PROPRIÉTÉS GÉOMÉTRIQUES DANS LES INTÉRPOLES RÉELS ET COMPLEXES (GEOMETRIC PROPERTIES IN THE REAL AND COMPLEX INTERPOLATES)

MOHAMMAD DAHER

Communicated by Dan Timotin

Let (A_0, A_1) be an interpolation couple such that A_0 is a subspace of A_1 and the identity $i : A_0 \to A_1$ is continuous. In the second part of this work, we show that if A_1 is weakly sequentially complete, then $A_{\theta,p}$ has the same property for $\theta \in]0,1[$ and $p \in]1, +\infty[$. We give an example for which the previous conclusion is false if the assumption on A_1 is replaced by the same one on A_0. In the third part, we show that there is an interpolation couple (A_0, A_1) such that A_0 has the Radon-Nikodym property, A_0 is a subspace of A_1, and $(\mathcal{L}(L^1, A_0), \mathcal{L}(L^1, A_1))^{\theta}$ is a strict isometric subspace of $\mathcal{L}(L^1, A^{\theta})$, $\theta \in]0,1[$. Finally, we show in this part, that if $i : A_0 \to A_1$ is weakly compact, then A_{θ}^{+} is a dual space.

AMS 2020 Subject Classification: 45B70, 46B22, 46B28.

Key words: real interpolation, w.s.c. property.

1. INTRODUCTION

Soit (B_0, B_1) un couple d'interpolation d'espaces de Banach. Si les interpolés réels $B_{\theta,p}$, $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$ conservent une propriété géométrique donnée de B_0 (ou de B_1), on dit que cette propriété s'interpole. Par exemple la séparabilité, la réflexivité, la convexité uniforme s'interpolent.

D'après [15, Th.2] il existe un couple d'interpolation (C_0, C_1) tel que C_0, C_1 sont isomorphes à ℓ^1 et $C_\theta = (C_0, C_1)_\theta$ (l'espace d'interpolation complexe), $C_{\theta,p} = (C_0, C_1)_{\theta,p}$ (l'espace d'interpolation réel) contiennent c_0 isomorphiquement pour tout $\theta \in]0,1[$ et tout $p \in]1, +\infty[$. Donc les propriétés "faiblement séquentiellement complet", "ne contient pas c_0 isomorphiquement" ne s'interpolent pas en général. Ce contre-exemple est déjà invoqué dans [6, th.D] pour montrer que la propriété de Radon-Nikodym ne s'interpole pas en général.

Considérons maintenant un couple d'interpolation (A_0, A_1) tel que A_0 soit un sous-espace vectoriel de A_1, l'identité : $A_0 \to A_1$ étant continue. D'après [12, Cor.2.12], si A_1 a la propriété de Radon-Nikodym analytique (RNa), l'espace $A_{\theta,p}$, l'a aussi, $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$. Dans la deuxième partie de ce travail, on montre que si A_1 est faiblement séquentiellement complet, alors $A_{\theta,p}$, , conserve cette propriété. D'après [17, Th.2], l'espace $A_{\theta,p}$ ne contient pas c_0 isomorphiquement si A_0 étant sous espace vectoriel de A_1 et A_1 ne contient pas c_0 isomorphiquement, $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$.

Pour tout couple d'interpolation d'espaces de Banach (B_0, B_1) on a l'identification isométrique $(\ell^\infty(B_0), \ell^\infty(B_1))^\theta = \ell^\infty(B^\theta)$ [10, Lemme 1.8]. Notons que $\ell^\infty(X) = \mathcal{L}(\ell^1, X)$.

Que se passe-t-il si on remplace ℓ^∞ par $L^\infty(\mathbb{T})$ (noté L^∞) ou bien ℓ^1 par $L^1(\mathbb{T})$ (noté L^1)? Notons que $(\mathcal{L}(L^1, B_0), \mathcal{L}(L^1, B_1))$ est bien un couple d'interpolation. Nous vérifions qu'il y a un plongement de norme 1

$$(\mathcal{L}(L^1, B_0), \mathcal{L}(L^1, B_1))^\theta \to \mathcal{L}(L^1, B^\theta). \tag{1.1}$$

Nous montrons dans la troisième partie, que ces espaces ne coincident pas en général, même si B_0 s'injecte continûment dans B_1. Toutefois ils coincident si le couple (B_0, B_1) est de la forme (A_0^*, A_1^*) avec $A_0 \cap A_1$ dense dans A_0 et A_1 (voir la remarque 4.1).

Utilisant l'identification isométrique évidente $\mathcal{L}(L^1, X) = VB^\infty(X)$ pour tout Banach X, nous montrons que, si le plongement (1.1) est surjectif, alors

$$(VB^p(B_0), VB^p(B_1))^\theta = VB^p(B^\theta), 1 < p < \infty.$$

Dans la suite de la troisième partie, nous donnons un exemple de couple d'interpolation (B_0, B_1) tel que B_0 est un sous-espace vectoriel de B_1 et $(L^p(B_0), L^p(B_1))_\theta^+$ est un sous espace isométrique strict de $L^p(B_\theta^+)$. Finalement, on montre que A_θ^+ est un espace dual si $i : A_0 \to A_1$ est faiblement compact, $0 < \theta < 1$.

2. NOTATIONS ET RAPPELS

Soient (B_0, B_1) un couple d'interpolation d'espaces de Banach, au sens de [4, Chap. II], $\theta \in]0, 1[$ et $p \in [1, +\infty[$. L'espace d'interpolation réel $B_{\theta,p}$ est défini par

$$B_{\theta,p} = \left\{ a \in B_0 + B_1;\ \|a\|_{B_{\theta,p}} = \left[\int_{\mathbb{R}^+} (K(t,a)/t^\theta)^p \mathrm{d}t/t \right]^{1/p} < +\infty \right\}$$

où, pour $t > 0$,

$$K(t, a) = \inf \left\{ \|a_0\|_{B_0} + t \|a_1\|_{B_1} ;\ a = a_0 + a_1,\ a_j \in B_j,\ j = 0, 1 \right\}.$$

La fonction $K(a,t)$ étant croissante en t, l'identité : $B_{\theta,p} \to B_0 + B_1$ est continue. De plus $(B_{\theta,p}, \|.\|_{B_{\theta,p}})$ est un espace de Banach [4, Th 3.4.2].

