SYSTÈME D'ÉQUATIONS PARABOLIQUES LINÉAIRES DU TYPE: TEMPÉRATURE ET DENSITÉ DE VAPEUR AVEC L'EFFET DE L'ÉVAPORATION

(LINEAR PARABOLIC EQUATION SYSTEM OF TYPE: TEMPERATURE AND VAPOR DENSITY WITH THE EFFECT OF EVAPORATION)

KHADIDJA HALLACI and HISAO FUJITA YASHIMA

Communicated by Gabriela Marinoschi

On considère un système de deux équations paraboliques linéaires couplées d'une manière particulière et on démontre l'existence et l'unicité de la solution d'abord dans un domaine d'une dimension spatiale et puis dans un domaine dans $\mathbb{R}^3$ délimité par deux plans horizontaux. Cette étude est motivée par le phénomène d'évaporation d'eau de la surface de l'eau liquide, dont dépendent la température et la densité de vapeur.

We consider a system of two linear parabolic equations coupled in a particular way and we prove the existence and uniqueness of the solution, first in a domain of one spatial dimension and then in a domain in $\mathbb{R}^3$ delimited by two horizontal planes. This study is motivated by the phenomenon of evaporation of water from the surface of the liquid water, on which the temperature and the vapor density depend.

AMS 2010 Subject Classification: 35K40, 80A20.

Key words: linear parabolic equation system, heat source concentrated on a hyperplane, discontinuous coefficient, evaporation.

1. INTRODUCTION

Dans le présent travail nous allons étudier un système d'équations paraboliques linéaires couplées par une condition particulière. L'étude est motivée par le phénomène d'évaporation de l'eau de la surface de l'eau liquide, qui, intervenant dans un grand nombre de phénomènes physiques, joue souvent un rôle important à la grande échelle comme l'évaporation de l'eau de la surface de l'océan (voir par exemple [5, 10]) ainsi qu'à l'échelle plus petite ; dans des cas particuliers, des physiciens et des chimistes ont proposé des modèles mathématiques bien articulés des comportements locaux de l'évaporation de l'eau (voir par exemple [6,16,17,20] ; sur la physique de l'évaporation en général, voir aussi [9]). Mais il nous semble que l'étude mathématiques des équations qui décrivent l'évaporation de l'eau et ses effets n'est pas suffisamment développée.

Rappelons les caractéristiques particulières de l'évaporation. Si S est l'intersurface entre l'eau liquide et l'air, l'évaporation de l'eau qui se produit sur la surface S est accompagnée par l'absorption de la chaleur, dite chaleur latente de la transition de phase de H_2O, de sorte qu'il y a une source (négative) de la chaleur concentrée sur la surface S. D'autre part, si on admet la présence de la diffusion de la vapeur d'eau dans l'air, la quantité de l'évaporation devra être proportionnelle à la composante normale à l'intersurface du gradient de la densité de vapeur, tandis que sur S la densité de vapeur doit être celle de la vapeur saturée. Quant à la diffusion de la chaleur, son coefficient ainsi que la chaleur spécifique sont différents dans l'eau liquide et dans l'air. Ces relations physiques, traduites dans les conditions sur les équations de diffusion pour la chaleur et la densité de la vapeur d'eau, constituent les conditions particulières qui ne facilitent pas la résolution des équations.

Dans le présent travail on considère une équation parabolique linéaire pour la fonction inconnue T (température) dans le domaine $\Omega = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \,|\, -b < x_3 < a \,\}$ et une équation parabolique linéaire pour la fonction inconnue Π (densité de vapeur) dans le domaine $\Omega^+ = \{\, x \in \mathbb{R}^3 \,|\, 0 < x_3 < a \,\}$. On suppose que dans l'équation pour T la “source de la chaleur” est concentrée sur $\{x_3 = 0\}$ et proportionnelle à $\frac{1}{\varepsilon_1}\big[\Pi\big|_{x_3=\varepsilon_1} - \Pi\big|_{x_3=0}\big]$ avec un $\varepsilon_1 > 0$, ce qui est analogue à l'approximation souvent utilisée dans les travaux pratiques (voir par exemple [8]) de la loi de Dalton (voir par exemple [1], [18]). On suppose aussi que la fonction Π doit satisfaire à la condition

$$\Pi\big|_{x_3=0} = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T\big|_{x_3=0}$$

avec deux constantes $\overline{\pi}_0$ et $\overline{\alpha}_1$; cette condition est une linéarisation de la relation $\Pi\big|_{x_3=0} = \overline{\pi}_{vs}(T)$ avec la densité de la vapeur saturée $\overline{\pi}_{vs}(T)$ à la température T.

Les équations que nous allons considérer sont linéaires et les méthodes de la résolution des équations de ce type sont bien établies (voir par exemple [2,7, 12,15]). Mais notre problème exige une élaboration non indifférente à cause du couplage particulier mentionné ci-dessus et aussi à cause de la discontinuité du coefficient pour l'équation de la chaleur. Les aspects généraux de cette dernière problématique ont été investigués par plusieurs auteurs (voir par exemple [3,4, 11]), mais nous allons utiliser une autre méthode directement utilisable pour la résolution de notre problème.

2. SYSTÈME D'ÉQUATIONS

Nous précisons d'abord le domaine dans lequel nous considérons notre problème. On pose

$$\Omega = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \,|\, -b < x_3 < a \}, \tag{2.1}$$

où a et b sont deux nombres strictement positifs. Nous définissons aussi la partie inférieure Ω^- et la partie supérieure Ω^+ de Ω,

$$\Omega^- = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \,|\, x_3 < 0 \}, \qquad \Omega^+ = \{ (x_1, x_2, x_3) \in \Omega \,|\, x_3 > 0 \}. \tag{2.2}$$

Dans le domaine Ω nous considérons l'équation

$$c_{v\varrho}\partial_t T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + \psi\delta(x_3), \tag{2.3}$$

tandis que dans le domaine Ω^+ on considère l'équation

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \Delta \Pi. \tag{2.4}$$

Dans les équations (2.3)–(2.4), γ_0 est une constante strictement positive, tandis que

$$c_{v\varrho} = c_{v\varrho}^{(1)}, \quad \kappa = \kappa^{(1)} \quad \text{dans} \quad \Omega^-, \qquad c_{v\varrho} = c_{v\varrho}^{(2)}, \quad \kappa = \kappa^{(2)} \quad \text{dans} \quad \Omega^+, \tag{2.5}$$

$c_{v\varrho}^{(1)}$, $\kappa^{(1)}$, $c_{v\varrho}^{(2)}$, $\kappa^{(2)}$ étant des constantes strictement positives ; le symbole $\delta(x_3)$ dans (2.3) désigne la delta de Dirac par rapport à x_3. Pour ψ nous supposons qu'elle est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ et doit satisfaire à l'équation

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi\big|_{x_3=\varepsilon_1} - \Pi\big|_{x_3=0}}{\varepsilon_1}, \tag{2.6}$$

où γ_1 et ε_1 sont des constantes strictement positives satisfaisant à la condition $0 < \varepsilon_1 < a$.

Pour les fonctions inconnues T et Π nous posons les conditions aux limites

$$T\,|_{x_3=-b} = \overline{T}_{-b}, \qquad T\,|_{x_3=a} = \overline{T}_a, \tag{2.7}$$

$$\Pi\,|_{x_3=0} = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T\,|_{x_3=0}, \tag{2.8}$$

$$\Pi\,|_{x_3=a} = \overline{\Pi}_a, \tag{2.9}$$

et les conditions initiales

$$T\,|_{t=0} = T_0(x) \qquad x \in \Omega, \tag{2.10}$$

$$\Pi\,|_{t=0} = \Pi_0(x) \qquad x \in \Omega^+. \tag{2.11}$$

Dans (2.7)–(2.9), $\overline{T}_{-b}$, $\overline{T}_a$, $\overline{\Pi}_a$, $\overline{\pi}_0$ et $\overline{\alpha}_1$ sont des constantes. Pour $T_0(x)$ et

$\Pi_0(x)$ nous supposons les conditions de compatibilité

$$T_0(-b) = \overline{T}_{-b}, \qquad T_0(a) = \overline{T}_a$$
$$\Pi_0(0) = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T_0(0), \qquad \Pi_0(a) = \overline{\Pi}_a.$$

Avant d'envisager le problème complet (2.3)–(2.11) dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, nous allons démontrer, dans la section 5, l'existence et l'unicité de la solution dans le cas où le domaine se réduit à l'intervalle $]-b, a[\subset \mathbb{R}$, c'est-à-dire, dans le domaine d'une dimension spatiale. Pour le problème complet dans $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, nous démontrons le résultat d'existence et unicité de la solution sous l'hypothèse

$$\frac{c_{v\varrho}^{(1)}}{\kappa^{(1)}} = \frac{c_{v\varrho}^{(2)}}{\kappa^{(2)}}. \tag{2.12}$$

Il est clair que la condition (2.12) est assez restrictive. Mais, comme dans le cas du domaine d'une dimension spatiale le résultat s'obtient sans cette restriction, nous espérons obtenir, dans un futur prochain, un résultat analogue sans supposer la condition (2.12).

3. PRÉLIMINAIRES

Pour résoudre l'équation (2.3) nous aurons besoin d'une version particulière de la série de Fourier, que nous présentons ici dans une forme qui ne fait pas référence spécifique à l'équation (2.3).

Soient L_1 et L_2 deux nombres réels strictement positifs (dans l'application à notre problème on aura $L_1 = b$ et $L_2 = a$). On considère le domaine en une dimension

$$I = \{\, x \in \mathbb{R} \mid -L_1 < x < L_2 \,\}.$$

On considère deux fonctions strictement positives $\nu(x)$ et $\kappa(x)$ constantes dans chacun des sous-intervelles $I_1 =]-L_1, 0[$ et $I_2 =]0, L_2[$

$$\nu(x) = \nu_1 \quad \text{si} \quad x \in I_1, \qquad \nu(x) = \nu_2 \quad \text{si} \quad x \in I_2, \tag{3.1}$$

$$\kappa(x) = \kappa_1 \quad \text{si} \quad x \in I_1, \qquad \kappa(x) = \kappa_2 \quad \text{si} \quad x \in I_2 \tag{3.2}$$

avec des constantes strictement positives ν_1, ν_2, κ_1, κ_2 (on ne suppose pas de condition analogue à (2.12), donc en général $\frac{\nu_1}{\kappa_1} \neq \frac{\nu_2}{\kappa_2}$). Au point $x = 0$, on peut choisir quelconques valeurs de $\nu(0)$ et $\kappa(0)$, donc on peut prendre par exemple

$$\nu(0) = \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}, \qquad \kappa(0) = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2};$$

ce qui n'influence pas le résultat.

