GROUPOÏD DES SOUSCATÉGORIES $\mathcal{L}$-SEMI-REFLEXIVES (THE GROUPOÏD OF $\mathcal{L}$-SEMIREFLEXIVE SUBCATEGORIES)

DUMITRU BOTNARU

Communicated by Constantin Năstăsescu

For the category of localy convex spaces, in the class of $\mathcal{L}$-semireflexives subcategories is introduced a binary operation and its operations are studied.

AMS 2010 Subject Classification : 46M15, 18B30.

Key words : reflective, c-reflective, $\mathcal{L}$-semireflexives subcategories.

INTRODUCTION

Certaines caractéristiques des espaces semi-reflexifs ont été examinées par des auteurs aussi pour d'autres espaces. Ainsi ont apparu diverses notions de semi-reflexivité et de reflexivité (voir [3, 4, 6, 8]).

Dans l'article, on introduit la notion de produit semi-reflexif $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ (Définition 1.1) et celle de souscatégorie $\mathcal{L}$-semi-reflexive (Définition 1.5) dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ des espaces topologiques vectoriels Hausdorff localement convexes.

Si la catégorie $\mathcal{L}$ est c-reflective ($\mathcal{L}$ contient la souscatégories des espaces avec la topologie faible S, et le foncteur reflecteur $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ est exactement à gauche), ces deux notions ne mènent pas à la même classe des souscatégories $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ (Théorème 1.7). Dans le paragraphe 1 on construit plusieurs classes de souscatégories qui appartiennent à la classe $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

Dans le paragraphe 2, dans la classe $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$, on introduit une opération binaire (Théorème 2.2), et on examine certains exemples (p. 2.4). Mentionnons que la souscatégorie $s\mathcal{R}$ des espaces semi-reflexifs (voir [7]) est un élément de la classe $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$, et la souscatégorie $i\mathcal{R}$ des espaces inductifs semi-reflexifs [3] est un élément de la classe $\mathbb{R}^s_f(\mathcal{S}h)$, où $\mathcal{S}h$ est la souscatégorie des espaces Schwartz (voir [7]).

On utilise dans l'article les notions suivantes :

Les structures de factorisation :

$(\mathcal{E}pi, \mathcal{M}_f)$= (la classe de tous les épimorphismes, la classe de toutes les inclusions topologiques avec l'image fermée) ;

$(\mathcal{E}_u, \mathcal{M}_p)$= (la classe des épimorphismes universaux, la classe des monomorphismes précis)=(la classe des morphismes surjectifs, la classe des inclusions topologiques).

$\mathbb{R}(\mathbb{K})$ la classe de toutes les souscatégories reflectives (coreflectives) non nulles.

$\tilde{\mathcal{M}}$ la souscatégorie coreflective des espaces avec la topologie Mackey.

$\mathcal{S}$ la souscatégorie reflective des espaces avec la topologie faible.

Π la souscatégorie reflective des espaces complets avec la topologie faible.

Γ_0 la souscatégorie reflective des espaces complets.

Dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ sont vraies les relations (voir [1]) :

$\mathbb{R} \subset \mathbb{R}(\mathcal{E}pi \cap \mathcal{M}_u)$,

$\mathbb{K} \subset \mathbb{K}(\mathcal{E}_u \cap \mathcal{M}ono)$.

1. SOUSCATÉGORIES $\mathcal{L}$-SEMI-REFLEXIVES

Définition 1.1 ([2]). Soit $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$ deux souscatégories de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$, où $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. L'objet $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ est nommé $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semi-reflexif, si sa $\mathcal{L}$-réplique appartient á la souscatégorie $\mathcal{A}$.

Notons $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{A}$ la souscatégorie pleine de tous les objets $(\mathcal{L}, \mathcal{A})$-semi-reflexifs. Elle se nomme le produit semi-reflexif des souscatégories $\mathcal{L}$ et $\mathcal{A}$.