Il existe une constante $C_{\theta,p} > 0$ telle que, pour $a \in B_0 \cap B_1$,

$$\|a\|_{\theta,p} \leq C_{\theta,p} \|a\|_{B_0}^{1-\theta} \|a\|_{B_1}^{\theta} \quad . \tag{2.1}$$

En effet, d'après [4, th.3.5.2 et (1),p.49], c'est vrai pour $p = 1$, et d'après [4, théorème 3.4.1-(b)], $B_{\theta,1}$ s'injecte continûment dans $B_{\theta,p}$.

Soient (B_0, B_1) un couple d'interpolation, $0 < \theta < 1$ et $1 \leq p < +\infty$. Désignons par B_j^* le dual de B_j, $j \in \{0,1\}$, $B_{\theta,p}^*$ le dual de $B_{\theta,p}$ et B_θ^* le dual de B_θ, où B_θ est l'espace d'interpolation complexe (voir la définitions dans la partie 3).

Les espaces d'interpolation ont en outre les propriétés suivantes :

(i) $B_0 \cap B_1$ est dense dans $B_{\theta,p}$, $1 \leq p < \infty$ [4, th.3.4.2] et dans l'espace interpolé complexe B_θ, [4, Th.4.2.2].

(ii) Le dual de $B_{\theta,p}$, $1 < p < \infty$, s'identifie isomorphiquement à l'espace $(B_0^*, B_1^*)_{\theta,p'}$ (où p' est le conjugué de p) si $B_0 \cap B_1$ est dense dans B_0 et B_1 (c. à d. si (B_0, B_1) est un couple régulier), [4, Th.3.7.1].

(ii-bis) Le dual de B_θ s'identifie isométriquement à $(B_0^*, B_1^*)^\theta$, si (B_0, B_1) est un couple régulier, [4, Th.4.5.1].

(iii) $B_{\theta,p} = (B_0^0, B_1^0)_{\theta,p}$, $1 \leq p < \infty$, où B_j^0 est l'adhérence de $B_0 \cap B_1$ dans B_j $(j = 0, 1)$, [4, Th.3.4.2].

(iv) Pour tout couple régulier (B_0, B_1) on a $(B_0 + B_1)^* = B_0^* \cap B_1^*$ et $(B_0^* \cap B_1)^* = B_0^* + B_1^*$, [4, Th.2.7.1].

(v) B_θ est un sous-espace isométrique de B^θ, [3].

3. UNE CONDITION POUR QUE $B_{\theta,p}$, $1 < p < \infty$, SOIT F.S.C

Soit (A_0, A_1) un couple d'interpolation tel que A_0 soit un sous-espace vectoriel de A_1, l'identité : $A_0 \to A_1$ étant continue. En particulier $A_{\theta,p}$, $\theta \in [0,1[$, $p \in [1, +\infty[$, est un sous espace de A_1, avec injection continue $A_{\theta,p} \to A_1$.

Notons

$$N_{\theta,p}(a) = \|a\|_{A_1} + \left[\int_1^\infty \left(\frac{K(a,t)}{t^\theta}\right)^p \frac{\mathrm{d}t}{t}\right]^{1/p}, a \in A_{\theta,p}.$$

D'après [12, rem.2.7] $N_{\theta,p}(.)$ est une norme équivalente sur $A_{\theta,p}$.

Noutons B_X la boule unité fermée d'un Banach X et $\langle x, x^* \rangle$ l'accouplement entre un élément de X et un élément de son dual X^*.

Proposition 3.1. *Soit* $\theta \in]0,1[$.

a) *Soit* $p \in [1,+\infty[$. *La boule* $B_{(A_{\theta,p},N_{\theta,p}(.))}$ *est fermée dans* A_1.

b) *Soit* $p \in]1,+\infty[$. *Une suite bornée dans* $A_{\theta,p}$ *qui converge faiblement dans* A_1 *converge faiblement dans* $A_{\theta,p}$.

Démonstration. a) Soit a adhérent à la boule $B_{(A_{\theta,p},N_{\theta,p}(.))}$ dans A_1. D'après le rappel (i) il existe une suite $(a_n)_{n\geq 0}$ dans A_0 telle que $N_{\theta,p}(a_n) \leq 1$ et telle que $a_n \to_{n\to+\infty} a$ dans A_1. Soit $(\theta_k)_{k\geq 0}$ une suite décroissante dans $]\theta,1[$ telle que $\theta_k \to_{k\to+\infty} \theta$ et soit $\eta_k \in]0,1[$ tel que $\theta_k = (1-\eta_k)\theta + \eta_k$, $k \geq 0$. D'après le théorème de réitération [4, th.3.5.3], pour tout k, $A_{\theta_k,p} = (A_{\theta,p}, A_1)_{\eta_k,p}$, $p \in [1,+\infty[$. D'après (2.1) appliqué au couple $(A_{\theta,p}, A_1)$, pour tous m, n,

$$\|a_m - a_n\|_{A_{\theta_k,p}} \leq C_{\theta_k,p}\|a_m - a_n\|^{1-\eta_k}_{A_{\theta,p}}\|a_m - a_n\|^{\eta_k}_{A_1}.$$

La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est donc de Cauchy dans $A_{\theta_k,p}$, qui est complet. Elle converge dans $A_{\theta_k,p}$, nécessairement vers a, qui est donc dans $A_{\theta_k,p}$.

Comme $N_{\theta_k,p}(a_n) \leq N_{\theta,p}(a_n) \leq 1$, alors $N_{\theta_k,p}(a) \leq 1$. Le lemme de Fatou entraine que $N_{\theta,p}(a) \leq 1$.

b) D'après le rappel (iii), on peut supposer que A_0 est dense dans A_1, c. à d. que (A_0, A_1) est un couple régulier. Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite bornée dans $A_{\theta,p}$, donc dans $(A_{\theta,p}, N_{\theta,p}(.))$, qui converge faiblement vers a dans A_1. Donc a est adhérent en norme dans A_1 à l'enveloppe convexe de $(a_n)_{n\geq 0}$. D'après a) $a \in A_{\theta,p}$. D'autre part, le rappel (ii) nous montre que $A^*_{\theta,p} = (A^*_0, A^*_1)_{\theta,p'}$ isomorphiquement. D'après le rappel (i), A^*_1 est dense en norme dans $A^*_{\theta,p}$. Donc la suite $(a_n - a)_{n\geq 0}$, bornée dans $A_{\theta,p}$, converge faiblement vers 0 dans $A_{\theta,p}$. $\square$

Remarque 3.2. Dans [10, Prop. 1.5] on suppose que l'adhérence dans A_1 de $B_{A_{\theta,p}}$ reste dans $A_{\theta,p}$. D'après la Proposition 3.1 a) cette hypothèse est toujours vérifiée pour $1 < p < +\infty$.