Nous allons d'abord construire une série de Fourier relative aux deux espaces de Hilbert

$$L^2_\nu(I) = \{\, u : I \to \mathbb{R},\ \text{mesurables} \mid \int_I \nu(x)|u(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty \,\} \tag{3.3}$$

et

$$\widetilde{H}^1_\kappa(I) = \{\, u \in C(\overline{I};\mathbb{R}) \mid \int_I \kappa(x)|u'(x)|^2 \mathrm{d}x < \infty,\ u(-L_1) = u(L_2) = 0 \,\} \tag{3.4}$$

munis respectivement du produit scalaire

$$\langle u, v\rangle_{L^2_\nu(I)} = \int_I \nu(x)u(x)v(x)\mathrm{d}x, \qquad \langle u, v\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(I)} = \int_I \kappa(x)u'(x)v'(x)\mathrm{d}x,$$

et de la norme

$$\|u\|_{L^2_\nu(I)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{L^2_\nu(I)}}, \qquad \|u\|_{\widetilde{H}^1_\kappa(I)} = \sqrt{\langle u, u\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(I)}}.$$

Définissons pour $\lambda > 0$ les fonctions $\widetilde{\beta}(\lambda)$, $\widetilde{\gamma}(\lambda)$, $\widetilde{h}(\lambda)$ comme suit :

$$\widetilde{\beta}(\lambda) = \mathrm{arctg}\Big(\sqrt{\frac{\kappa_2\nu_2}{\kappa_1\nu_1}}\mathrm{tg}\Big(\sqrt{\frac{\lambda\nu_1}{\kappa_1}}L_1\Big)\Big) \quad \text{si } 0 < \lambda < \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}\frac{\pi^2}{4}, \tag{3.5}$$

$$\widetilde{\beta}(\lambda) = (n - \frac{1}{2})\pi \quad \text{si } \lambda = \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n-\frac{1}{2})^2)\pi^2, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\widetilde{\beta}(\lambda) = (n - \frac{1}{2})\pi + \mathrm{arctg}\Big(\sqrt{\frac{\kappa_2\nu_2}{\kappa_1\nu_1}}\mathrm{tg}\Big(\sqrt{\frac{\lambda\nu_1}{\kappa_1}}L_1\Big)\Big)$$

$$\text{si } \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n-\frac{1}{2})^2)\pi^2 < \lambda < \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n+\frac{1}{2})^2)\pi^2, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

(3.6)

$$\widetilde{\gamma}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\kappa_2\nu_2}}\frac{\cos\Big(\sqrt{\frac{\lambda\nu_1}{\kappa_1}}L_1\Big)}{\cos\widetilde{\beta}(\lambda)} \quad \text{si } \lambda \neq \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n-\frac{1}{2})^2)\pi^2, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\widetilde{\gamma}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{\lambda\kappa_2\nu_2}} \quad \text{si } \lambda = \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n-\frac{1}{2})^2)\pi^2, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

$$\widetilde{h}(\lambda) = \widetilde{\beta}(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda\nu_2}{\kappa_2}}L_2. \tag{3.7}$$

La fonction $\widetilde{h}(\lambda)$ a la propriété suivante.

Lemme 3.1. *La fonction $\widetilde{h}(\lambda)$ définie dans (3.7) est continue et strictement croissante et vérifie les relations*

$$\lim_{\lambda\to 0^+} \widetilde{h}(\lambda) = 0, \qquad \lim_{\lambda\to\infty} \widetilde{h}(\lambda) = \infty. \tag{3.8}$$

Démonstration. Il résulte immédiatement de la définition (3.7) de $\widetilde{h}(\lambda)$ et de la définition (3.5) de $\widetilde{\beta}(\lambda)$. $\square$

Le lemme (3.1) nous permet de définir une suite $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ par

$$\lambda_k = \widetilde{h}^{-1}(k\pi), \qquad k = 1, 2, \cdots . \tag{3.9}$$

En utilisant la suite $\{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$, on va définir les fonctions $e_k(x)$, $k = 1, 2, \cdots$, qui vont former une base orthonormale de l'espace de Hilbert $L^2_\nu(I)$ ayant des propriétés utiles pour résoudre notre problème.

Proposition 3.1. *On pose*

$$e_k(x) = \frac{y_k(x)}{\|y_k\|_{L^2_\nu(I)}}, \tag{3.10}$$

où

$$y_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda_k \kappa_1 \nu_1}} \sin\Big(\sqrt{\frac{\lambda_k \nu_1}{\kappa_1}} L_1 + \sqrt{\frac{\lambda_k \nu_1}{\kappa_1}} x\Big) & \text{si } \ -L_1 \le x \le 0\,, \\ \widetilde{\gamma}(\lambda_k) \sin\big(\widetilde{\beta}(\lambda_k) + \sqrt{\frac{\lambda_k \nu_2}{\kappa_2}} x\big) & \text{si } \ 0 \le x \le L_2\,. \end{cases} \tag{3.11}$$

Alors

(A) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *est une base orthonormale de* $L^2_\nu(I)$ *;*

(B) $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ *est un système orthogonal complet de* $\widetilde{H}^1_\kappa(I)$ *;*

(C) *on a*

$$\|e_k\|^2_{\widetilde{H}^1_\kappa(I)} = \lambda_k;$$

(D)

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\kappa(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e_k(x)) = \lambda_k \nu(x) e_k(x) \qquad \forall x \in]-L_1, 0[\cup]0, L_2[$$

et $\kappa(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e_k(x)$ *est continue sur* $[-L_1, L_2]$ *;*

(E) *on a*

$$\sup_{-L_1<x<L_2} |e_k(x)| \le K_1,$$

$$K_1 = 2\max\Big(\frac{1}{\sqrt{\nu_1\kappa_1}}, \frac{1}{\sqrt{\nu_2\kappa_2}}\Big)\max\Big(\frac{\sqrt{\kappa_1}}{\sqrt{L_1}}, \frac{\sqrt{\kappa_2}}{\sqrt{L_2}}\Big);$$

(F) *on a*

$$M_0(k-1)^2 \le \lambda_k \le M_0(k+1)^2, \qquad M_0 = \Big(\frac{\pi}{L_1\sqrt{\frac{\nu_1}{\kappa_1}} + L_2\sqrt{\frac{\nu_2}{\kappa_2}}}\Big)^2.$$

Comme la démonstration de la proposition 3.1 est un peu longue, nous la renvoyons à la section 9.

4. SOLUTION STATIONNAIRE

En revenant au système d'équations (2.3)–(2.4), nous considérons avant tout la solution stationnaire du système d'équations (2.3)–(2.4) avec les condtions aux limites (2.7)–(2.9) et avec ψ définie dans (2.6). Plus précisément, en écrivant z au lieu de x_3, il s'agit de trouver les fonctions $T(z)$ et $\Pi(z)$ qui satisfont aux équations

$$-\frac{d}{\mathrm{d}z}\big(\kappa\frac{d}{\mathrm{d}z}T\big) = \psi\delta(z) \qquad \text{pour} \quad -b < z < a, \tag{4.1}$$

$$-\gamma_0\frac{d^2}{dz^2}\Pi = 0 \qquad \text{pour} \quad 0 < z < a \tag{4.2}$$

avec ψ définie par

$$\psi = \gamma_1\frac{\Pi\big|_{z=\varepsilon_1} - \Pi\big|_{z=0}}{\varepsilon_1} \tag{4.3}$$

et aux conditions aux limites

$$T\,|_{z=-b} = \overline{T}_{-b}, \qquad T\,|_{z=a} = \overline{T}_a, \tag{4.4}$$

$$\Pi\,|_{z=0} = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T\,|_{z=0}, \tag{4.5}$$

$$\Pi\,|_{z=a} = \overline{\Pi}_a. \tag{4.6}$$

Les deux équations (4.1) et (4.2) sont couplées par la définition (4.3) de ψ et la condition aux limites (4.5).

Pour déterminer la solution du problème (4.1)–(4.6), on introduit la fonction $\overline{T}_c(z)$ continue définie par

$$\overline{T}_c(z) = \begin{cases} \overline{T}_{-b} + \frac{\kappa^{(2)}(\overline{T}_a - \overline{T}_{-b})}{a\kappa^{(1)} + b\kappa^{(2)}}(z+b) & \text{pour} \quad -b < z \leq 0 \\ \overline{T}_a - \frac{\kappa^{(1)}(\overline{T}_a - \overline{T}_{-b})}{a\kappa^{(1)} + b\kappa^{(2)}}(a-z) & \text{pour } 0 \leq z < a \end{cases}, \tag{4.7}$$

pour laquelle $\kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\overline{T}_c(z)$ a la même valeur dans $]-b,0[$ et dans $]0,a[$.

On définit en outre $\overline{\Theta}_0$ par l'égalité

$$\overline{\Theta}_0 = \frac{\gamma_1\overline{A}_0}{a}\big(\overline{\Pi}_a - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_c(0) + \overline{\Theta}_0))\big), \tag{4.8}$$

c'est-à-dire

$$\overline{\Theta}_0 = \frac{\gamma_1\overline{A}_0}{a + \gamma_1\overline{A}_0\overline{\alpha}_1}(\overline{\Pi}_a - \overline{\pi}_0 - \overline{\alpha}_1\overline{T}_c(0)),$$

où

$$\overline{A}_0 = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(e_k(0))^2}{\lambda_k}.$$

On a la proposition suivante.

Proposition 4.1. *La solution du problème* (4.1)–(4.6) *est donnée par*

$$T(z) = \overline{T}_c(z) + \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(z), \qquad c_k^{\Theta} = \gamma_1 \frac{\overline{\Pi}_a - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_c(0) + \overline{\Theta}_0))}{a} \frac{e_k(0)}{\lambda_k}, \tag{4.9}$$

$$\Pi(z) = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_c(0) + \overline{\Theta}_0) + \frac{\overline{\Pi}_a - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_c(0) + \overline{\Theta}_0))}{a} z. \tag{4.10}$$

Nous précisons que la proposition 4.1 ne suppose pas la condition (2.12).