1.2. Soit $\mathcal{R}(\mathcal{K})$ une souscatégorie reflective (coreflective) de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ avec le foncteur respectif $r : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{R}$ ($k : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{K}$). Notons

$$\varepsilon\mathcal{R} = \{e \in \mathcal{E}pi |\ r(e) \in \mathcal{I}so\}, \quad \mu\mathcal{K} = \{m \in \mathcal{M}ono |\ k(m) \in \mathcal{I}so\}.$$

Soit $b : X \to Y \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}, r^X : X \to rX$ $\mathcal{R}$-réplique de X. $b \in \varepsilon\mathcal{R}$, alors et seulement alors quand $b \in \mathcal{E}pi$ et

$$l^X = f \cdot b \tag{1}$$

pour un f (voir [1]).

Mentionnons, si $b : X \to Y \in \mu\mathcal{K}, Z \in |\mathcal{K}|$, alors pour tout $f : Z \to Y$ a lieu

$$f = u \cdot b \tag{2}$$

pour un u.

Théorème 1.3 ([1]). *Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ et le foncteur reflecteur $l : \mathcal{C}_2\mathcal{V} \to \mathcal{L}$ est exactement à gauche.*
2. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ et $l(\mathcal{M}_f) \subset \mathcal{M}_f$.*
3. *$\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$ et $l(\mathcal{M}_p) \subset \mathcal{M}_p$.*
4. *Il existe une souscatégorie coreflective $\mathcal{K}$ ainsi que $\mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$.*

1.4. Les couples de souscatégories $(\mathcal{K}, \mathcal{L})$ qui vérifient les conditions du Théorème précédent s'appellent les couples de souscatégories conjuguées et forment la classse $\mathbb{P}_c$, les souscatégories reflectives (coreflectives) s'appellent c-reflectives (c-coreflectives) et forment la classe $\mathbb{R}_c$ ($\mathbb{K}_c$).

Si $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, alors chaque componente est de manière unique définie. $(\mathcal{C}_2\mathcal{V}, \mathcal{C}_2\mathcal{V})$ est le plus grand élément de la classe $\mathbb{P}_c$, et $(\tilde{\mathcal{M}}, \mathcal{S})$ le plus petit élément. A la classe $\mathbb{R}_c$ appartiennent la souscatégorie $\mathcal{S}h$ des espaces Schwartz (voir [7]), $u\mathcal{N}$ des espaces ultranucléaires (voir [3]), les souscatégories générées des objets injectifs (voir [1]).

Définition 1.5. Soit $\mathcal{L} \in \mathbb{R}$. La classe des souscatégories reflectives fermées par rapport à $(\varepsilon\mathcal{L})$-sousobjets (respectivement : $(\varepsilon\mathcal{L})$-facteurobjets) est noté $\mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ (respectivement : $\mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$), et $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L}) = \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L}) \cap \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Les éléments de la classe $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ s'appellent souscatégories $\mathcal{L}$-semi-reflexives.

Toujours $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Si $\mathcal{S} \subset \mathcal{L}$, alors $\Pi \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

1.6. *L'operation* $\lambda_{\mathcal{R}}$. Soit $\mathcal{R} \subset \mathbb{R}$, et $\mathcal{A}$ une souscatégorie de la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Notons avec $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$ la souscatégorie pleine de tous les objets $Z \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ avec les caractéristiques suivantes :

Pour tout $A \in |\mathcal{A}|$ tout morphisme $f : A \to Z$ s'exteint par $\mathcal{R}$-réplique de A :

$$f = g \cdot r^A \tag{1}$$

pour un g, où r^A est $\mathcal{R}$-réplique de A.

On vérifie facilement que $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$ est fermé par rapport aux produits et $\mathcal{M}_f$-sousobjets. Donc $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$ est une souscatégorie reflective. Il est évident que $\mathcal{R} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{A})$.

THÉORÈME 1.7. *Soit $\mathcal{L}, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. *$\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.*

2. *Pour tout $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$ avec les caractéristiques $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$ a lieu $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$.*

3. *$\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.*

Démonstration. $1 \Rightarrow 3$. Soit $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$ et nous allons vérifier que $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $B \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|, b : X \to B \in \varepsilon\mathcal{L}$, et on va démontrer que $X \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|$. Si $l^B : B \to lB$ est $\mathcal{L}$-réplique de B, alors $lB \in |\mathcal{R}|$, et $l^B \cdot b$ est $\mathcal{L}$-réplique de X. Donc $X \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|$.