Rappelons qu'un espace de Banach X est faiblement séquentiellement complet (f.s.c) si toute suite faiblement de Cauchy dans X converge faiblement dans X.

Théorème 3.3. *Soient* $0 < \theta < 1$ *et* $1 < p < +\infty$. *Supposons que* A_1 *est f.s.c. Alors* $A_{\theta,p}$ *est f.s.c.*

Démonstration. a) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite faiblement de Cauchy dans $A_{\theta,p}$, donc dans A_1. Comme A_1 est f.s.c, il existe $a \in A_1$ tel que $a_n \to_{n\to+\infty} a$ faiblement dans A_1. D'après la proposition 3.1

b) la suite $(a_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement vers a dans $A_{\theta,p}$. $\square$

Corollaire 3.4. *Soient* (B_0, B_1) *un couple d'interpolation,* $0 < \theta < 1$ *et* $1 < p < +\infty$. *Supposons que* $B_0 + B_1$ *est f.s.c. Alors* $B_{\theta,p}$ *est f.s.c.*

La démonstration de ce corollaire nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.5. *Soit* (B_0, B_1) *un couple régulier. Supposons que* B_0 *et* B_1 *sont f.s.c. Alors* $B_0 \cap B_1$ *est f.s.c.*

Démonstration. a) Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite faiblement de Cauchy dans $B_0 \cap B_1$ donc dans B_j, $j \in \{0,1\}$. Si B_j est f.s.c, il existe $b_j \in B_j$ telle que $a_n \to_{n\to+\infty} b_j$ faiblement dans B_j, $j \in \{0,1\}$. D'après le rapel (iv), $(B_0 + B_1)^* = (B_0)^* \cap (B_1)^*$. Donc si $a^* \in (B_0 + B_1)^*$ on a $\langle b_0, a^*\rangle = lim_{n\to+\infty} \langle a_n, a^*\rangle = \langle b_1, a^*\rangle$. Il en résulte que $b_0 = b_1$ dans $B_0 + B_1$, donc $b_0 = b_1$ dans $B_0 \cap B_1$. D'autre part, d'après le rappel (iv), $(B_0 \cap B_1)^* = B_0^* + B_1^*$, donc $(a_n)_{n\geq 0}$ converge faiblement dans $B_0 \cap B_1$ vers $b_0 = b_1$. □

Démonstration du Corollaire 3.4. Supposons que $B_0 + B_1$ est f.s.c. D'après le Théorème 3.3, $(B_0, B_0 + B_1)_{\theta,p}$ et $(B_1, B_0 + B_1)_{1-\theta,p}$ est f.s.c. D'après le lemme 3.5 leur intersection aussi. Mais d'après [16, Th.1.1] cette intersection n'est autre que $B_{\theta,p}$. □

Corollaire 3.6. *Si l'interpolé complexe* A_β *est f.s.c (resp. ne contient pas* c_0 *isomorphiquement) pour un* $\beta \in \,]0,1[$, *alors* $A_{\theta,p}$ *conserve cette propriété pour tout* $\theta \in \,]0,\beta[$ *et tout* $p \in \,]1,+\infty[$.

Démonstration. Soient β et θ comme dans l'énoncé. D'après [4, Th. 4.7.2] $A_{\theta,p}$ est un interpolé entre A_α et A_β pour un $\alpha \in \,]0,\theta[$. Comme A_α s'injecte continûment dans A_β, le Théorème 3.3 (resp. [17, Th.2]) entraine que A_β transmit cette propriété. □

Comme nous allons signalé dans l'introduction que le Théorème 3.3 est démontré par M. Levy pour la propriété ne contient pas c_0 isomorphiquement. La réciproque du théorème 3.3 est fausse pour les deux propriétés, comme le montre l'exemple suivant, déjà considéré dans [10]:

Exemple 1. Soit $L^\psi([0,1]) = L^\psi$ l'espace d'Orlicz où $\psi(t) = t\log(1+t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. On va voir que $A_{\theta,p} = ((L^\psi)^*, L^\infty)_{\theta,p}$ est réflexif pour tout $\theta \in \,]0,1[$ et tout $p \in \,]1,+\infty[$, tandis que $A_\beta = ((L^\psi)^*, L^\infty)_\beta$ contient c_0 isomorphiquement pour tout $\beta \in \,]0,1[$. Pour $\theta < \beta$, $A_{\theta,p}$ est un interpolé réel entre L^∞ et A_β.

a) Comme ψ est convexe et $log(1+t) \to_{t\to\infty} +\infty$, l'identité $j : L^\psi \to L^1$ est une injection faiblement compacte [1, Rem., p.123] et d'image dense. Son adjoint $i = j^* : L^\infty \to (L^\psi)^*$ est donc aussi faiblement compact. D'après [2, Prop.III.I], l'interpolé $A_{\theta,p}$ est réflexif.

b) On va voir que A_θ est un treillis. La preuve de [10, Lemme 1.2] montre que, pour tout θ, $(L^\psi, L^1)_\theta = (L^\psi, L^1)^\theta = L^{\varphi_\theta}$, où φ_θ est donnée par sa fonction réciproque

$$\varphi_\theta^{-1}(t) = t^\theta \left[\psi^{-1}(t)\right]^{1-\theta}, t \in \mathbb{R}^+.$$

L'espace d'Orlicz L^{φ_θ} est un treillis, ainsi que son dual. Ce dual s'identifie à $\left[(L^\psi, L^1)_\theta\right]^*$, qui n'est autre que $((L^\psi)^*, L^\infty)^\theta$ d'après le rappel (ii-bis), puisque le couple (L^ψ, L^1) est régulier. D'après le rappel (v), A_θ en est isométriquement un sous-espace fermé. Le treillis L^∞ étant de plus dense dans A_θ d'après le rappel (i), A_θ est bien un treillis.

c) D'après [10, Cor.1.4], A_θ n'a pas la propriété RNa. Or un treillis sans RNa contient c_0 [8, th.1].

