\Xi(\cdot,z')\|_{L^\infty}+\|\Pi(\cdot,z')\|_{L^\infty})$ et donc, compte tenu que $\frac{1}{u(m,z)}$ avec $z\leq z_1^{(\gamma)}-\delta$ est uniformément borné, on déduit de (134) que

$$
|\Xi(\gamma;z)|\leq\frac{1}{2}\sup_{0\leq z'\leq z}(\|\Xi(\cdot,z')\|_{L^\infty}+\|\Pi(\cdot,z')\|_{L^\infty})+
$$

$$
+C\int_{z_0^{(\gamma)}}^{\min(z,z_1^{(\gamma)}-\delta)}\|\Xi(\cdot,z')\|_{L^\infty}\mathrm{d}z'+C'\int_{z_0^{(\gamma)}}^{\min(z,z_1^{(\gamma)}-\delta)}\|\Pi(\cdot,z')\|_{L^\infty}\mathrm{d}z',
$$

où $C$ et $C'$ sont deux constantes. Comme cette inégalité est valable pour tout $\gamma^{(1)}\in\Gamma^{(1)}$, on en déduit que

$$
y(z)\leq\frac{1}{2}y(z)+C\int_0^z y(z')\mathrm{d}z'+\big(\frac{1}{2}+C'\big)\|\Pi\|_{L^\infty(\Omega_2)},
$$

où

$$
y(z)=\sup_{0\leq z'\leq z}\|\Xi(\cdot,z')\|_{L^\infty}.
$$

On en déduit qu'il existe une constante $C''$ telle que

$$
\|\Xi\|_{L^\infty(\Omega_2)}\leq C''\|\Pi\|_{L^\infty(\Omega_2)},
$$

ce qui prouve la continuité de $G_1$.

En ce qui concerne la continuité de $G_2$, on verra qu'elle peut être démontrée d'une manière analogue à celle de $G_1$. $\square$

*Démonstration du théorème 2.1.* En vertu des lemmes 8.1–8.3 et leur corollaire, $B$ est convexe et compact, on a $G(B) \subset B$ et l'opérateur $G$ est continu. Par conséquent d'après le théorème de Schauder il existe un élément $\overline{\sigma}_2 \in L^\infty(\Omega_2)$ tel que $G(\overline{\sigma}_2) = \overline{\sigma}_2$, c'est-à-dire $\overline{\sigma}_2 = \sigma_2$, ce qui achève la démonstration. $\square$

*Remarque 8.1.* La constante $\overline{A}_0$ mensionnée dans l'énoncé du théorème 2.1 pourra être mieux déterminée. En effet la constante doit vérifier les conditions (61) et (85), qui peuvent être réécrites par

$$\overline{A}_0 < \frac{1}{2(e^{c_1(\overline{A}_0)} + \frac{c_2}{c_1(\overline{A}_0)}(e^{c_1(\overline{A}_0)} - 1))} \equiv \psi_1(\overline{A}_0), \tag{135}$$

$$\max(\overline{A}_0, \overline{A}_1(\overline{A}_0)) + \frac{C_\beta}{2} T_2 \overline{A}_1^2(\overline{A}_0)(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) \leq \tag{136}$$

$$\leq \frac{1}{2(e^{c_3(\overline{A}_0)} + \frac{c_4}{c_3(\overline{A}_0)}(e^{c_3(\overline{A}_0)} - 1))} \equiv \psi_2(\overline{A}_0)$$

où

$$\overline{A}_1(\overline{A}_0) = \frac{2e^{a_1}\overline{A}_0}{1 - 2\frac{a_2}{a_1}\overline{A}_0(e^{a_1} - 1)},$$

$$c_1(\overline{A}_0) = 2(C_h + C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_1$$

$$c_3(\overline{A}_0) = (2C_h + 3C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(m_\Sigma^+ - \overline{m}_a) + C_\beta \overline{A}_1(\overline{A}_0)(\overline{m}_B - m_\Sigma^-))M_2.$$

Comme $\psi_1(0) > 0$, $\psi_2(0) > 0$, et que $\psi_1(\cdot)$ et $\psi_2(\cdot)$ sont continues, on peut trouver $\overline{A}_0 > 0$ tel que les inégalités (135) et (136) soient vérifiées.