Soit $B \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|, b : B \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}$, alors $l^Y : Y \to lY$ est $\mathcal{L}$-réplique de B, $l^Y \cdot b : B \to lY$ est $\mathcal{L}$-réplique de Y, et $lY \in |\mathcal{R}|$. Donc $Y \in |\mathcal{L} *_{*r} \mathcal{R}|$.

$2 \Rightarrow 1$. Evidemment.

$3 \Rightarrow 2$. Soit $\mathcal{H} \in \mathbb{R}$, $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} \subset \mathcal{H} \subset \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})$, et nous allons démontrer que $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$.

$\mathcal{R} \subset \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}$. Soit $A \in |\mathcal{R}|$, et $l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-réplique de A. Comme $l^A \in \varepsilon\mathcal{L}$, il résulte que $lA \in |\mathcal{R}|$, où $lA \in |\mathcal{L} \cap \mathcal{R}| \subset |\mathcal{H}|$.

$\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H} \subset \mathcal{R}$. Soit $A \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{H}|, l^A : A \to lA$ $\mathcal{L}$-réplique de A. Donc $lA \in |\mathcal{H}| \subset |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})|$. Si $r^{lA} : lA \to rlA$ est $\mathcal{R}$-réplique de lA, alors $r^{lA} \in \mathcal{I}so$, parce que $lA \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{L})|$. Ainsi $lA \in |\mathcal{R}|$, et comme $\mathcal{R}$ est fermé par rapport aux $(\varepsilon\mathcal{L})$-sousobjets, décidons que $A \in |\mathcal{R}|$. $\square$

Ainsi un élément $\mathcal{R}$ de la classe $\mathcal{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$ peut être défini à l'aide de deux méthodes suivantes :

1. $\mathcal{R}$ est une souscatégorie reflective fermée par rapport aux $(\varepsilon\mathcal{L})$-sousobjets et $(\varepsilon\mathcal{L})$-facteurobjets.

2. $\mathcal{R}$ est le produit semi-reflexif des souscatégories $\mathcal{L}$ et $\mathcal{R}$: $\mathcal{R} = \mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$.

LEMME 1.8. *Soit $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.

2. $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

Démonstration. $1 \Rightarrow 2$. Soit $A \in |\mathcal{R}|, k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coréplique de A, et $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{R}$-réplique de kA. Alors

$$k^A = u \cdot r^{kA} \tag{1}$$

pour un u. Mais comme $rkA \in |\mathcal{K}|$, alors

$$u = k^A \cdot v \tag{2}$$

pour un v. On vérifie que $r^{kA} = v^{-1}$.

$$\begin{tikzcd}
kA \arrow[rr, shift left, "r^{kA}"] \arrow[dr, "k^A"'] & & rkA \arrow[ll, shift left, dashed, "v"] \arrow[dl, dashed, "u"] \\
& A &
\end{tikzcd}$$

$2 \Rightarrow 1$. Démonstration duale. $\square$

COROLLAIRE 1.9. *Soit $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, et $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Alors $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$.*

Démonstration. Si $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, il resulte que $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$. $\square$

THÉORÈME 1.10. 1. *Si $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$, alors pour tout $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$ on a $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.*

2. Soit $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \mathcal{R} \in \mathbb{R}$ et $r(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$. Alors

a) $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$;

b) $\lambda_{\Pi}(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

Démonstration. 1. Vérifions que $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Dans la catégorie $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ tout foncteur reflectif commute avec les produits ([2], Théorème 1.12). Ainsi, $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}$ est fermé par rapport aux produits.