Démonstration. Il est clair que la solution (formelle) du problème (4.2), (4.5), (4.6) est

$$\Pi(z) = \overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(0) + \frac{\overline{\Pi}_a - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(0))}{a} z. \tag{4.11}$$

Donc, en substituant cette relation dans (4.3), on obtient

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi\big|_{z=\varepsilon_1} - \Pi\big|_{z=0}}{\varepsilon_1} = \gamma_1 \frac{\overline{\Pi}_a - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1 T(0))}{a} \equiv \psi_0(T(0)). \tag{4.12}$$

On remarque que $\kappa(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\overline{T}_c(z)$ a une valeur identique dans $]-b, 0[$ et dans $]0, a[$, ce qui nous permet d'écrire

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Big(\kappa(z)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\overline{T}_c(z)\Big) = 0 \qquad \text{dans } \ ]-b, a[\,. \tag{4.13}$$

Nous posons également

$$\Theta(z) = T(z) - \overline{T}_c(z). \tag{4.14}$$

Alors le problème (4.1), (4.4) se réduit à

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(\kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Theta(z)\big) = \psi_0(T(0))\delta(z), \tag{4.15}$$

$$\Theta(-b) = \Theta(a) = 0. \tag{4.16}$$

En posant

$$\Theta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(z)$$

et en intégrant les deux membres de (4.15) multipliés par $e_k(z)$ sur $[-b, a]$, en vertu de (B), (C), (D) de la proposition 3.1, on a

$$\lambda_k c_k^{\Theta} = \int_{-b}^{a} e_k(z)\Big(-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\big(\kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\Theta(z)\big)\Big)\mathrm{d}z = \psi_0(T(0))e_k(0).$$

C'est-à-dire, la solution du problème (4.15)–(4.16) est donnée par

$$\Theta(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^{\Theta} e_k(z), \qquad c_k^{\Theta} = \psi_0(T(0)) \frac{e_k(0)}{\lambda_k}. \tag{4.17}$$

Donc la valeur de $\Theta(0)$ est

$$\Theta(0) = \psi_0(T(0))\overline{A}_0, \qquad \overline{A}_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(e_k(0))^2}{\lambda_k}. \tag{4.18}$$

De (4.12) et de (4.18) on obtient

$$\Theta(0) = \frac{\gamma_1 \overline{A}_0}{a} \big(\overline{\Pi}_a - (\overline{\pi}_0 + \overline{\alpha}_1(\overline{T}_c(0) + \Theta(0)))\big). \tag{4.19}$$

Donc, d'après la définition (4.8) de $\overline{\Theta}_0$, on a

$$\Theta(0) = \overline{\Theta}_0$$

et donc

$$T(0) = \overline{T}_c(0) + \overline{\Theta}_0.$$

En substituant cette expression dans (4.12), (4.17), (4.11), on obtient (4.9) et (4.10). $\square$

5. CAS DU DOMAINE D'UNE DIMENSION SPATIALE

Avant d'envisager le système d'équations (2.3)–(2.4) dans le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ (défini dans (2.1)), considérons le problème réduit à une dimension spatiale. Il s'agit donc du système d'équations

$$c_{v\varrho}\partial_t T = \partial_z(\kappa \partial_z T) + \psi\delta(z) \qquad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times]-b, a[\,, \tag{5.1}$$

$$\partial_t \Pi = \gamma_0 \partial_z^2 \Pi \qquad \text{dans } \mathbb{R}_+ \times]0, a[\,, \tag{5.2}$$

avec

$$\psi = \gamma_1 \frac{\Pi(\varepsilon_1) - \Pi(0)}{\varepsilon_1}; \tag{5.3}$$

les conditions aux limites et initiales sont (2.7)–(2.11), dans lesquelles les fonctions ne dépendent pas de (x_1, x_2). Dans ce problème on ne suppose pas la condition (2.12).

Dans la section précédente nous avons déjà montré l'existence et l'unicité de la solution stationnaire de ce problème, que nous notons $(\overline{T}_{st}(z), \overline{\Pi}_{st}(z))$. Posons

$$\vartheta = \vartheta(t, z) = T(t, z) - \overline{T}_{st}(z), \tag{5.4}$$

$$\eta = \eta(t,z) = \Pi(t,z) - \overline{\Pi}_{st}(z) - \overline{\alpha}_1\vartheta(t,z). \tag{5.5}$$

Comme $\partial_z^2\overline{\Pi}_{st} = 0$ (voir (4.2)), de (5.2) découle

$$\partial_t\eta - \gamma_0\partial_z^2\eta = -\overline{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\partial_z^2\vartheta) \qquad \text{pour } \ 0 < z < a.$$

On remarque que, en vertu de (5.1), (2.5) et (5.4), on a

$$-\overline{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\partial_z^2\vartheta) = -\overline{\alpha}_1\Big(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\varrho}^{(2)}} - \gamma_0\Big)\partial_z^2\vartheta \qquad \text{pour } \ 0 < z < a.$$

Ces relations nous permettent de réduire le système d'équations (5.1)–(5.3) à

$$c_{v\varrho}\partial_t\vartheta - \partial_z(\kappa\partial_z\vartheta) = q\delta(z) \qquad \text{dans } \ ]-b,a[\,, \tag{5.6}$$

$$\partial_t\eta - \gamma_0\partial_z^2\eta = f \qquad \text{dans } \ ]0,a[\,, \tag{5.7}$$

$$q = q(t) = \gamma_1\frac{\eta(t,\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}, \tag{5.8}$$

$$f = -\overline{\alpha}_1\Big(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\varrho}^{(2)}} - \gamma_0\Big)\partial_z^2\vartheta. \tag{5.9}$$

Les conditions aux limites sont

$$\vartheta(t,-b) = \vartheta(t,a) = 0, \qquad \eta(t,0) = \eta(t,a) = 0 \qquad \forall t \geq 0, \tag{5.10}$$

tandis que les conditions initiales sont

$$\vartheta(0,z) = T_0(z) - \overline{T}_{st}(z) \equiv \vartheta_0(z) \qquad \text{pour } \ -b < z < a, \tag{5.11}$$

$$\eta(0,z) = \Pi_0(z) - \overline{\Pi}_{st}(z) - \overline{\alpha}_1\vartheta_0(z) \equiv \eta_0(z) \qquad \text{pour } 0 < z < a. \tag{5.12}$$

Pour les fonctions u définies sur $[-b,a]$, en utilisant les fonctions e_k définies dans (3.10)–(3.11) avec $L_1 = b$, $L_2 = a$, on définit les coefficients de Fourier $\widehat{u}(k)$ et la norme $\|u\|_{H^r_{(-b,a)}}$ par

$$\widehat{u}(k) = \langle u, e_k\rangle_{L^2_{c_{v\varrho}}(-b,a)}, \qquad \|u\|_{H^r_{(-b,a)}} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^r|\widehat{u}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}, \tag{5.13}$$

où $L^2_{c_{v\varrho}}(-b,a)$ est défini comme dans (3.3). D'autre part, pour les fonctions u définies sur $[0,a]$, en utilisant les fonctions $g_k(z) = \sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi}{a}kz)$ on définit

$$\widehat{u}(k) = \langle u, g_k\rangle_{L^2(0,a)}, \qquad \|u\|_{H^r_{(0,a)}} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty}k^{2r}|\widehat{u}(k)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{5.14}$$

Proposition 5.1. *Soit* $1 < r < \frac{3}{2}$. *Supposons que* $\vartheta_0 \in H^{r-1}_{(-b,a)}$ *et* $\eta_0 \in H^{r-1}_{(0,a)}$. *Alors, quel que soit* $\bar{t} > 0$, *il existe une solution* (ϑ, η) *et une seule du problème* (5.6)–(5.12) *dans la classe*

$$\vartheta \in L^\infty(0, \bar{t}; H^{r-1}_{(-b,a)}) \cap L^2(0, \bar{t}; H^r_{(-b,a)}),$$

$$\eta \in L^\infty(0, \bar{t}; H^{r-1}_{(0,a)}) \cap L^2(0, \bar{t}; H^r_{(0,a)}). \tag{5.15}$$

Démonstration. En utilisant les coefficients de Fourier définis dans (5.13)–(5.14) (même si on utilise le même symbole $\widehat{u}(k)$ pour les deux sens différents, il n'est pas difficile de les distinguer du contexte), on peut transformer les équations (5.6)–(5.7) en

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{\vartheta}(t,k) + \lambda_k \widehat{\vartheta}(t,k) = q(t) e_k(0), \tag{5.16}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\widehat{\eta}(t,k) + \gamma_0 \frac{\pi^2}{a^2} k^2 \widehat{\eta}(t,k) = \widehat{f}(t,k). \tag{5.17}$$

En multipliant les deux membres de (5.16) par $\lambda_k^{r-1}\widehat{\vartheta}(t,k)$, on a

$$\frac{1}{2}\partial_t \lambda_k^{r-1} \widehat{\vartheta}^2(t,k)) + \lambda_k^r \widehat{\vartheta}^2(t,k) = \lambda_k^{r-1}\widehat{\vartheta}(t,k) q(t) e_k(0).$$

Comme

$$|e_k(0)| \leq K_1 \qquad \forall k \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$$

(voir (E) de la proposition 3.1), on a

$$\lambda_k^{r-1}\widehat{\vartheta}(t,k) q(t) e_k(0) \leq \frac{1}{2}\lambda_k^r |\widehat{\vartheta}(t,k)|^2 + \frac{K_1^2}{2}\lambda_k^{r-2}|q(t)|^2.$$

Or, comme $r - 2 < -\frac{1}{2}$, en vertu de (F) de la proposition 3.1 on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^{r-2} \equiv K_\lambda < \infty.$$

On en déduit que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\vartheta\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}} + \|\vartheta\|^2_{H^r_{(-b,a)}} \leq K_1^2 K_\lambda |q(t)|^2.$$

Quant à $|q(t)|^2$, on a

$$|q(t)|^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}|\eta(t,\varepsilon_1)|^2 = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2}\Big|\sum_{k=1}^{\infty}\widehat{\eta}(t,k)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi}{a}k\varepsilon_1)\Big|^2 \leq$$

$$\leq K_q \sum_{k=1}^{\infty} k^{2r-1} |\widehat{\eta}(t,k)|^2 = K_q \|\eta(t,\cdot)\|^2_{H^{r-\frac{1}{2}}_{(0,a)}},$$

où

$$K_q = \frac{2\gamma_1^2}{a\varepsilon_1^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r-1}} < \infty.$$

En adjoignant les deux inégalités, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\vartheta\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}} + \|\vartheta\|^2_{H^r_{(-b,a)}} \leq K_1^2 K_\lambda K_q \|\eta\|^2_{H^{r-\frac{1}{2}}_{(0,a)}}. \tag{5.18}$$

D'autre part, si on multiplie les deux membres de (5.17) par $k^{2r-2}\widehat{\eta}(t,k)$ et on fait la somme par rapport à k, on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}} + \gamma_0 \frac{\pi^2}{a^2} \|\eta\|^2_{H^r_{(0,a)}} \leq K_2 \|f(t,\cdot)\|^2_{H^{r-2}_{(0,a)}}, \tag{5.19}$$

où

$$K_2 = \frac{1}{\gamma_0} \frac{a^2}{\pi^2}.$$

Si on définit

$$\widetilde{\vartheta} = e^{-\omega t}\vartheta, \qquad \widetilde{\eta} = e^{-\omega t}\eta, \qquad \widetilde{q} = e^{-\omega t} q, \qquad \widetilde{f} = e^{-\omega t} f \tag{5.20}$$

avec un $\omega > 0$ (à choisir dans la suite), de (5.6)–(5.7) on obtient

$$c_{v\varrho}\partial_t\widetilde{\vartheta} - \partial_z(\kappa\partial_z\widetilde{\vartheta}) + \omega c_{v\varrho}\widetilde{\vartheta} = \widetilde{q}\delta(z) \qquad \text{dans } \ ]-b,a[\,, \tag{5.21}$$

$$\partial_t\widetilde{\eta} - \gamma_0\partial_z^2\widetilde{\eta} + \omega\widetilde{\eta} = \widetilde{f} \qquad \text{dans } \ ]0,a[\,. \tag{5.22}$$

En procédant d'une manière tout analogue à l'obtention de (5.18)–(5.19), de (5.21)–(5.22) on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}} + \|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^r_{(-b,a)}} + 2\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}} \leq K_1^2 K_\lambda K_q \|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{r-\frac{1}{2}}_{(0,a)}}, \tag{5.23}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}} + \gamma_0 \frac{\pi^2}{a^2}\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^r_{(0,a)}} + 2\omega\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}} \leq K_2 \|\widetilde{f}\|^2_{H^{r-2}_{(0,a)}}. \tag{5.24}$$

Soit $\overline{\vartheta}$ une fonction appartenant à la classe

$$Y_\vartheta = L^\infty(0,\overline{t}; H^{r-1}_{(-b,a)}) \cap L^2(0,\overline{t}; H^r_{(-b,a)}). \tag{5.25}$$

Alors, en substituant $\overline{\vartheta}$ à la place de ϑ dans la définition (5.9) de f, on définit $\overline{f}$, qui appartiendra à $L^2(0,\overline{t}; H^{r-2}_{(0,a)})$. En substituant $\overline{f}$ à la place de f dans

(5.7), on peut résoudre l'équation (5.7) (avec $\overline{f}$) et on obtient

$$\eta \in L^\infty(0,\bar{t}; H^{r-1}_{(0,a)}) \cap L^2(0,\bar{t}; H^r_{(0,a)})$$

(voir (5.19)). Ensuite, en définissant q par (5.8), on résout l'équation (5.6) et on obtient ϑ, qui, en vertu de (5.18), apprtient à la classe Y_ϑ. C'est-à-dire, on a définit un opérateur G_1 qui, à $\overline{\vartheta} \in Y_\vartheta$, associe la solution $\vartheta \in Y_\vartheta$ de l'équation (5.6).