L'exemple suivant (déjà utilisé dans [10]) montre que, si on remplace dans l'énoncé du théorème 3.3 (resp. [17, Th.2]) l'hypothèse sur A_1 par la même hypothèse sur A_0, alors la conclusion du théorème (resp. [17, Th.2]) n'est plus vraie.

Exemple 2. Soit $A_0 = L^1(\mathbb{T})$, sous espace de $A_1 = \widehat{c_0(\mathbb{Z})}$ (les transformées de Fourier de $c_0(\mathbb{Z})$), isométrique à $c_0(\mathbb{Z})$. Ici A_0 est f.s.c (donc ne contient pas de copie de c_0) tandis que $A_{\theta,p}$, $\theta \in\,]0,1[$, $p \in\,]1,+\infty[$ contient une copie de c_0.

Preuve: Noter $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite équivalente à la base canonique de c_0 dans A_β, $\beta \in\,]0,1[$, pour $0 < \theta < \beta$ (daprès le lemme de Pisier [6, lemme 5.1,rem.6.3], une telle suite existe) l'identité est continue: $A_0 \to A_{\theta,p} \to A_\beta$. La suite $(a_n)_{n\geq 0}$ est donc équivalente à la base canonique de c_0 dans $A_{\theta,p}$.

4. $(\mathcal{L}(L^1, A_0), \mathcal{L}(L^1, A_1))^\theta$ PEUT ÊTRE UN SOUS-ESPACE STRICT DE $\mathcal{L}(L^1, A^\theta)$. DÉFINITIONS ET RAPPELS

Soit $\overline{B} = (B_0, B_1)$ un couple d'interpolation. Notons

$$S = \{z \in \mathbb{C};\ 0 \leq \mathrm{Re(z)} \leq 1\}$$

et S_0 son intérieur. Désignons par $\mathcal{F}(\overline{B})$ l'espace des fonctions F à valeurs dans $B_0 + B_1$, continues bornées sur S, holomorphes sur S_0, telles que les applications $\tau \to F(j + i\tau)$ sont dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}, B_j)$, $j \in \{0,1\}$. On le munit de la norme

$$\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{B})} = \max\{sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|F(i\tau)\|_{B_0}, sup_{\tau\in\mathbb{R}} \|F(1+i\tau)\|_{B_1}\}.$$

Soit $\theta \in\,]0,1[$. L'espace $(B_0, B_1)_\theta = B_\theta = \left\{F(\theta);\ F \in \mathcal{F}(\overline{B})\right\}$ est de Banach [4, Th.4.1.2] pour la norme définie par

$$\|a\|_{B_\theta} = \inf\left\{\|F\|_{\mathcal{F}(\overline{B})}\,;\ F(\theta)=a\right\}.$$

Toute $F \in \mathcal{F}(\overline{B})$ est représentée à partir de ses valeurs au bord grâce à la mesure harmonique [4, Sections 4.3, 4.5] : si $z=\theta+it$, $\frac{Q_0(z,.)}{1-\theta}$ et $\frac{Q_1(z,.)}{\theta}$ sont des densités de probabilité sur $\mathbb{R}$ et

$$F(z) = \int_{\mathbb{R}} F(i\tau)Q_0(z,\tau)d\tau + \int_{\mathbb{R}} F(1+i\tau)Q_1(z,\tau)d\tau, z\in S_0. \tag{4.1}$$

On note $\mathcal{G}(\overline{B})$ l'espace des fonctions g à valeurs dans B_0+B_1, continues sur S, holomorphes à l'intérieur de S, telles que

$$(C) \quad \sup_{z\in S}\frac{\|g(z)\|_{B_0+B_1}}{1+|z|} < +\infty,$$

$$(C') \quad g(j+i\tau)-g(j+i\tau')\in B_j,\quad \forall\tau,\tau'\in\mathbb{R},\ j\in\{0,1\}$$

et la quantité suivante est finie:

$$\|g^{\cdot}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{B})} = \max_{j\in\{0,1\}}\left[\sup_{\tau\neq\tau'\in\mathbb{R}}\frac{\|g(j+i\tau)-g(j+i\tau')\|_{B_j}}{|\tau-\tau'|}\right].$$

Ceci définit une norme sur l'espace $Q\mathcal{G}(\overline{B})$ quotient de $\mathcal{G}(\overline{B})$ par les applications constantes à valeurs dans B_0+B_1 [4, Lemma 4.1.3]. Notons $B^\theta = \left\{g'(\theta);\ g\in\mathcal{G}(\overline{B})\right\}$, $\theta\in\,]0,1[$. C'est un espace de Banach [4, Th.4.1.4] pour la norme

$$\|a\|_{B^\theta} = \inf\left\{\|g^{\cdot}\|_{Q\mathcal{G}(\overline{B})}\,;\ g'(\theta)=a\right\}.$$

Les rappels suivants nous seront utiles.

a) $B^\theta = (B_0^0, B_1^0)^\theta$, $0<\theta<1$, où B_j^0 est l'adhérence de $B_0\cap B_1$ dans B_j $(j=0,1)$, [3], et $B_\theta = (B_0^0, B_1^1)_\theta$, [4, Th.4.2.2].

b) Un espace de Banach X a la propriété de Radon-Nikodym (RNP) si et seulement si $L^\infty(X)=\mathcal{L}(L^1,X)$ [13, Th. 5 p. 63].

c) Si X a RNP, $L^p(X)$ l'a aussi, $1<p<\infty$ [13, Chap.V-4, Th. 1].

d) Si B_0 ou B_1 a RNP, $B_\theta = B^\theta$, $\theta\in\,]0,1[$. Cela résulte de [4, Th. 4.3.1] si B_0 ou B_1 est réflexif et, en modifiant légèrement cette démonstration, de [11, Prop. 11] dans le cas RNP général.