Soit $m : X \to Y \in \mathcal{M}_f$, $Y \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|$, et $l^X : X \to lX$, et $l^Y : Y \to lY$ $\mathcal{L}$-réplique des objects correspondants. Alors

$$l^Y \cdot m = l(m) \cdot l^X, \tag{1}$$

et $lY \in |\mathcal{R}|$, et $l(m) \in \mathcal{M}_f$. Donc $lX \in |\mathcal{R}|$, et $X \in |\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R}|$. Ainsi on a démontré que $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=huge, column sep=huge]
X \arrow[r, "m"] \arrow[d, "l^X"'] & Y \arrow[d, "l^Y"] \\
lX \arrow[r, "l(m)"] & lY
\end{tikzcd}$$

La condition $\mathcal{L} *_{sr} \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ résulte du Théorème 1.7.

2. a) Vérifions que $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}$, $Z \in |\mathcal{K}|, r^Z : Z \to rZ$ $\mathcal{R}$-réplique de Z et $f : Z \to X$.

Il faut démontrer que f s'exteint par r^Z. Comme $Z \in |\mathcal{K}|$, et $b \in \varepsilon\mathcal{L} = \mu\mathcal{K}$, il résulte que

$$f = b \cdot u \tag{2}$$

pour un u. Alors u s'exteint par r^Z :

$$u = v \cdot r^Z. \tag{3}$$

Ainsi

$$f = (b \cdot v) \cdot r^Z. \tag{4}$$

Vérifions que $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{K})|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}, Z \in |\mathcal{K}|, r^Z : Z \to rZ$ et $h : Z \to X$. Alors

$$b \cdot h = w \cdot r^Z \tag{5}$$

pour un w. Comme $rZ \in |\mathcal{K}|$, et $b \in \varepsilon\mathcal{L}$, il résulte que

$$w = b \cdot t \tag{6}$$

pour un t. Ainsi

$$h = t \cdot r^Z. \tag{7}$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "r^Z"] \arrow[d, dashed, "u"'] \arrow[dr, "f" near start] & rZ \arrow[d, dashed, "b \cdot v"] \arrow[dl, dashed, "v"' near end] \\
A \arrow[r, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "r^Z"] \arrow[d, "h"'] & rZ \arrow[d, dashed, "w"] \arrow[dl, dashed, "t"'] \\
X \arrow[r, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] & A
\end{tikzcd}$$

b) $\lambda_\Pi(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $A \in |\lambda_\Pi(\mathcal{R})|, b : A \to X \in \varepsilon\mathcal{L}, Z \in |\mathcal{R}|, \pi^Z : Z \to \pi Z$, et $f : Z \to X$. Si $k^Z : kZ \to Z$ est $\mathcal{K}$-coréplique de Z, alors

$$f \cdot k^Z = b \cdot u \tag{8}$$

pour un u. Comme $\Pi \subset \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, il résulte que $\pi^Z \cdot k^Z$ est Π-réplique de kZ, et $kZ \in |\mathcal{R}|$. Ainsi

$$u = v \cdot \pi^Z \cdot k^Z \tag{9}$$

pour un v, on vérifie que

$$f = b \cdot v \cdot \pi^Z. \tag{10}$$

$$\begin{tikzcd}
Z \arrow[r, "\pi^Z"] \arrow[ddr, "f" near start] & \pi Z \arrow[dd, dashed, "b \cdot v"] \arrow[ddl, dashed, "v"' near end] \\
kZ \arrow[u, "k^Z"] \arrow[d, dashed, "u"'] & \\
A \arrow[r, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
Z \arrow[rr, "\pi^Z"] \arrow[dd, "f"'] & & \pi Z \arrow[dl, dashed, "v"'] \arrow[ddll, dashed, "k^X \cdot v"] \arrow[dd, dashed, "u"] \\
& kX \arrow[dl, "k^X"'] & \\
X \arrow[rr, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] & & A
\end{tikzcd}$$