Si on définit $\overline{\widetilde{f}} = e^{-\omega t}\,\overline{f}$ et si on rappelle la définition de $\overline{f}$, on voit aisément qu'il existe une constante K_f telle que

$$\|\overline{\widetilde{f}}\|^2_{H^{r-2}_{(0,a)}} \leq K_f \|\overline{\widetilde{\vartheta}}\|^2_{H^r_{(-b,a)}}. \tag{5.26}$$

Considérons maintenant deux fonctions $\overline{\vartheta}_1$ et $\overline{\vartheta}_2$ appartenant à la classe Y_ϑ. En définissant $\overline{\widetilde{\vartheta}}_1$, $\overline{\widetilde{\vartheta}}_2$, $\widetilde{\vartheta}_1$, $\widetilde{\vartheta}_2$, $\widetilde{\eta}_1$, $\widetilde{\eta}_2$ de la manière indiquée ci-dessus, on pose

$$\widetilde{\Theta} = \widetilde{\vartheta}_1 - \widetilde{\vartheta}_2, \qquad \widetilde{H} = \widetilde{\eta}_1 - \widetilde{\eta}_2, \qquad \overline{\widetilde{\Theta}} = \overline{\widetilde{\vartheta}}_1 - \overline{\widetilde{\vartheta}}_2.$$

Comme les équations (5.21)–(5.22) sont linéaires, de la même manière que (5.23)–(5.24) et (5.26) on obtient

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}} + \|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^r_{(-b,a)}} + 2\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}} \leq K_1^2 K_\lambda K_q \|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-\frac{1}{2}}_{(0,a)}}, \tag{5.27}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}} + \gamma_0\frac{\pi^2}{a^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^r_{(0,a)}} + 2\omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}} \leq K_2 K_f \|\overline{\widetilde{\Theta}}\|^2_{H^r_{(0,a)}}. \tag{5.28}$$

Comme $\lambda^{2r-1} \leq \delta\lambda^{2r} + \frac{1}{4\delta}\lambda^{2r-2}$ et donc $\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-\frac{1}{2}}_{(0,a)}} \leq \delta\|\widetilde{H}\|^2_{H^r_{(0,a)}} + \frac{1}{4\delta}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}}$ pour tout $\delta > 0$, en multipliant les deux membres de (5.27) par une constante Λ à déterminer et en faisant la somme de ces deux inégalités, on obtient

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}} + \|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}}\big) + \Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^r_{(-b,a)}} + \\ +\gamma_0\frac{\pi^2}{a^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^r_{(0,a)}} + 2\Lambda\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}} + 2\omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}} \leq \\ \leq \delta\Lambda K_1^2 K_\lambda K_q\|\widetilde{H}\|^2_{H^r_{(0,a)}} + \frac{\Lambda}{4\delta}K_1^2K_\lambda K_q\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}} + K_2K_f\|\overline{\widetilde{\Theta}}\|^2_{H^r_{(-b,a)}}.\end{gathered} \tag{5.29}$$

Si on choisit $\Lambda = 2K_2K_f$, $\delta = \frac{\gamma_0\pi^2}{2\Lambda a^2 K_1^2 K_\lambda K_q}$, $\omega = \frac{\Lambda}{4\delta}K_1^2K_\lambda K_q$, l'inégalité (5.29) se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}}+\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}}\big)+\Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{r}_{(-b,a)}}+\gamma_0\frac{\pi^2}{2a^2}\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r}_{(0,a)}}+$$

$$(5.30)\qquad +2\Lambda\omega\|\widetilde{\Theta}\|^2_{H^{r-1}_{(-b,a)}}+\omega\|\widetilde{H}\|^2_{H^{r-1}_{(0,a)}}\leq\frac{\Lambda}{2}\|\widetilde{\widetilde{\Theta}}\|^2_{H^{r}_{(-b,a)}}.$$

L'inégalité (5.30) implique que l'approximation successive $\widetilde{\vartheta}_{(n)}$, $n=1,2,\cdots$, pour le problème (5.21)–(5.22) (avec les conditions initiales (5.11)–(5.12) pour tout n avec $\vartheta_0\in H^{r-1}_{(-b,a)}$ et $\eta_0\in H^{r-1}_{(0,a)}$) converge dans l'espace de Banach $\widetilde{Y}_\vartheta$ muni de la norme

$$\|\widetilde{\vartheta}\|_{\widetilde{Y}_\vartheta}=\Big(\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};H^{r-1}_{(-b,a)})}+\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^{r}_{(-b,a)})}+2\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^{r-1}_{(-b,a)})}\Big)^{1/2}.$$

Comme les équations sont linéaires, la limite $\widetilde{\vartheta}$ de l'approximation successive $\widetilde{\vartheta}_{(n)}$ sera la solution du problème (5.21)–(5.22) (et, par sa construction, donnera aussi $\widetilde{\eta}$). En posant $\vartheta=e^{\omega t}\widetilde{\vartheta}$, $\eta=e^{\omega t}\widetilde{\eta}$, on voit aisément que (ϑ,η) sera la solution du problème (5.6)–(5.12). Leur appartenance aux classes (5.15) résulte des estimations établies ci-dessus. $\square$

La solution (ϑ,η) du problème (5.6)–(5.12) étant trouvée, par les égalités (5.4)–(5.5) on peut construire les fonctions $T(t,z)$ et $\Pi(t,z)$ qui satisfont aux équations (5.1)–(5.3) et aux conditions (2.7)–(2.11).

6. TRANSFORMATION DES ÉQUATIONS

Dans le cas où le domaine en considération est $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ défini dans (2.1), nous allons démontrer notre résultat sous hypothèse (2.12). Dans la démonstration, même si nous suivons l'idée générale adoptée dans le cas du domaine d'une dimension spatiale, la structure des équations aux dérivées partielles dans un domaine de dimension 3 exige une élaboration technique non indifférente.

De manière analogue à (5.4)–(5.5), nous posons

$$(6.1)\qquad \vartheta=\vartheta(t,x)=T(t,x)-\overline{T}_{st}(x_3),$$

$$(6.2)\qquad \eta=\eta(t,x)=\Pi(t,x)-\overline{\Pi}_{st}(x_3)-\overline{\alpha}_1\vartheta(t,x).$$

Comme $\Delta\overline{\Pi}_{st}=0$ (voir (4.2)), de (2.4) s'obtient

$$\partial_t\eta-\gamma_0\Delta\eta=-\overline{\alpha}_1(\partial_t\vartheta-\gamma_0\Delta\vartheta)\qquad\text{dans }\Omega^+.$$

Or, de (2.3), de (2.5) et de (6.1) on déduit que

$$-\overline{\alpha}_1(\partial_t\vartheta - \gamma_0\Delta\vartheta) = -\overline{\alpha}_1\Big(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\varrho}^{(2)}} - \gamma_0\Big)\Delta\vartheta \qquad \text{dans } \Omega^+.$$

Ainsi on peut réduire le problème (2.3)–(2.9) au système d'équations

$$c_{v\varrho}\partial_t\vartheta - \nabla\cdot\kappa\nabla\vartheta = q\delta(x_3) \qquad \text{dans } \Omega, \tag{6.3}$$

$$\partial_t\eta - \gamma_0\Delta\eta = f \qquad \text{dans } \Omega^+, \tag{6.4}$$

avec les conditions aux limites

$$\vartheta\,|_{x_3=-b} = \vartheta\,|_{x_3=a} = 0, \qquad \eta\,|_{x_3=0} = \eta\,|_{x_3=a} = 0, \tag{6.5}$$

et les conditions initiales

(6.6)

$$\vartheta\,|_{t=0} = T_0 - \overline{T}_{st} \equiv \vartheta_0 \quad \text{dans } \Omega, \qquad \eta\,|_{t=0} = \Pi_0 - \overline{\Pi}_{st} - \overline{\alpha}_1\vartheta_0 \equiv \eta_0 \quad \text{dans } \Omega^+,$$

où

$$q = q(t,x_1,x_2) = \gamma_1\frac{\eta(t,x_1,x_2,\varepsilon_1)}{\varepsilon_1}, \tag{6.7}$$

$$f = -\overline{\alpha}_1\Big(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\varrho}^{(2)}} - \gamma_0\Big)\Delta\vartheta. \tag{6.8}$$

On rappelle que, comme $\eta\Big|_{x_3=0} = 0$, on a

$$q = \gamma_1\frac{\eta|_{x_3=\varepsilon_1}}{\varepsilon_1} = \gamma_1\frac{\eta|_{x_3=\varepsilon_1} - \eta|_{x_3=0}}{\varepsilon_1},$$

ce qui fait correspondre (6.7) à (2.6).

Pour obtenir des estimations utiles à la démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution, nous allons utiliser la transformée de Fourier en (x_1, x_2) et le développement en série de Fourier par rapport à x_3. En rappelant (2.12), nous réécrivons l'équation (6.3) dans la forme

$$c_{v\varrho}\partial_t\vartheta - hc_{v\varrho}\big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\big)\vartheta - \frac{\partial}{\partial x_3}\big(\kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\vartheta\big) = q\delta(x_3), \tag{6.9}$$

où

$$h = \frac{\kappa^{(1)}}{c_{v\varrho}^{(1)}} = \frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\varrho}^{(2)}}.$$

Comme en vertu de la proposition 3.1 on a

$$-\int_{-b}^{a} e_k(x_3)\frac{\partial}{\partial x_3}\Big(\kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\vartheta(x_3)\Big) = \lambda_k\langle e_k, \vartheta\rangle_{L^2_{c_{v\varrho}}(-b,a)},$$

en faisant le produit scalaire des deux membres de l'équation (6.9) avec $e_k(\cdot)$, de leur transformée de Fourier par rapport à $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ on obtient

$$\partial_t \widehat{\vartheta}(t,\xi,k) + \big(h|\xi|^2 + \lambda_k\big)\widehat{\vartheta}(t,\xi,k) = \widehat{q}(t,\xi)e_k(0), \tag{6.10}$$

où $\xi = (\xi_1, \xi_2)$, $|\xi|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2$ et

$$\widehat{\vartheta}(t,\xi,k) = \mathcal{F}_{(x_1,x_2)}\langle e_k, \vartheta\rangle_{L^2_{c_{v\varrho}}(-b,a)}, \qquad \widehat{q}(t,\xi) = \mathcal{F}_{(x_1,x_2)}q,$$

$\mathcal{F}_{(x_1,x_2)}(\cdot)$ étant la transformée de Fourier par rapport à (x_1, x_2).