Dans la section 4 nous considèrerons les espaces $VB^p(X)$. Suivant [14, Chap. II, 13-1, p. 241] $VB^p(X)$, $1<p\leq+\infty$, est l'espace des opérateurs bornés $T: L^{p'}\to X$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1$, tels qu'il existe $g^T\in L^p$, $g^T\geq 0$, vérifiant

$$\|Tf\|_X \leq \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, g^T(t)\mathrm{d}m(t),\ \forall\ f\in L^{p'},$$

muni de la norme

$$\|T\|_{VB^p(X)} = \inf\left\{\left\|g^T\right\|_{L^p}\right\} = \min\left\{\left\|g^T\right\|_{L^p}\right\}.$$

Il est évident que $VB^\infty(X) = \mathcal{L}(L^1, X)$ isométriquement et que $L^\infty(X)$ en est isométriquement un sous espace fermé. De même $L^p(X)$ est isométriquement un sous espace fermé de $VB^p(X)$, $1 < p < \infty$, [5, Cor. 4].

D'autre part $VB^p(X) = \mathbf{h}^p(X)$, $1 < p \leq \infty$, isométriquement [9, Lemme 3.2] (l'isomorphisme étant dû à O.Blasco [5, Th. 2.1]).
Ici $\mathbf{h}^p(X)$ désigne l'espace des fonctions $u : D = \{z \in \mathbb{C};\ |z| < 1\} \to X$, harmoniques, bornées si $p = +\infty$, ou vérifiant, si $p \in [1, +\infty[$

$$\|u\|^p_{\mathbf{h}^p(X)} = \sup_{0<r<1} \int_{\mathbb{T}} \left\|u(re^{it})\right\|^p_X \mathrm{d}m(t) < +\infty.$$

On netera le contraste entre la remarque suivante, et la Proposition 5.4.

Remarque 4.1. Soit (A_0, A_1) un couple régulier. En posant $(B_0, B_1) = (A_0^*, A_1^*)$ on a $(\mathcal{L}(L^1, B_0), \mathcal{L}(L^1, B_1))^\theta = \mathcal{L}(L^1, B^\theta)$. En effet, d'après [10, (2.6)], $(\mathbf{h}^p(A_0^*), \mathbf{h}^p(A_1^*))^\theta = \mathbf{h}^p(A_0^*, A_1^*)^\theta$, $p \in]1, \infty]$ et on utilise l'identification ci-dessus.

Il est bien connu (sans passer par $VB^p(X)$) que $L^p(X)$ est isométriquement un sous espace fermé de $\mathbf{h}^p(X)$, $1 \leq p \leq \infty$.

5. RÉSULTATS

Mentionnons que (1.1) sera un cas particulier du Lemme 5.7.

Rappel: il est bien connu, et facile de voir par construction, que, pour tout couple (B_0, B_1), les espaces $F_\theta = [l^\infty(B_0), l^\infty(B_1)]_\theta$ et $F^\theta = [l^\infty(B_0), l^\infty(B_1)]^\theta$ s'injectent avec norme 1 respectivement dans $l^\infty(B_\theta)$ et $l^\infty(B^\theta)$. De plus $F^\theta = l^\infty(B^\theta)$ isométriquement d'après [10, lemme 1.8]. D'après v) F_θ est donc isométriquement un sous espace fermé de $l^\infty(B_\theta)$.

Lemme 5.1. *Soit* (B_0, B_1) *un couple d'interpolation. Alors*

i) [12, Th.3.3-(ii)] $L^\infty(B^\theta)$ *est isométriquement un sous espace fermé de* $Y^\theta = [L^\infty(B_0), L^\infty(B_1)]^\theta$

ii) [12, Prop. 3.6] $Y_\theta = [L^\infty(B_0), L^\infty(B_1)]_\theta$ *est isométriquement un sous espace fermé de* $L^\infty(B_\theta)$.

iii) [12, Prop. 3.6] *Si* B_0 *est un sous espace de* B_1 *non isomorphe à* B_1, Y_θ *est un sous espace strict de* $L^\infty(B_\theta)$.

Les assertions ii) et iii) ne sont pas utilisées dans la suite, mais nous semblent avoir un intérêt propre.

Nous réecrivons les preuves de [12] pour plus de clarté.

Démonstration du lemme 5.1. Soit X un espace de Banach. Notons $\mathcal{C} = (\mathcal{C}_k)_{k\geq 1}$ une suite d'ensembles mesurables de $\mathbb{T}$, de mesure > 0, deux à deux disjoints, dont la réunion est $\mathbb{T}$, p.s.. Soit $H^X_{\mathcal{C}} \subset L^\infty(X)$ le sous espace fermé des fonctions $\sum_{k\geq 1} x_k \otimes 1_{c_k}$, où la suite $(x_k)_{k\geq 1}$ est bornée dans X (la série converge p.s. dans X).

Il est clair que $H^X_{\mathcal{C}}$ est isométrique à $\ell^\infty(X)$. D'autre part $H^X_{\mathcal{C}}$ est 1-complémenté dans $L^\infty(X)$, par la projection $E^{\mathcal{C}} \otimes I_X$ où $E^{\mathcal{C}}$ est l'espérance conditionnelle sur L^∞ associée à la tribu engendrée par $(\mathcal{C}_k)_{k\geq 1}$.

Comme $H^{B_0}_{\mathcal{C}}, H^{B_1}_{\mathcal{C}}, H^{B_0+B_1}_{\mathcal{C}}$ sont 1-complémentés par $E^{\mathcal{C}} \otimes I_{B_0+B_1}$ respectivement dans $L^\infty(B_0), L^\infty(B_1), L^\infty(B_0 + B_1)$, les espaces $(H^{B_0}_{\mathcal{C}}, H^{B_1}_{\mathcal{C}})_\theta$ et $(H^{B_0}_{\mathcal{C}}, H^{B_1}_{\mathcal{C}})^\theta$ sont isométriquement des sous espaces fermés respectivement de Y_θ et Y^θ, par définition de ces interpolés. Ils sont aussi respectivement isomorphes isométriquement à F_θ et F^θ.

i) D'après le rappel ci-dessus, pour tout $\mathcal{C}$, $H^{B^\theta}_{\mathcal{C}}$ est isométrique à

$$(H^{B_0}_{\mathcal{C}}, H^{B_1}_{\mathcal{C}})^\theta.$$

D'après ce qui précède, ce dernier est un sous espace fermé de Y^θ. D'après [13, Chap. II, preuve du théorème de Pettis, réciproque, p.42] la réunion des espaces $H^X_{\mathcal{C}}$, lorsque $\mathcal{C}$ parcourt l'ensemble des suites comme ci-dessus, est dense en norme dans $L^\infty(X)$, ce qui prouve i).

ii) Y_θ se plonge avec norme 1 dans $(L^p(B_0), L^p(B_1))_\theta$, $p \in \left]1, +\infty\right[$. Ce dernier espace coincide isométriquement avec $L^p(B_\theta)$ d'après [4, th. 5.1.2]. Il en résulte que Y_θ s'injecte avec norme 1 dans $L^p(B_\theta)$ pour tout $p \in \left]1, +\infty\right[$, donc s'injecte avec norme 1 dans $L^\infty(B_\theta)$.