$\lambda_\Pi(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $A \in |\lambda_\Pi(\mathcal{R})|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}, Z \in |\mathcal{R}|, \pi^Z : Z \to \pi Z$ Π-réplique de Z, et $f : Z \to X \in \mathcal{C}_2\mathcal{V}$. Plus loin soit $k^X : kX \to X$ $\mathcal{K}$-coréplique de X. Alors $b \cdot k^X : kX \to A$ est $\mathcal{K}$-coréplique de A. Ainsi

$$b \cdot f = u \cdot \pi^Z, \tag{11}$$

pour un u. Comme $\Pi \subset \tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, on a

$$u = b \cdot k^X \cdot v \tag{12}$$

pour un v. Alors $k^X \cdot v$ s'exteint sur f par π^Z :

$$f = k^X \cdot v \cdot \pi^Z. \quad \Box \tag{13}$$

COROLLAIRE 1.11. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c, \Gamma \in \mathbb{R}$ *et* $\Gamma_0 \subset \Gamma$.
Alors :
1. $\lambda_\Gamma(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.
2. $\lambda_\Pi(\Gamma) \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

Comme $\tilde{\mathcal{M}} \subset \mathcal{K}$, et $\Gamma_0 \subset \Gamma$, il résulte que $g(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}$ (voir [2], Lemme 3.1).

COROLLAIRE 1.12. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$. *Alors :*
1. $\lambda_\mathcal{R}(\mathcal{K}) \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.
2. $\lambda_\Pi(\mathcal{R}) \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.

PROPOSITION 1.13. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$. *Les affirmations suivantes sont équivalentes :*
1. $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$.
2. $\mathcal{R} = \lambda_\mathcal{R}(\mathcal{K})$ *et* $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$.

Démonstration. 1 $\Rightarrow$ 2. L'inclusion $\mathcal{R} \subset \lambda_\mathcal{R}(\mathcal{K})$ est évidente. Vérifions que $\lambda_\mathcal{R}(\mathcal{K}) \subset \mathcal{R}$. Soit $A \in |\lambda_\mathcal{R}(\mathcal{K})|$, $k^A : kA \to A$ $\mathcal{K}$-coréplique de A, mais $r^{kA} : kA \to rkA$ $\mathcal{R}$-réplique de kA. Alors

$$k^A = u \cdot r^{kA} \tag{1}$$

pour un u. Comme $k^A \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, il résulte que $r^{kA} \in \varepsilon\mathcal{L}$, c'est-à-dire $kA \in |\mathcal{R}|$. Alors et $A \in |\mathcal{R}|$.

La condition $k(\mathcal{R}) \subset \mathcal{R}$ est évidente.

2 $\Rightarrow$ 1. Selon le Théorème 1.7.

2. LE GROUPOÏD $\mathbb{R}_f^s(\varepsilon\mathcal{L})$, $\mathcal{L} \in \mathbb{R}_c$

2.1. Soit $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$, mais $\mathcal{R} \in \mathbb{R}$. Pour un objet $X \in |\mathcal{C}_2\mathcal{V}|$ soit $k^X : kX \to X$ et $r^X : X \to rX$ $\mathcal{K}$-coréplique et $\mathcal{R}$-réplique de X. Si $k^{rX} : krX \to rX$ est $\mathcal{K}$-coréplique de rX, alors

$$r^X \cdot k^X = k^{rX} \cdot k(r^X). \tag{1}$$

Si $r^kX : kX \to rkX$ est $\mathcal{R}$-réplique de kX, alors

$$r^X \cdot k^X = r(k^X) \cdot r^{kX}. \tag{2}$$

LEMME. 1. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, *alors le carré (1) est cocartésien.*

2. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, *alors le carré (2) est cocartésien.*

Démonstration. 1. Vraiment, soit

$$v \cdot k^X = u \cdot k(r^X) \tag{3}$$

le carré cocartesien construit sur les morphismes k^X et $k(r^X)$. Alors

$$r^X = t \cdot v, \tag{4}$$

$$k^{rX} = t \cdot u \tag{5}$$

pour un t. Comme $k^X \in \mathcal{E}_u$, mais (3) est un carré cocartésien, on déduit que $u \in \mathcal{E}_u$. Ainsi dans (5) $k^{rX} \in \mathcal{M}_u$, mais $u \in \mathcal{E}pi$, donc $t \in \mathcal{M}_u$. Alors $t \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$, et $P \in |\mathcal{R}|$. Ainsi $t \in \mathcal{I}so$.