D'autre part, en exprimant les deux membres de l'équation (6.4) en la transformée de Fourier par rapport à (x_1, x_2) et en le développement en série de Fourier par rapport à x_3 sur la base $\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi}{a}kx_3)\}_{k=1}^\infty$, on a

$$\partial_t \widehat{\eta}(t,\xi,k) + \gamma_0\Big(|\xi|^2 + \frac{\pi^2}{a^2}k^2\Big)\widehat{\eta}(t,\xi,k) = \widehat{f}(t,\xi,k). \tag{6.11}$$

Ici et dans la suite, pour ne pas alourdir les notations, nous désignons par le même symbole $\widehat{\ }$ la transformée de Fourier par rapport à x_1 et x_2 ainsi que le développement en série de Fourier par rapport à x_3 d'une fonction sur la base $\{e_k\}_{k=1}^\infty$ et sur la base $\{\sqrt{\frac{2}{a}}\sin(\frac{\pi}{a}kx_3)\}_{k=1}^\infty$. Même si le symbole $\widehat{\ }$ désigne différentes transformations, il ne sera pas difficile de comprendre du contexte ce qu'il signifie.

Pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution du problème (6.3)–(6.6), nous posons

$$\widetilde{\vartheta} = e^{-\omega t}\vartheta, \qquad \widetilde{\eta} = e^{-\omega t}\eta, \qquad \widetilde{q} = e^{-\omega t}q, \qquad \widetilde{f} = e^{-\omega t}f \tag{6.12}$$

avec une constante $\omega > 0$, que nous allons choisir dans la suite. Alors on a

$$c_{v\varrho}\partial_t\widetilde{\vartheta} - hc_{v\varrho}\big(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\big)\widetilde{\vartheta} - \frac{\partial}{\partial x_3}\big(\kappa\frac{\partial}{\partial x_3}\widetilde{\vartheta}\big) + \omega c_{v\varrho}\widetilde{\vartheta} = \widetilde{q}\delta(x_3) \quad \text{dans } \Omega, \tag{6.13}$$

$$\partial_t\widetilde{\eta} - \gamma_0\Delta\widetilde{\eta} + \omega\widetilde{\eta} = \widetilde{f} \qquad \text{dans } \Omega^+. \tag{6.14}$$

En outre, de manière analogue à (6.10)–(6.11) on a

$$\partial_t\widehat{\widetilde{\vartheta}}(t,\xi,k) + \big(h|\xi|^2 + \lambda_k\big)\widehat{\widetilde{\vartheta}}(t,\xi,k) + \omega\widehat{\widetilde{\vartheta}}(t,\xi,k) = \widehat{\widetilde{q}}(t,\xi)e_k(0), \tag{6.15}$$

$$\partial_t\widehat{\widetilde{\eta}}(t,\xi,k) + \gamma_0\Big(|\xi|^2 + \frac{\pi^2}{a^2}k^2\Big)\widehat{\widetilde{\eta}}(t,\xi,k) + \omega\widehat{\widetilde{\eta}}(t,\xi,k) = \widehat{\widetilde{f}}(t,\xi,k). \tag{6.16}$$

7. ESPACES FONCTIONNELS ET ESTIMATIONS

Nous introduisons les espaces fonctionnels que nous allons utiliser pour montrer l'existence et l'unicité de la solution de notre problème.

Pour les fonctions définies sur $\mathbb{R}^2$ nous utilisons les espaces de Sobolev usuels $H^s(\mathbb{R}^2)$ munis de la norme

$$\|u\|_{H^s(\mathbb{R}^2)} = \Big(\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^s |\widehat{u}(\xi)|^2 \mathrm{d}\xi \Big)^{1/2}. \tag{7.1}$$

Pour les fonctions définies sur $\Omega^+ = \mathbb{R}^2 \times]0,a[$ nous définissons les espaces $H^{s,r}(\Omega^+)$ par la norme

$$\|u\|_{H^{s,r}(\Omega^+)} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \big(1+|\xi|^2\big)^{s-r} (1+|\xi|^2+k^2)^r |\widehat{u}(\xi,k)|^2 \mathrm{d}\xi \Big)^{1/2}, \tag{7.2}$$

tandis que pour les fonctions définies sur $\Omega = \mathbb{R}^2 \times]-b,a[$ nous définissons les espaces $H^{s,r}(\Omega)$ par la norme

$$\|u\|_{H^{s,r}(\Omega)} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^2} \big(1+|\xi|^2\big)^{s-r} \big(1+|\xi|^2+\lambda_k\big)^r |\widehat{u}(\xi,k)|^2 \mathrm{d}\xi \Big)^{1/2}, \tag{7.3}$$

où λ_k sont les nombres définis dans (3.9) (avec $L_1 = b$ et $L_2 = a$).

Cela étant, nous considérons deux nombres réels r et s satisfaisant aux conditions

$$1 < r < \frac{3}{2}, \qquad s \geq r. \tag{7.4}$$

On va utiliser les espaces $H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)$, $H^{s-1,r-1}(\Omega)$, etc..., qui sont définis selon (7.1)–(7.3) (avec la substitution de $s-\frac{3}{2}$ au lieu du nombre générique s, etc...). La motivation de l'introduction des espaces $H^{s,r}(\Omega^+)$ et $H^{s,r}(\Omega)$ avec $s \geq r$ est que pour l'interprétation physique il est important d'avoir la bornitude de la restriction à $\{x_3 = 0\}$ de la température T, qui sera obtenue en supposant que $\frac{5}{2} > s$.

Dans la suite nous allons établir des estimations de la solution ϑ de l'équation (6.3) (ou (6.9)) et de la solution η de l'équation (6.4), estimations en fonction de q et de f considérées à titre provisoire comme données. Puis, on établira aussi des estimations de q et de f définies par (6.7) et (6.8). Pour leur démonstration, nous allons utiliser l'idée du théorème de trace illustrée dans [13]. Toutefois, comme nous utilisons des espaces de Sobolev non usuels, nous démontrons les inégalités d'une manière directe sans recourir aux résultats connus des théorèmes de trace.

Lemme 7.1. *Soit ϑ une fonction satisfaisant à l'équation* (6.9) *et à la première condition de* (6.5)*. Soient $\widetilde{\vartheta}$ et $\widetilde{q}$ les fonctions définies dans* (6.12)*. On suppose que $q \in L^2(0,\bar{t}; H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2))$. Alors on a*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\vartheta\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega)} + c_1\|\vartheta\|^2_{H^{s,r}(\Omega)} \leq \widetilde{C}_1\|q\|^2_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)}, \tag{7.5}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega)}+c_1\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s,r}(\Omega)}+2\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega)}\leq \widetilde{C}_1\|\widetilde{q}\|^2_{H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)},\tag{7.6}$$

où

$$c_1=\frac{\lambda_1}{1+\lambda_1},\qquad \widetilde{C}_1=\frac{K_1^2}{c_1}\Big(1+\frac{2^{2-r}}{(3-2r)\sqrt{M_0}}\Big).\tag{7.7}$$

Démonstration. On multiplie les deux membres de (6.10) par $(1+|\xi|^2)^{s-r}$ $(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-1}\widehat{\vartheta}(t,\xi,k)$, de sorte que l'on obtient

$$\frac{1}{2}\partial_t((1+|\xi|^2)^{s-r}(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-1}\widehat{\vartheta}^2(t,\xi,k))+$$
$$+(1+|\xi|^2)^{s-r}(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-1}(h|\xi|^2+\lambda_k)\widehat{\vartheta}^2(t,\xi,k)=$$
$$=(1+|\xi|^2)^{s-r}(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-1}\widehat{\vartheta}(t,\xi,k)\widehat{q}(t,\xi)e_k(0).\tag{7.8}$$

Comme $\lambda_1>0$ (voir (3.9)), on a

$$c_1(1+h|\xi|^2+\lambda_k)\leq h|\xi|^2+\lambda_k.\tag{7.9}$$

D'autre part, d'après (E) de la proposition 3.1 on a

$$|e_k(0)|\leq K_1\qquad \forall k\in\mathbb{N}\backslash\{0\}.$$

On a donc

$$(1+|\xi|^2)^{s-r}(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-1}\widehat{\vartheta}(t,\xi,k)\widehat{q}(t,\xi)e_k(0)\leq$$
$$\leq\frac{c_1}{2}(1+|\xi|^2)^{s-r}(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r}|\widehat{\vartheta}(t,\xi,k)|^2+$$
$$+\frac{K_1^2}{2c_1}(1+|\xi|^2)^{s-r}(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-2}|\widehat{q}(t,\xi)|^2.$$

Comme $r-2<0$, on a

$$(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-2}\leq 2^{2-r}(\sqrt{1+h|\xi|^2}+\sqrt{\lambda_k})^{2r-4}.$$

Donc, en vertu de (F) de la proposition 3.1 on a

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-2}\leq(1+h|\xi|^2+\lambda_1)^{r-2}+\Big(\frac{2}{M_0}\Big)^{2-r}\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\sqrt{1+h|\xi|^2}}{\sqrt{M_0}}+k\Big)^{2r-4};$$

on a en outre

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{\sqrt{1+h|\xi|^2}}{\sqrt{M_0}}+k\Big)^{2r-4}\leq$$
$$\leq\int_0^{\infty}\Big(\frac{\sqrt{1+h|\xi|^2}}{\sqrt{M_0}}+x\Big)^{2r-4}\mathrm{d}x=\frac{1}{3-2r}\Big(\frac{1+h|\xi|^2}{M_0}\Big)^{r-\frac{3}{2}}$$

et

$$(1+h|\xi|^2+\lambda_1)^{r-2}\leq(1+h|\xi|^2)^{r-\frac{3}{2}}.$$

On a donc

$$\sum_{k=1}^{\infty}(1+h|\xi|^2+\lambda_k)^{r-2} \le \big(1+\frac{2^{2-r}}{(3-2r)\sqrt{M_0}}\big)(1+h|\xi|^2)^{r-\frac{3}{2}}. \tag{7.10}$$

En intégrant par rapport à $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ les deux membres de (7.8) et en faisant leur somme par rapport à k (voir aussi les définitions (7.1), (7.3)), compte tenu des relations (7.9)–(7.10), on obtient (7.5).

L'inégalité (7.6) s'obtient d'une manière tout analogue (voir (6.15)). □

LEMME 7.2. *Soit η une fonction satisfaisant à l'équation* (6.4) *et à la seconde condition de* (6.5). *Soient $\widetilde{\eta}$ et $\widetilde{f}$ les fonctions définies dans* (6.12). *On suppose que $f\in L^2(0,\bar{t};H^{s-2,r-2}(\Omega^+))$. Alors il existe une constante $\widetilde{C}_3>0$ telle que*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\eta\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}+\gamma_0 c_2\|\eta\|^2_{H^{s,r}(\Omega^+)} \le \widetilde{C}_3\|f\|^2_{H^{s-2,r-2}(\Omega^+)}, \tag{7.11}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}+\gamma_0 c_2\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s,r}(\Omega^+)}+2\omega\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)} \le \widetilde{C}_3\|\widetilde{f}\|^2_{H^{s-2,r-2}(\Omega^+)} \tag{7.12}$$

(une expression explicite de $\widetilde{C}_3$ est donnée à la fin de la démonstration).