Soit $f \in Y_\theta$. Alors $f \in L^\infty(B_\theta)$, sous espace isométrique de $L^\infty(B^\theta)$ d'après le rappel (v) et d'après i)

$$\|f\|_{L^\infty(B_\theta)} \leq \|f\|_{Y_\theta} = \|f\|_{Y^\theta} = \|f\|_{L^\infty(B^\theta)},$$

donc l'inégalité est une égalité.

iii) Pour $\mathcal{C}$ fixé d'après ii) et le debut de la démonstration, la projection $E^{\mathcal{C}} \otimes I_{L^\infty(B_\theta)}$ envoie respectivement Y_θ sur $(H^{B_0}_{\mathcal{C}}, H^{B_1}_{\mathcal{C}})_\theta$ et $L^\infty(B_\theta)$ sur $H^{B_\theta}_{\mathcal{C}}$. $I_{L^\infty(B_\theta)}$ envoie respectivement Y_θ sur $(H^{B_0}_{\mathcal{C}}, H^{B_1}_{\mathcal{C}})_\theta$ et $L^\theta(B_\theta)$ sur $H^{B_\theta}_{\mathcal{C}}$. Si $Y_\theta = L^\infty(B_\theta)$ ces images concident. On en déduit que l'interpolé F_θ concide avec $\ell^\infty(B_\theta)$. Cela contredit [10, Prop. 1.11]. Donc Y_θ est un sous-espace strict de $L^\infty(B_\theta)$. $\square$

Lemme 5.2. *Soit (B_0, B_1) un couple d'interpolation tel que B_0 a RNP. Alors*

i) $Y^\theta = [L^\infty(B_0), L^\infty(B_1)]^\theta$ s'injecte avec norme 1 dans $L^\infty(B^\theta) = L^\infty(B_\theta)$, $\theta \in \left]0, 1\right[$.

ii) $Y^\theta = L^\infty(B^\theta) = L^\infty(B_\theta)$ *isométriquement.*

iii) *Si de plus* B_0 *est un sous espace de* B_1, $Y^\theta = Z^\theta$, *où*

$$Z^\theta = [\mathcal{L}(L^1, B_0), \mathcal{L}(L^1, B_1)]^\theta.$$

Démonstration. i) Il est clair que Y^θ s'injecte avec norme 1 dans

$$(L^p(B_0), L^p(B_1))^\theta, \quad p \in \,]1, +\infty[\,.$$

Comme B_0 a RNP, $B_\theta = B^\theta$ d'après d); d'après c) et d)

$$(L^p(B_0), L^p(B_1))^\theta = (L^p(B_0), L^p(B_1))_\theta.$$

On termine comme au début de la preuve du lemme 5.1 ii).

ii) Cela résulte de i) et et du lemme 5.1 i).

iii) Comme B_0 a RNP, $L^\infty(B_0) = \mathcal{L}(L^1, B_0)$ d'après b) d'où $Z^\theta = [L^\infty(B_0), \mathcal{L}(L^1, B_1)]^\theta$ isométriquement. Par hypothèse $L^\infty(B_0)$ est un sous espace de $L^\infty(B_1)$, lui même fermé dans $\mathcal{L}(L^1, B_1)$. On peut donc d'après a) remplacer $\mathcal{L}(L^1, B_1)$ par $L^\infty(B_1)$ dans la définition de Z^θ. □

Les exemples d'inclusions strictes annoncés dans l'introduction s'appuient sur le résultat suivant :

Théorème 5.3 ([15, Th.2]). *Il existe un couple d'interpolation* (C_0, C_1) *tel que* C_j *est isomorphe à* ℓ^1 $(j = 0, 1)$ *et* C_θ, $C_{\theta,p}$ *contiennent* c_0 *isomorphiquement,* $0 < \theta < 1$, $1 < p < +\infty$.

Proposition 5.4. *Soit* (C_0, C_1) *comme dans le Théorème 5.3. L'espace* $Z^\theta = [\mathcal{L}(L^1, C_0), \mathcal{L}(L^1, C_1)]^\theta = (L^\infty(C_0), L^\infty(C_1))^\theta = Y^\theta$ *est un sous-espace fermé strict de* $\mathcal{L}(L^1, C^\theta)$, $\theta \in \,]0, 1[\,$.

Démonstration. Comme C_0, C_1 ont RNP, $\mathcal{L}(L^1, C_j) = L^\infty(C_j)$ d'après b) et $C_\theta = C^\theta$ d'après le rappel d). En particulier $Y^\theta = Z^\theta$. D'après le lemme 5.2 i), l'identité: $Y^\theta \to L^\infty(C^\theta)$ est continue.

Supposons qu'il existe $\theta \in \,]0, 1[$ tel que Z^θ coincide avec $\mathcal{L}(L^1, C^\theta)$. Alors l'identité: $\mathcal{L}(L^1, C_\theta) \to L^\infty(C_\theta)$ est continue, donc ces espaces coincident, ce qui est impossible, car C_θ contient c_0 isomorphiquement. □

Dans les problèmes d'interpolation certaines propriétés peuvent être fausses en général pour un couple quelconque mais être vraies pour les couples (A_0, A_1) où A_0 s'injecte continûment dans A_1. Cela justifie l'intérêt du théorème suivant.

Théorème 5.5. *Il existe un couple d'interpolation* (B_0, B_1), *où* B_0 *a* RNP, B_0 *est un sous espace de* B_1, *l' injection étant continue, tel que, pour tout* $\theta \in \,]0, 1[\,$, *avec les notations du Lemme 5.2,* $Z^\theta = Y^\theta = L^\infty(B^\theta) = L^\infty(B_\theta)$ *est un sous-espace isométrique strict de* $\mathcal{L}(L^1, B^\theta) = \mathcal{L}(L^1, B_\theta)$.