$$\begin{tikzcd}
kX \arrow[rr, "k(r^X)"] \arrow[dd, "k^X"'] & & krX \arrow[dl, dashed, "u"] \arrow[dd, "k^{rX}"] \\
& P \arrow[dr, dashed, "t"] & \\
X \arrow[ur, dashed, "v"] \arrow[rr, "r^X"] & & rX
\end{tikzcd}$$

2. La démonstration se répète. $\square$

THÉORÈME 2.2. *Soit* $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, *et* $\mathcal{R}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. *Alors* $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

Démonstration. Vérifions que $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})|, b : X \to A \in \varepsilon\mathcal{L}, B \in |\mathcal{T}|$, mais $f : B \to X$. Alors

$$b \cdot f = g \cdot r^B \tag{1}$$

pour un g, mais

$$g \cdot k^{rB} = b \cdot h \tag{2}$$

pour un h. Plus loin, $rB \in |\mathcal{R}|, \mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$ et $k^{rB} \in \mu\mathcal{K} = \varepsilon\mathcal{L}$. Alors $krB \in |\mathcal{R}|$. Tenant compte de ce moment et du fait que $\mathcal{R} \in \mathbb{R}^s(\varepsilon\mathcal{L})$, il résulte que le carré

$$r^B \cdot k^B = k^{rB} \cdot k(r^B) \tag{3}$$

est un carré cocartésien (Lemme 2.1, p.1). Comme

$$f \cdot k^B = h \cdot k(r^B), \tag{4}$$

il resulte que

$$f = w \cdot r^B, \tag{5}$$

$$g = b \cdot w \tag{6}$$

pour un w. L'égalité (5) démontre que $X \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})|$.

$$\begin{tikzcd}
kB \arrow[r, "k(r^B)"] \arrow[d, "k^B"'] & krB \arrow[d, "k^{rB}"] \arrow[ddl, dashed, "h"'] \\
B \arrow[r, "r^B"] \arrow[d, "f"'] & rB \arrow[d, dashed, "g"] \arrow[dl, dashed, "w"] \\
X \arrow[r, "b \in \varepsilon\mathcal{L}"] & A
\end{tikzcd}$$

Vérifions que $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Soit $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})|$, $b_1 : A \to Y \in \varepsilon\mathcal{L}, B \in |\mathcal{T}|$, mais $f_1 : B \to Y$. Si $k^A : kA \to A$ est $\mathcal{K}$-coréplique de A, alors $b_1 \cdot k^A : kA \to Y$ est $\mathcal{K}$-coréplique de Y. Ainsi

$$f_1 \cdot k^B = b_1 \cdot k^A \cdot g_1 \tag{7}$$

pour un g_1. Ainsi $A \in |\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T})|$ et $kB \in |\mathcal{T}|$. Donc le morphisme $k^A \cdot g_1$ s'exteint par r^{kB} :

$$k^A \cdot g_1 = h_1 \cdot r^{kB}. \tag{8}$$

Comme $\mathcal{R} \in \mathbb{R}_f(\varepsilon\mathcal{L})$, on constate que le carré

$$r^B \cdot k^B = r(k^B) \cdot r^{kB} \tag{9}$$

est cocartesien (Lemme 2.1, p.2). Tenant compte de l'égalité

$$f_1 \cdot k^B = (b_1 \cdot h_1) \cdot r^{kB}, \tag{10}$$

il résulte que

$$f_1 = w_1 \cdot r^B, \tag{11}$$

$$b_1 \cdot h_1 = w_1 \cdot r(k^B) \tag{12}$$

pour un w_1. L'égalité (11) démontre que $\lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. $\square$

$$\begin{tikzcd}
& kB \arrow[r, "r^{kB}"] \arrow[dl, dashed, "g_1"'] \arrow[d, "k^B"] & rkB \arrow[d, "r(k^B)"] \arrow[ddl, dashed, "h_1"'] \\
kA = kY \arrow[dr, "k^A"'] & B \arrow[r, "r^B"] \arrow[dr, dashed, "f_1"] & rB \arrow[d, dashed, "w_1"] \\
& A \arrow[r, "b_1 \in \varepsilon\mathcal{L}"] & Y
\end{tikzcd}$$

2.3. Pour $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ dans la classe $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ on va définir une opération binaire $\circ$.