Démonstration. On multiplie les deux membres de (6.11) par $(1+|\xi|^2)^{s-r}$ $(1+|\xi|^2+k^2)^{r-1}\widehat{\eta}(t,\xi,k)$, de sorte que l'on obtient

$$\frac{1}{2}\partial_t((1+|\xi|^2)^{s-r}(1+|\xi|^2+k^2)^{r-1}\widehat{\eta}^2(t,\xi,k))+$$

$$+\gamma_0(1+|\xi|^2)^{s-r}(1+|\xi|^2+k^2)^{r-1}(|\xi|^2+\frac{\pi^2}{a^2}k^2)\widehat{\eta}^2(t,\xi,k)=$$

$$=(1+|\xi|^2)^{s-r}(1+|\xi|^2+k^2)^{r-1}\widehat{\eta}(t,\xi,k)\widehat{f}(t,\xi,k). \tag{7.13}$$

On rappelle les inégalités

$$c_2(1+|\xi|^2+k^2)\le |\xi|^2+\frac{\pi^2}{a^2}k^2, \qquad c_2=\min\big(1,\frac{\pi^2}{2a^2}\big),$$

$$(1+|\xi|^2+k^2)^{r-1}\widehat{\eta}(t,\xi,k)\widehat{f}(t,\xi,k)\le$$

$$\le\frac{c_2\gamma_0}{2}(1+|\xi|^2+k^2)^{r}|\widehat{\eta}(t,\xi,k)|^2+\frac{1}{2c_2\gamma_0}(1+|\xi|^2+k^2)^{r-2}|\widehat{f}(t,\xi,k)|^2.$$

Si on substitue ces inégalités dans l'égalité (7.13) et en fait l'intégrale par rapport à $\xi=(\xi_1,\xi_2)$ et la somme par rapport à k, en raisonnant de manière analogue à la démonstration du lemme 7.1, on obtient (7.11) avec $\widetilde{C}_3=\dfrac{1}{c_2\gamma_0}$.

L'inégalité (7.12) s'obtient d'une manière tout analogue (voir (6.16)). □

LEMME 7.3. *Soient q, $\widetilde{q}$ et $\widetilde{\eta}$ les fonctions définies dans* (6.7) *et* (6.12). *Alors, quel que soit $\delta > 0$, il existe une constante C_δ telle qu'on ait*

$$\|q\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} \le \delta \|\eta\|^2_{H^{s,r}(\Omega^+)} + C_\delta \|\eta\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}, \tag{7.14}$$

$$\|\widetilde{q}\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} \le \delta \|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s,r}(\Omega^+)} + C_\delta \|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}. \tag{7.15}$$

Démonstration. Comme

$$\widehat{\eta}(t,\xi,\varepsilon_1) = \sum_{k=1}^{\infty} \widehat{\eta}(t,\xi,k)\sqrt{\frac{2}{a}}\sin\big(\frac{\pi k}{a}\varepsilon_1\big), \qquad \xi = (\xi_1,\xi_2),$$

on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{s-1} |\widehat{\eta}(t,\xi,\varepsilon_1)|^2 \mathrm{d}\xi \le \frac{2}{a}\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{s-1} \Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{\eta}(t,\xi,k)|\Big)^2 \mathrm{d}\xi.$$

On remarque que

$$\Big(\sum_{k=1}^{\infty} |\widehat{\eta}(t,\xi,k)|\Big)^2 \le \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+|\xi|^2+k^2)^{r-\frac{1}{2}}}\Big) \sum_{k=1}^{\infty} (1+|\xi|^2+k^2)^{r-\frac{1}{2}} |\widehat{\eta}(t,\xi,k)|^2$$

et que l'on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1+|\xi|^2+k^2)^{r-\frac{1}{2}}} \le \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{r-\frac{1}{2}}}{(1+|\xi|^2+k^2)^{2r-1}} \le$$

$$\le \int_0^\infty \frac{2^{r-\frac{1}{2}}}{(\sqrt{1+|\xi|^2}+x)^{2r-1}} \mathrm{d}x = \frac{2^{r-\frac{1}{2}}}{(2r-2)(1+|\xi|^2)^{r-1}}.$$

On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{s-1} |\widehat{\eta}(t,\xi,\varepsilon_1)|^2 \mathrm{d}\xi \le$$

$$\le \frac{2\cdot 2^{r-\frac{1}{2}}}{a(2r-2)} \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1+|\xi|^2+k^2)^{r-\frac{1}{2}} |\widehat{\eta}(t,\xi,k)|^2 \mathrm{d}\xi \le$$

$$\le \frac{2^{r+\frac{1}{2}}}{a(2r-2)} \Big(\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1+|\xi|^2+k^2)^{r} |\widehat{\eta}(t,\xi,k)|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2} \times$$

$$\times \Big(\int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1+|\xi|^2+k^2)^{r-1} |\widehat{\eta}(t,\xi,k)|^2 \mathrm{d}\xi\Big)^{1/2}.$$

Par conséquent on a

$$\|q\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} = \frac{\gamma_1^2}{\varepsilon_1^2} \|\eta(t,\cdot,\cdot,\varepsilon_1)\|^2_{H^{s-1}(\mathbb{R}^2)} \le$$

$$\le \delta \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1+|\xi|^2+k^2)^{r} |\widehat{\eta}(t,\xi,k)|^2 \mathrm{d}\xi +$$

$$+C_\delta \int_{\mathbb{R}^2} (1+|\xi|^2)^{s-r} \sum_{k=1}^{\infty} (1+|\xi|^2+k^2)^{r-1} |\widehat{\eta}(t,\xi,k)|^2 \mathrm{d}\xi,$$

où

$$C_\delta = \frac{2^{2r+1}\gamma_1^4}{4\delta a^2(2r-2)^2\varepsilon_1^4}.$$

On en déduit (7.14).

L'inégalité (7.15) s'obtient de la même manière. □

L'estimation de f définie par (6.8) que nous allons utiliser résultera immédiatement de (6.8) et sera mentionnée directement dans la section suivante.

8. EXISTENCE ET UNICITÉ DE LA SOLUTION

Comme nous avons transformé le problème (2.3)–(2.9) pour (T,Π) en le problème (6.3)–(6.6) pour (ϑ,η), le problème se réduit à démontrer la proposition suivante.

PROPOSITION 8.1. *Supposons que* $\vartheta_0 \in H^{s-1,r-1}(\Omega)$ *et* $\eta_0 \in H^{s-1,r-1}(\Omega^+)$. *Alors, quel que soit* $\bar{t}>0$, *il existe une solution* (ϑ,η) *et une seule du problème* (6.3)–(6.6) *dans la classe*

$$\vartheta \in L^\infty(0,\bar{t};H^{s-1,r-1}(\Omega)) \cap L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega)),$$

$$\eta \in L^\infty(0,\bar{t};H^{s-1,r-1}(\Omega^+)) \cap L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega^+)). \tag{8.1}$$

Démonstration. Soit $\overline{\vartheta}$ une fonction appartenant à la classe

$$Y_\vartheta = L^\infty(0,\bar{t};H^{s-1,r-1}(\Omega)) \cap L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega)). \tag{8.2}$$

Alors, en définissant

$$\overline{f} = -\overline{\alpha}_1\Big(\frac{\kappa^{(2)}}{c_{v\varrho}^{(2)}} - \gamma_0\Big)\Delta\overline{\vartheta} \qquad (\text{dans } \Omega^+), \tag{8.3}$$

on a

$$\overline{f} \in L^2(0,\bar{t};H^{s-2,r-2}(\Omega^+)),$$

ce qui nous permet de trouver la solution η de l'équation (6.4) avec $f=\overline{f}$, solution qui, d'après le lemme 7.2, apprtient à la classe

$$\eta \in L^\infty(0,\bar{t};H^{s-1,r-1}(\Omega^+)) \cap L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega^+)).$$

Si on définit q par (6.7), d'après le lemme 7.3, on a

$$q \in L^2(0,\bar{t};H^{s-1}(\mathbb{R}^2)) \subset L^2(0,\bar{t};H^{s-\frac{3}{2}}(\mathbb{R}^2)),$$

ce qui nous permet de trouver la solution ϑ de l'équation (6.3), solution qui, d'après le lemme 7.1, apprtient à la classe Y_ϑ définie dans (8.2).

Ainsi, cette chaîne de résolution d'équations définit un opérateur G qui, à $\overline{\vartheta} \in Y_\vartheta$, associe la solution $\vartheta \in Y_\vartheta$ de l'équation (6.3).

Pour trouver le point fixe de l'opérateur G, nous passons aux fonctions $\widetilde{\vartheta}$, $\widetilde{\eta}$ et $\widetilde{q}$ définies dans (6.12). Définissons aussi

$$\widetilde{\overline{f}} = e^{-\omega t}\, \overline{f},$$

c'est-à-dire, $\widetilde{f}$ définie dans (6.12) avec $f = \overline{f}$. On remarque que de la définition (8.3) de $\overline{f}$ et de celle de $\widetilde{\overline{f}}$ il résulte immédiatement que

$$\|\widetilde{\overline{f}}\|^2_{H^{s-2,r-2}(\Omega^+)} \leq C_f \|\widetilde{\overline{\vartheta}}\|^2_{H^{s,r}(\Omega)} \tag{8.4}$$

avec une constante C_f. D'autre part, des inégalités (7.6), (7.12), (7.15) on déduit que

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Lambda\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega)} + \|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}\big) + \Lambda c_1 \|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s,r}(\Omega)} +$$
$$+ c_2\gamma_0\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s,r}(\Omega^+)} + 2\Lambda\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega)} + 2\omega\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)} \leq$$
$$\leq \Lambda\widetilde{C}_1\delta\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s,r}(\Omega^+)} + \Lambda\widetilde{C}_1 C_\delta\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)} + \widetilde{C}_3\|\widetilde{\overline{f}}\|^2_{H^{s-2,r-2}(\Omega^+)}, \tag{8.5}$$

où Λ est une constante à déterminer (δ et ω sont aussi à choisir). Si on choisit $\Lambda = 3\frac{\widetilde{C}_3 C_f}{c_1}$, $\delta = \frac{\gamma_0 c_2}{2\Lambda\widetilde{C}_1}$, $\omega = \Lambda\widetilde{C}_1 C_\delta$, de (8.4) et de (8.5) on déduit

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\Lambda\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega)} + \|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)}\big) + \Lambda c_1 \|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s,r}(\Omega)} +$$
$$+ \frac{c_2\gamma_0}{2}\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s,r}(\Omega^+)} + 2\Lambda\omega\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega)} + \Lambda\widetilde{C}_1 C_\delta\|\widetilde{\eta}\|^2_{H^{s-1,r-1}(\Omega^+)} \leq$$
$$\leq \frac{\Lambda c_1}{3}\|\widetilde{\overline{\vartheta}}\|^2_{H^{s,r}(\Omega)}. \tag{8.6}$$