Démonstration. Soient $B_0 = C_0$ et $B_1 = C_0 + C_1$ où C_0, C_1 sont définis dans le théorème 5.3. D'après le rappel d) $B_\theta = B^\theta$.

i) Montrons d'abord que B_θ, $\theta \in]0,1[$, contient c_0 isomorphiquement.

Notons $(C_0 \cap C_1, C_1)_{\theta,p} = X_{\theta,p}$, qui s'injecte continûment dans $B_{\theta,p} = (C_0, C_0 + C_1)_{\theta,p}$. D'après [16, Th. 1.4, (1.13)], $(X_{\theta,p}, B_{\theta,p})_{1-\theta,p} = C_{\theta,p}$.

Comme $C_{\theta,p}$ contient c_0 isomorphiquement d'après [17, Th.2], $B_{\theta,p}$ contient c_0 isomorphiquement. Le Corollaire 3.6 montre que B_θ contient c_0 isomorphiquement.

Il en résulte que B_θ n'a pas RNP, donc d'après le rappel b) $L^\infty(B_\theta)$ est un sous-espace isométrique strict de $\mathcal{L}(L^1, B_\theta)$.

Les égalités concernant Z^θ proviennent du lemme 5.2 ii) et iii) et des hypothèses. $\square$

Remarque 5.6. On peut utiliser le couple (B_0, B_1) du théorème précédent pour obtenir des résultats analogues à ceux de [6, Prop. 5.2 - Rem. 6.3], concernant l'interpolation des espaces de Hardy de fonctions analytiques à valeurs vectorielles. Par exemple $[H^p(\mathbb{T}, B_0), H^p(\mathbb{T}, B_1]_\theta$ est un sous-espace strict de $H^p(\mathbb{T},B_\theta)$ et de même pour les interpolés réels θ, p, $0 < \theta < 1$, $1 \le p < +\infty$.

Pour un couple d'interpolation (B_0, B_1), notons $\overline{\mathcal{B}}_p$ le couple

$$(VB^p(B_0), VB^p(B_1)), \quad p \in]1, \infty].$$

LEMME 5.7. *Pour tout couple (B_0, B_1), $(VB^p(B_0), VB^p(B_1))^\theta$ se plonge continûment dans $VB^p(B^\theta)$, $1 < p \le \infty$, $0 < \theta < 1$. Il en est de même pour $(VB^p(B_0), VB^p(B_1))_\theta$ et $VB^p(B_\theta)$.*

Démonstration. Le deuxième cas est connu, voir par exemple [10, (2.4)], en identifiant $VB^p(X)$ à $\mathbf{h}^p(X)$.

Dans le premier cas, soient $T \in (VB^p(B_0), VB^p(B_1))^\theta$ et $g \in \mathcal{G}(\mathcal{B}_p)$ tels que $g'(\theta) = T$. Il est clair que, pour tout $f \in L^{p'}$, $g(.)(f) \in \mathcal{G}(B_0, B_1)$, donc $g'(\theta)(f) \in B^\theta$. Pour $\tau, \tau' \in \mathbb{R}$ ($\tau \neq \tau'$), soit $\psi^j_{\tau,\tau'} \in L^{p+}$ associée isométriquement à $\frac{g(j+i\tau)-g(j+i\tau')}{\tau-\tau'} \in VB^p(B_j)$, $j \in \{0,1\}$. Alors, posant $\varphi_{\tau,\tau'} = \max(\psi^0_{\tau,\tau'}, \psi^1_{\tau,\tau'})$,

$$\left\|g'(\theta)(f)\right\|_{B^\theta} \le \int_{\mathbb{T}} |f(t)|\, \varphi_{\tau,\tau'}(t) \mathrm{d}m(t), \ \forall f \in L^{p'}.$$

Le plongement cherché s'en déduit, puisque

$$\begin{aligned} \|T\|_{VB^p(B^\theta)} &\le \left\|\varphi_{\tau,\tau'}\right\|_{L^p} \le \left\|\psi^0_{\tau,\tau'}\right\|_{L^p} + \left\|\psi^1_{\tau,\tau'}\right\|_{L^p} \\ &\le 2\left\|g^{\cdot}\right\|_{\mathcal{QG}(\mathcal{B}_p)}. \end{aligned}$$

$\square$

Soient X un espace de Banach, $T \in \mathcal{L}(L^1, X)$ et $\psi \in L^p$, $p \in]1, \infty[$. On définit $T \odot \psi \in VB^p(X)$ par

$$T \odot \psi(f) = T(f\psi), \; f \in L^{p'}.$$

d'où $\|T \odot \psi\|_{VB^p(X)} \leq \|T\|_{\mathcal{L}(L^1,X)} \|\psi\|_{L^p}$.

Proposition 5.8. *Soient (B_0, B_1) un couple d'interpolation et $\theta \in]0,1[$. Supposons que $Z^\theta = (\mathcal{L}(L^1, B_0), \mathcal{L}(L^1, B_1))^\theta = \mathcal{L}(L^1, B^\theta)$ isomorphiquement. Alors $(VB^p(B_0), VB^p(B_1))^\theta = (VB^p(B^\theta)$, isomorphiquement pour tout $p \in]1, \infty[$.*

Démonstration. D'après le lemme 5.7, il suffit de montrer que $VB^p(B^\theta)$ se plonge continûment dans $(VB^p(B_0), VB^p(B_1))^\theta$.

Soient $T \in VB^p(B^\theta)$ de norme 1 et $\psi \in L^p$ associée isométriquement à T. Soient $\varepsilon > 0$ et $V_\varepsilon(f) = T(\frac{f}{\psi+\varepsilon})$, $f \in L^1$. Par définition $V_\varepsilon \in \mathcal{L}(L^1, B^\theta)$ donc, par hypothèse, $V_\varepsilon \in Z^\theta$. Par conséquent, il existe $g_\varepsilon \in \mathcal{G}(\mathcal{B}_\infty)$ telle que $g'_\varepsilon(\theta) = V_\varepsilon$ et $\|g_\varepsilon\|_{\mathcal{QG}(\mathcal{B}_\infty)} \leq C \|V_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(L^1,B^\theta)} + \varepsilon \leq C + \varepsilon$, où C est la constante d'isomorphisme.