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{T} = \lambda_{\mathcal{R}}(\mathcal{T}).$$

Exemple 2.4. Soit $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$, et $\mathcal{R}, \mathcal{T} \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$. Alors :

1. $\mathcal{R} \circ \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \mathcal{R}$. Ainsi $\mathcal{C}_2\mathcal{V}$ est l'unité de droite.
2. $\mathcal{C}_2\mathcal{V} \circ \mathcal{R} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.
3. Toujours $\mathcal{R} \subset \mathcal{R} \circ \mathcal{T}$.
4. Si $\mathcal{T} \subset \mathcal{R}$, alors $\mathcal{R} \circ \mathcal{T} = \mathcal{C}_2\mathcal{V}$.
5. L'opération $\circ$ n'est pas commutative.
6. L'opération $\circ$ n'est par associative.

$$(\Pi \circ \Pi) \circ \Pi = \mathcal{C}_2\mathcal{V} \circ \Pi = \mathcal{C}_2\mathcal{V}; \quad \Pi \circ (\Pi \circ \Pi) = \Pi \circ \mathcal{C}_2\mathcal{V} = \Pi.$$

7. Si $\Gamma \in \mathbb{R}$ et $\Gamma_0 \subset \Gamma$, alors $\lambda_\Pi(\Gamma) \in \mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{S})$.

Remarque 2.5. Soit $\mathcal{K} \in \mathbb{K}$ et $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K})$ la classe des souscatégories coreflectives fermées par rapport à $(\mu\mathcal{K})$-sousobjets et $(\mu\mathcal{K})$-facteurobjets, qui se nomme souscatégories $\mathcal{K}$-semi-coreflexives. Plus loin, soit $\mathcal{K} *^{cs} \mathcal{T}$ le produit semi-coreflexif des souscatégories $\mathcal{K}$ et $\mathcal{T}$ (voir 1.1), et λ^* l'opération duale à l'opération λ (voir 1.5). Sont vraies les affirmations duales pour le Théorème 1.7, Lemme 2.1 et Théorème 2.2. Ainsi, pour $(\mathcal{K}, \mathcal{L}) \in \mathbb{P}_c$ nous avons deux groupoïds $\mathbb{R}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$ et $\mathbb{K}^s_f(\mu\mathcal{K}) = \mathbb{K}^s_f(\varepsilon\mathcal{L})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D. Botnaru, *Structures bicatégorielles complementaires*. ROMAI J. **5** (2009), *2*, 5–27.

[2] D. Botnaru and O. Cerbu, *Semireflexif product of two subcategories*. Proc. Sixth Congress of Romanian Math., Bucharest **1** (2007), 5–19.

[3] J.A. Berezansky, *Inductive reflexive locally convex espaces* (in Russian). Soviet Math. Dokl. **182** (1968), *1* 20–22.

[4] B.S. Brudovsky, *About k- and c-reflexivity of locally convex vector spaces* (in Russian). Lietuvos Math. Bulletin **VII** (1967), *1*, 17–21.

[5] B.S. Brudovsky, *The additional nuclear topology, transformation of the type s and the strict nuclear spaces* (in Russian). Soviet Math. Dokl. **178** (1968), *2*, 271–273.

[6] J. Dazord and U. Jourlin, *Sur quelques classes d'espaces localement convexes.* Publ. Dep. Math. Lyon **8** (1971), *2*, 39–69.

[7] A. Grothendieck, *Topological vector spaces.* New York London Paris, 1973.

[8] S. Radenovic' and Z. Kadelburg, *Three-spaces-problem for inductively (semi)-reflexive locally convex spaces.* Publ. Inst. Math. **77(91)** (2005), 1–6.

Received 24 May 2017

L'Université d'Etat de Tiraspol,
Chisinau, Moldova
dumitru.botnaru@gmail.com