Si on considère deux fonctions $\overline{\vartheta}_1$ et $\overline{\vartheta}_2$ appartenant à la classe Y_ϑ, alors en définissant $\widetilde{\overline{\vartheta}}_1$, $\widetilde{\overline{\vartheta}}_2$, $\widetilde{\vartheta}_1$, $\widetilde{\vartheta}_2$, $\widetilde{\eta}_1$, $\widetilde{\eta}_2$ de la même manière et en posant

$$\widetilde{\Theta} = \widetilde{\vartheta}_1 - \widetilde{\vartheta}_2, \qquad \widetilde{H} = \widetilde{\eta}_1 - \widetilde{\eta}_2, \qquad \widetilde{\overline{\Theta}} = \widetilde{\overline{\vartheta}}_1 - \widetilde{\overline{\vartheta}}_2,$$

les fonctions $\widetilde{\Theta}$, $\widetilde{H}$ et $\widetilde{\overline{\Theta}}$ vérifient l'inégalité analogue à (8.5), d'où on obtient

$$\Lambda\|\widetilde{\Theta}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};H^{s-1,r-1}(\Omega))} + \Lambda c_1\|\widetilde{\Theta}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega))} \leq \frac{2\Lambda c_1}{3}\|\widetilde{\overline{\Theta}}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega))}. \tag{8.7}$$

L'inégalité (8.7) implique que l'opérateur $\widetilde{G}$ qui, à $\widetilde{\overline{\vartheta}}$, associe $\widetilde{\vartheta}$ est une contraction dans l'espace de Banach $\widetilde{Y}_\vartheta$ muni de la norme

$$\|\widetilde{\vartheta}\|_{\widetilde{Y}_\vartheta} = \Big(\Lambda\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^\infty(0,\bar{t};H^{s-1,r-1}(\Omega))} + \Lambda c_1\|\widetilde{\vartheta}\|^2_{L^2(0,\bar{t};H^{s,r}(\Omega))}\Big)^{1/2}.$$

On en déduit l'existence et l'unicité de l'élément $\widetilde{\vartheta} \in \widetilde{Y}_\vartheta$ tel que $\widetilde{G}(\widetilde{\vartheta}) = \widetilde{\vartheta}$. A partir de cet élément $\widetilde{\vartheta} \in \widetilde{Y}_\vartheta$ on peut construire la solution (ϑ, η) du problème (6.3)–(6.6). La proposition est démontrée. $\square$

La proposition 8.1 étant démontrée, par les égalités (6.1)–(6.2) on peut définir (T, Π), qui sera la solution unique du problème (2.3)–(2.11) sous les conditions

$$T_0 - \overline{T}_{st} \in H^{s-1,r-1}(\Omega),$$
$$\Pi_0 - \overline{\Pi}_{st} - \overline{\alpha}_1[T_0 - \overline{T}_{st}]\Big|_{\Omega^+} \in H^{s-1,r-1}(\Omega^+).$$

Il est clair que la régularité de T et Π sera caractérisée par

$$T - \overline{T}_{st} \in L^\infty(0,t;H^{s-1,r-1}(\Omega)) \cap L^2(0,t;H^{s,r}(\Omega)),$$

$$\Pi - \overline{\Pi}_{st} - \overline{\alpha}_1[T - \overline{T}_{st}]\Big|_{\Omega^+} \in L^\infty(0,t;H^{s-1,r-1}(\Omega^+)) \cap L^2(0,t;H^{s,r}(\Omega^+))$$

pour tout $t > 0$.

9. DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 3.1

La démonstration de la proposition 3.1 s'articule en plusieurs étapes. Nous procédons donc en démontrant d'abord des lemmes et ensuite en démontrant la proposition.

Lemme 9.1. *Il existe un opérateur linéaire A de $L^2_\nu(I)$ sur $\widetilde{H}^1_\kappa(I)$ qui à chaque $u \in L^2_\nu(I)$ associe $Au \in \widetilde{H}^1_\kappa(I)$ vérifiant la relation*

$$\langle Au, \varphi\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(I)} = \langle u, \varphi\rangle_{L^2_\nu(I)} \qquad \forall\varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(I). \tag{9.1}$$

L'opérateur A, considéré comme opérateur de $L^2_\nu(I)$ dans lui-même, est un opérateur linéaire auto-adjoint et compact et ses vecteurs propres $\widetilde{e}_k$ correspondants aux valeurs propres μ_k,

$$A\widetilde{e}_k = \mu_k\widetilde{e}_k, \tag{9.2}$$

forment une base orthonormale $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ de $L^2_\nu(I)$. Les valeurs propres μ_k vérifient la relation

$$\mu_k \geq \mu_{k+1} \quad pour \quad k = 1, 2, \cdots, \qquad \mu_k \to 0 \quad pour \quad k \to \infty. \tag{9.3}$$

Démonstration. Puisqu'on a

$$\|\varphi\|_{L^2_\nu(I)} \leq C\|\varphi\|_{\widetilde{H}^1_\kappa(I)} \qquad \forall\varphi \in \widetilde{H}^1_\kappa(I)$$

avec une constante C et que donc le produit scalaire $\langle u,\varphi\rangle_{L^2_\nu(I)}$ peut être considéré comme fonctionnelle linéaire sur $\varphi\in\widetilde{H}^1_\kappa(I)$, d'après le théorème de représentation de Riesz, pour chaque $u\in L^2_\nu(I)$ il existe un élément $U\in\widetilde{H}^1_\kappa(I)$ et un seul qui vérifie la relation

$$\langle U,\varphi\rangle_{\widetilde{H}^1_\kappa(I)}=\langle u,\varphi\rangle_{L^2_\nu(I)}\qquad\forall\varphi\in\widetilde{H}^1_\kappa(I). \tag{9.4}$$

En posant $Au=U$, on définit l'opérateur A de $L^2_\nu(I)$ dans $\widetilde{H}^1_\kappa(I)$.

Cela étant, le lemme résulte de la théorie bien connue sur l'opérateur linéaire auto-adjoint et compact et de la définition des espaces $L^2_\nu(I)$ et $\widetilde{H}^1_\kappa(I)$ (voir par exemple le lemme 1 du § 1 du chap. IV de [14]). □

LEMME 9.2. *Soit $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ la base orthonormale de $L^2_\nu(I)$ définie dans le lemme 9.1. Alors pour tout k on a*

$$\mu_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\kappa\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{e}_k\Big)=-\nu\widetilde{e}_k\qquad \textit{dans}\ \ L^2(I). \tag{9.5}$$

Démonstration. Comme $A\widetilde{e}_k=\mu_k\widetilde{e}_k$, en posant $U=A\widetilde{e}_k$, d'après (9.4) on a

$$\int_I\mu_k\kappa(x)\Big(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{e}_k(x)\Big)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_I\nu(x)\widetilde{e}_k(x)\varphi(x)\mathrm{d}x.$$

Compte tenu que $\widetilde{H}^1_\kappa(I)$ est dense dans $L^2_\nu(I)$, cette égalité définit la dérivée généralisée $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\kappa(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{e}_k(x))$, qui vérifie (9.5). □

LEMME 9.3. *Soit $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ la base orthonormale de $L^2_\nu(I)$ définie dans le lemme 9.1. Alors pour tout k la fonction $\kappa(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{e}_k(x)$ est continue et la dérivée à gauche et la dérivée à droite de $\widetilde{e}_k(x)$ au point $x=0$ ont le même signe.*

Démonstration. Il résulte immédiatement du lemme 9.2. □

LEMME 9.4. *Soit $\{\widetilde{e}_k\}_{k=1}^\infty$ la base orthonormale de $L^2_\nu(I)$ définie dans le lemme 9.1. Alors pour tout k, $\widetilde{e}_k(x)$ a la forme*

$$\widetilde{e}_k(x)=\frac{y_k(x)}{\|y_k\|_{L^2_\nu(I)}}, \tag{9.6}$$

où $y_k(x)$ est la fonction donnée dans (3.11).

Démonstration. On considère la famille de système d'équations linéaires avec un paramètre $\lambda>0$

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)=\frac{1}{\kappa(x)}z(x)\\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}z(x)=-\lambda\nu(x)y(x)\end{cases} \tag{9.7}$$

avec les conditions initiales

$$y(-L_1)=0,\qquad z(-L_1)=1. \tag{9.8}$$

Par des calculs élémentaires (même si un peu longs) on constante que, si $\widetilde{\beta}(\lambda)$ et $\widetilde{\gamma}(\lambda)$ sont les fonctions définies dans (3.5) et dans (3.6), les fonctions $y(x) = y(\lambda;x)$, $z(x) = z(\lambda;x)$,

$$(9.9) \qquad y(\lambda;x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{\lambda\kappa_1\nu_1}} \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda\nu_1}{\kappa_1}}L_1 + \sqrt{\frac{\lambda\nu_1}{\kappa_1}}x\right) & \text{si} \quad -L_1 \leq x \leq 0 \\ \widetilde{\gamma}(\lambda)\sin\left(\widetilde{\beta}(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda\nu_2}{\kappa_2}}x\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L_2 \end{cases},$$

$$(9.10) \quad z(\lambda;x) = \begin{cases} \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda\nu_1}{\kappa_1}}L_1 + \sqrt{\frac{\lambda\nu_1}{\kappa_1}}x\right) & \text{si} \quad -L_1 \leq x \leq 0 \\ \widetilde{\gamma}(\lambda)\sqrt{\lambda\kappa_2\nu_2}\cos\left(\widetilde{\beta}(\lambda) + \sqrt{\frac{\lambda\nu_2}{\kappa_2}}x\right) & \text{si} \quad 0 \leq x \leq L_2 \end{cases},$$

constituent la solution unique du problème de Cauchy (9.7)–(9.8) dans la classe $C([-L_1, L_2])$. En outre, comme on le voit immédiatement, on a

$$(9.11) \qquad -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\kappa(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}y(x)\Big) = \lambda\nu(x)y(x)$$

presque partout dans $]-L_1, L_2[$ pour tout $\lambda > 0$.

D'après la définition (3.5) de $\widetilde{\beta}(\lambda)$, on a

$$\widetilde{\beta}(\,]0, \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}\frac{\pi^2}{4}[\,) =]0, \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}\frac{\pi^2}{4}[\,,$$

$$\widetilde{\beta}(\,]\frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n-\frac{1}{2})^2)\pi^2, \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n+\frac{1}{2})^2)\pi^2[\,) =$$

$$(9.12) \qquad =]\frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n-\frac{1}{2})^2)\pi^2, \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n+\frac{1}{2})^2)\pi^2[\,,$$

ce qui implique que

$$\frac{\cos\left(\sqrt{\frac{\lambda\nu_1}{\kappa_1}}L_1\right)}{\cos\widetilde{\beta}(\lambda)} > 0 \qquad \text{si } \lambda \neq \frac{\kappa_1}{\nu_1 L_1^2}((n-\frac{1}{2})^2)\pi^2, \qquad n = 1, 2, \cdots;$$

donc, d'après la définition (3.6) de $\widetilde{\gamma}(\lambda)$, on a $\widetilde{\gamma}(\lambda) > 0$ pour tout $\lambda > 0$.