## RÉFÉRENCES


[1] H. Belhireche, M.Z. Aissaoui et H. Fujita Yashima, *Equations monodimensionnelles du mouvement de l'air avec la transition de phase de l'eau.* Sci. Techn. Univ. Constantine **31** (2011), 9–17.

[2] H. Belhireche, M.Z. Aissaoui et H. Fujita Yashima, *Solution globale de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute.* Rend. Semin. Torino **70** (2012), 261–278.

[3] W. Cotton, G. Bryan et S. van den Heever, *Storm and cloud dynamics* (II ed.). Academic Press, 2011.

[4] P.B. Dubovski, *An iterative method for solving of the coagulation equation with space-nonhomogeneous velocity fields.* Comput. Math. Math. Phys. **30** (1990), 1755–1757 (English translation : 116–117).

[5] P.B. Dubovski, *Solutions of a spatially inhomogeneous coagulation equation with particle fractionation taken into account.* Differ. Equ. **26** (1990), 508–513 (English translation: 380–384).

[6] P.B. Dubovski, *Existence theorem for space inhomogeneous coagulation equation.* Appl. Math. Letters **7** (1994), 13–18.

[7] P.B. Dubovski, *Solvability of the transport equation in coagulation and fragmentation kinetics.* Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat. **65** (2001), 3–24.

[8] H. Fujita Yashima, *Modelación matemática del movimiento de la atmósfera con la transición de fase del agua.* Rev. Invest. Operac. **34** (2013), 93–104.

[9] H. Fujita Yashima, V. Campana et M.Z. Aissaoui, *Système d'équations d'un modèle du mouvement de l'air impliquant la transition de phase de l'eau dans l'atmosphère.* Afr. Math. Ann. **2** (2011), 66-92.

[10] V.A. Galkin, *Smoluchowski equation of the kinetic theory of coagulation for spatially nonuniform systems.* Sov. Phys. Dokl. **30** (1985), 1012–1014.

[11] V.A. Galkin, *Generalized solution of the Smoluchowski kinetic equation for spatially inhomogeneous systems.* Sov. Phys. Dokl. **32** (1987), 200–202.

[12] V.A. Galkin and P.B. Dubovski, *Solution of the coagulation equation with unbounded kernels.* Diff. Equ. **22** (1986), 504-509 (English translation: 373–378).

[13] A.K. Kikoïne and I.K. Kikoïne, *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[14] A.Z. Melzak, *A scalar transport equation.* Trans. Amer. Math. Soc. **85** (1957), 547–560.

[15] M. Merad, H. Belhireche et H. Fujita Yashima, *Solution stationnaire de l'équation de coagulation de gouttelettes en chute avec le vent horizontal*. Rend. Semin. Mat. Univ. Padova, **129** (2013), 205–224.

[16] H. Müller, *Zur allgemeinen Theorie der raschen Koagulation.* Kolloidchem. Beib **27** (1928), 223–250.

[17] F. Prodi and A. Battaglia, *Meteorologia – Parte II, Microfisica.* Grafica Pucci, Roma, 2004 (voir aussi le site : http ://www.meteo.uni-bonn.de/mitarbeiter/battaglia/teaching.html).

[18] S. Selvaduray and H. Fujita Yashima, *Equazioni del moto dell'aria con la transizione di fase dell'acqua nei tre stati : gassoso, liquido e solido.* Acc. Sc. Torino Memorie Sc. Fis. **35** (2011), 37–69.

[19] P.X. Sheng, J.T. Mao, J.G. Li, A.C. Zhang, J.-G. Sang and N.-X. Pan, *Physique de l'atmosphère* (en chinois). Publ. Univ. Pékin, 2003.

[20] M. Smoluchowski, *Drei Vorträge über Diffusion, Brownische Bewegung und Koagulation von Kolloidteilchen.* Phys. Zeits. **17** (1916), 557–585.

*Received 5 July 2014*

*Université 8 mai 1945,*
*Département de mathématiques,*
*Guelma, Algérie*
*mrad.meriem@gmail.com*
*aissaouizine@gmail.com*
*hisaofujitayashima@qq.com*

,

,