Or, d'après la défintion des fonctions $\widetilde{h}(\lambda)$ et $y(\lambda;x)$ (voir (3.7), (9.9)) on a

$$y(\lambda; L_2) = \widetilde{\gamma}(\lambda)\sin(\widetilde{h}(\lambda)).$$

Donc

$$(9.13) \qquad y(\lambda; L_2) = 0, \quad \text{si et seulement si} \quad \lambda = \widetilde{h}^{-1}(k\pi), \quad k \in \mathbb{N}\backslash\{0\},$$

c'est-à-dire, si et seulement si $\lambda = \lambda_k$ avec un des nombres λ_k définis dans (3.9).

En retournant à $\widetilde{e}_k(x)$, de (9.5) on déduit que, si on pose

$$c_z(k)=\kappa_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{e}_k(x)\Big|_{x=-L_1},\quad \widetilde{y}(x)=\frac{1}{c_z(k)}\widetilde{e}_k(x),\quad \widetilde{z}(x)=\frac{1}{c_z(k)}\kappa(x)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\widetilde{e}_k(x),$$

alors les fonctions $\widetilde{y}(x)$ et $\widetilde{z}(x)$ satisfont au système d'équations (9.7) et aux conditions initiales (9.8). Donc en vertu de l'unicité de la solution du problème de Cauchy (9.7)–(9.8), on a

$$\widetilde{y}(x)=y(\lambda_k,x),\qquad \widetilde{z}(x)=z(\lambda_k,x),$$

d'où, en posant $y_k(x)=y(\lambda_k,x)$, on a

$$\widetilde{e}_k(x)=c_z(k)y_k(x).$$

Comme $\|\widetilde{e}_k\|_{L^2_\nu(I)}=1$, on a

$$c_z(k)=\frac{1}{\|y_k\|_{L^2_\nu(I)}}.$$

Ainsi on a établi (9.6). $\square$

Lemme 9.5. *Soit $y(\lambda;x)$ la fonction définie dans* (9.9)*. Soient λ_k les nombres définis dans* (3.9)*. Alors pour tout k, la fonction $y(\lambda_k;x)=y_k(x)$ admet $k-1$ zéros dans l'intervalle $]-L_1,L_2[$.*

Démonstration. De la forme de la fonction $y(\lambda;x)$ donné dans (9.9) et de la propriété de la fonction $\widetilde{\beta}(\lambda)$ (en particulier (9.12)) on déduit que le nombre de zéros dans l'intervalle $]-L_1,L_2[$ est une fonction croissante et qu'à chaque point $\lambda=\lambda_k$ il croît d'unité. D'autre part, on a

$$\lim_{\lambda\to0^+}y(\lambda;x)=x+L_1\qquad\text{pour}\quad x\in[-L_1,L_2].$$

On en déduit l'affirmation du lemme. $\square$

Maintenant nous démontrons la proposition 3.1.

Démonstration. Du lemme 9.4 résulte

$$\widetilde{e}_k=e_k$$

et de (9.11) et de (9.5) on déduit

$$\lambda_k=\frac{1}{\mu_k}.$$

Cela étant du lemme 9.1 d'coulent les propriétés (A), (B), (C) et (D).

Nous rappelons que $e_k(x)$ est de la forme $e_k(x)=\frac{y_k(x)}{\|y_k\|_{L^2_\nu(I)}}$ avec

$$y_k(x)=\frac{1}{\sqrt{\lambda_k\nu_1\kappa_1}}\sin\Big(\sqrt{\frac{\lambda_k\nu_1}{\kappa_1}}(L_1+x)\Big)\qquad\text{pour}\quad -L_1\le x\le0,$$

$$y_k(x) = \pm\frac{1}{\sqrt{\lambda_k\nu_2\kappa_2}}\sin\Big(\sqrt{\frac{\lambda_k\nu_2}{\kappa_2}}(L_2-x)\Big) \qquad \text{pour} \quad 0\le x\le L_2.$$

Comme $\lim\limits_{x\to 0^-}\kappa_1\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e_x(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\kappa_2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e_x(x)$, $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e_x(x)$ et $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e_x(x)$ ont le même signe, ce qui implique l'existence d'un $x_1\in[-\frac{L_1}{2},0[$ tel que $\Big|\sin\Big(\sqrt{\frac{\lambda_k\nu_1}{\kappa_1}}(L_1+x_1)\Big)\Big| = 1$, ou d'un $x_1\in[0,\frac{L_2}{2}[$ tel que $\Big|\sin\Big(\sqrt{\frac{\lambda_k\nu_2}{\kappa_2}}(x_1+L_2)\Big)\Big| = 1$. Dans le premier cas on a

$$\|y_k(x)\|^2_{L^2_\nu(I)} = \int_{-L_1}^{L_2}\nu(x)|y_k(x)|^2\mathrm{d}x \ge \int_{-L_1}^{x_1}\nu_1|y_k(x)|^2\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k\kappa_1}\int_{-L_1}^{x_1}\sin^2\Big(\sqrt{\frac{\lambda_k\nu_1}{\kappa_1}}(L_1+x_1)\Big)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k\kappa_1}\Big[\frac{x}{2}-\frac{1}{2}\frac{\sin\Big(2\sqrt{\frac{\lambda_k\nu_1}{\kappa_1}}(L_1+x)\Big)}{2\sqrt{\frac{\lambda_k\nu_1}{\kappa_1}}}\Big]_{-L_1}^{x_1} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_k\kappa_1}(\frac{x_1}{2}+\frac{L_1}{2}) \ge \frac{L_1}{4\lambda_k\kappa_1}.$$

De manière analogue dans le deuxième cas on a

$$\|y_k(x)\|^2_{L^2_\nu(I)} \ge \frac{L_2}{4\lambda_k\kappa_2}.$$

Comme

$$\sup_{-L_1\le x\le L_2}|e_k(x)| = \frac{1}{\|y_k\|_{L_\nu(I)}}\max\big(\sup_{-L_1\le x\le 0}|y_k(x)|, \sup_{0\le x\le L_2}|y_k(x)|\big),$$

on en déduit la propriété (E).

On rappelle que, d'après le lemme 9.5, $e_k(x)$ admet $k-1$ zéros dans $]-L_1,L_2[$. Désignons par q le nombre de zéros dans $]-L_1,0]$ et par r celui dans $]0,L_2[$ (de sorte que $q+r=k-1$). Alors on a

$$q\pi \le \sqrt{\lambda_k\frac{\nu_1}{\kappa_1}}L_1 \le (q+1)\pi,$$

$$r\pi \le \sqrt{\lambda_k\frac{\nu_2}{\kappa_2}}L_2 \le (r+1)\pi,$$

d'où

$$\pi(k-1) = \pi(q+r) \le \sqrt{\lambda_k}\Big(\sqrt{\frac{\nu_1}{\kappa_1}}L_1 + \sqrt{\frac{\nu_2}{\kappa_2}}L_2\Big) \le \pi(q+r+2) = \pi(k+1).$$

On a donc

$$M_0(k-1)^2 \le \lambda_k \le M_0(k+1)^2, \qquad M_0 = \Big(\frac{\pi}{L_1\sqrt{\frac{\nu_1}{\kappa_1}} + L_2\sqrt{\frac{\nu_2}{\kappa_2}}}\Big)^2.$$

La propriété (F) est démontrée. □

REFERENCES

[1] M.L. Albertson, *La mécanique de l'évaporation.* La Houille Blanche **5** (1955), 704–717.

[2] V.M. Babich, M.B. Kapulevich, S.G. Mikhlin, G.I. Natanson, P.M. Riz, L.N. Slobodetskii et M.M. Smirnov, *Équations linéaires de physique mathématique* (en russe). Nauka, Moscou, 1964.

[3] A. Benabdallah, A. Dermenjian and J. Le Rousseau, *Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications.* C. R. Mecanique **10** (2006), 582–586.

[4] A. Benabdallah, A. Dermenjian and J. Le Rousseau, *Carleman estimates for the one-dimensional heat equation with a discontinuous coefficient and applications to controllability and an inverse problem.* J. Math. Anal. Appl. **336** (2007), 865–887.

[5] G.T. Csanady, *Air-Sea Interaction : Law and Mechanisms.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[6] M. El haj Assad and M.J. Lampinen, *Mathematical modeling of falling liquid film evaporation process.* Intern. J. Refrig. **25** (2002), 985–991.

[7] A. Friedman, *Partial Differential Equations of Parabolic Type.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1964.

[8] R.I. Geta, *Modélisation de l'évaporation de la surface d'eau basée sur la théorie de la similitude* (en russe). Vestnik VKGTU **4** (2012), 5–12.

[9] A.K. Kikoïne et I.K. Kikoïne, *Physique moléculaire* (traduit du russe). Mir, Moscou, 1979.

[10] E.B. Kraus and J.A. Businger, *Atmosphere-Ocean Interaction* (2^{nd} Ed.). Oxford Univ. Press, Oxford, 1994.

[11] R. Labbas and M. Moussaoui, *On the resolution of the heat equation with discontinuous coefficients.* Semigroup Forum **60** (2000), 187–201.

[12] O.A. Ladyzhenskaya, V.A. Solonnikov and N.N. Ural'tseva, *Linear and quasi-linear equations of parabolic type* (translated from Russian). Transl. Math. Monogr. **23**, American Mathematical Society (AMS), Providence, RI, 1968.

[13] J.L. Lions et E. Mageness, *Problème aux limites non homogène et applications,* Vol. 1. Dunod, Paris, 1968.

[14] V.P. Mikhaïlov, *Équations aux dérivées partielles* (traduit du russe). Mir, 1980.

[15] A.D. Polyanin, A.V. Vyaz'min, A.I. Zhurov and D.A. Kazenin, *Handbook of exact solutions for heat and mass transfer equations* (en russe). Faktorial, Moscou, 1998.

[16] Z.D. Reipnazarova and A.A. Artikov, *Mathematical simulation of the evaporation in operation area of a bubble evaporator.* Russ. J. Appl. Chem. **81** (2008), *12*, 2207–2210.

[17] S.S. Sazhin, O. Rybdylova and C. Crua, *A mathematical model for heating and evaporation of a multi-component liquid film.* Int. J. Heat Mass Transf. **117** (2018), 252–260.

[18] V.P. Singh and C.-Y. Xu, *Evaluation and generalization of 13 mass-transfer equations for determining free water evaporation.* Hydrological Process. **11** (1997), 311–323.

[19] D.V. Widder, *The Heat Equation.* Academic Press, New York, San Francisco, London, 1975.

[20] V.S. Zubkov, G.E. Cossali, S. Tonini, O. Rybdylova, C. Crua and S.S. Sazhin, *Mathematical modelling of heating and evaporation of a spheroidal droplet.* Int. J. Heat Mass Transf. **108** (2017), 2181–2190.

Received 10 September 2019

Université 8 Mai 1945,
Guelma, Algérie
khadidjahallaci@gmail.com
hallaci.khadidja@univ-guelma.dz

École Normale Supérieure,
Assia Djebar de Constantine, Algérie
hisaofujitayashima@qq.com