On définit h_ε par $h_\varepsilon(z) = g_\varepsilon(z) \odot (\psi + \varepsilon)$, $z \in S$. Il est clair que $h_\varepsilon \in \mathcal{G}(\mathcal{B}_p)$, que $h'_\varepsilon(\theta) = g'_\varepsilon(\theta) \odot (\psi + \varepsilon) = T$ et que

$$\|h_\varepsilon\|_{\mathcal{G}(\mathcal{B}_p)} \leq \|g_\varepsilon\|_{\mathcal{G}(\mathcal{B}_\infty)} \|\psi + \varepsilon\|_{L^p} \leq (C + \varepsilon) \|\psi + \varepsilon\|_{L^p}. \qquad \square$$

Dans le reste de cette partie, (A_0, A_1) est un couple d'interpolation tel que A_0 soit un sous-espace vectoriel de A_1, l'identité $i : A_0 \to A_1$ étant continue et $\|i\| \leq 1$. Pour tout $\theta \in]0,1[$, on note $A_\theta^+ = \bigcap_{\theta<\beta<1} A_\beta$, A_θ^+ est un espace de Banach pour la norme suivante :

$$\|a\|_{A_\theta^+} = \sup \left\{ \|a\|_{A_\beta} ; \; \theta < \beta < 1 \text{ et } a \in A_\theta^+ \right\}.$$

L'espace A_θ^+ a été introduit dans [12].

Dans [7], on donne un espace d'interpolation (E_0, E_1) pour lequel

$$(L^p(E_0), L^p(E_1))^\theta \neq L^p(E^\theta), \quad 0 < \theta < 1, \; 1 < p < +\infty.$$

Dans cette partie on montre le résultat de [7] en remplaçant l'espace E^θ par E_θ^+.

Remarque 5.9. Pour tout p$\in [1, +\infty[$ L$^p(A_\theta^+)$ s'injecte continûment dans $[L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$. En effet, pour tout $\beta \in [\theta, 1[$ L$^p(A_\theta^+)$ s'injecte continûment dans L$^p(A_\beta)$; d'après [4, Th. 5.1.2], L$^p(A_\beta) = [L^p(A_0), L^p(A_1)]_\beta$, donc L$^p(A_\theta^+)$ s'injecte continûment dans $[L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$.■

Définition 5.10. Soient X et Y deux espaces de Banach; un opérateur borné $T : X \to Y$ est de Radon-Nikodym si, pour toute fonction $f \in \mathbf{h}^\infty(X)$ la fonction $z \in D \to T[f(z)]$ admet des limites radiales presque-partout dans Y.

PROPOSITION 5.11. *Supposons que l'injection canonique $i_{\theta,\beta_0} : A_\theta \to A_{\beta_0}$ est un opérateur de Radon-Nikodym pour un $\beta_0 \in [\theta, 1[$ et que $L^p(A_\theta^+) = [L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$, pour un $p \in]1, +\infty[$. Alors A_θ^+ a la propriété de Radon-Nikodym, en particulier A_θ a la propriété de Radon-Nikodym.*

Démonstration. Comme dans le Lemme 2.11 de [12], on montre que $i_{\theta,\beta} : A_\theta \to A_\beta$ est un opérateur de Radon-Nikodym, pour tout $\beta \in [\theta, 1[$, donc $\mathbf{h}^p(A_\theta^+)$ s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^p(A_\beta)$. D'autre part, d'après [4, Th. 5.1.2], $L^p(A_\beta) = [L^p(A_0), L^p(A_1)]_\beta$, donc $\mathbf{h}^p(A_\theta^+)$ s'injecte continûment dans $[L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$. D'après l'hypothèse, $\mathbf{h}^p(A_\theta^+)$ s'injecte continûment dans $L^p(A_\theta^+)$, il en résulte que $\mathbf{h}^p(A_\theta^+) = L^p(A_\theta^+)$. D'après [8], A_θ^+ a la propriété de Radon-Nikodym. La Proposition 2.20 de [12], montre que A_θ est un sous-espace isométrique de A_θ^+, donc A_θ a la propriété de Radon-Nikodym. □

COROLLAIRE 5.12. *Il existe un couple d'interpolation (B_0, B_1), tel que B_0 est un sous-espace vectoriel de B_1 et que $L^p(B_\theta^+) \subsetneq [L^p(B_0), L^p(B_1)]_\theta^+$, pour tout $p \in]1, +\infty[$.*

Démonstration. D'après [12, Th.2.2], il existe un couple d'interpolation (B_0, B_1) tel que B_0 est un sous-espace vectoriel de B_1, que l'identité $: B_\theta \to B_\beta$ est un oprérateur de Radon-Nikodym, $0 < \theta < \beta < 1$ et que B_θ n'a pas la propriété de Radon-Nikodym. D'après la Proposition 5.11, $\mathrm{L}^p(B_\theta^+) \subsetneq [L^p(B_0), L^p(B_1)]_\theta^+$, pour tout p$\in]1, +\infty[$. □

PROPOSITION 5.13. *Supposons que A_θ^+ a la propriété de Radon-Nikodym, $0 < \theta < 1$. Alors $L^p(A_\theta^+) = [L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$, $p \in]1, +\infty[$.*

Démonstration. D'après la Remarque 5.9, il suffit de montrer que

$$[L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$$

s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^p(A_\theta^+)$.

Pour tout $\beta \in]\theta, 1[$,

$$[L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$$

s'injecte continûment dans $[L^p(A_0), L^p(A_1)]_\beta$, d'après [4, Th.5.1.2], ce dernier s'identifie à $L^p(A_\beta)$, donc $[L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$ s'injecte continûment dans $\mathbf{h}^p(A_\beta)$, pour tout $\beta \in]\theta, 1[$. Il en résulte que $[L^p(A_0), L^p(A_1)]_\theta^+$ s'injecte continûment dans $\mathbf{h}^p(A_\theta^+)$ qui s'identifie à $L^p(A_\theta^+)$, car A_θ^+ a la propriété de Radon-Nikodym. □

Remarque 5.14. Si $[L^\infty(A_0), L^\infty(A_1)]_\theta^+$ s'injecte continûment dans $\mathrm{L}^\infty(A_\theta^+)$ et l'injection $\mathrm{i}_{\theta,\beta_0} : A_\theta \to A_{\beta_0}$ est un opérateur de Radon-Nikodym pour un $\beta_0 \in]\theta, 1[$, alors A_θ^+ a la propriété de Radon-Nikodym.

Proposition 5.15. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $p \in]1, +\infty]$. Supposons que $(VB^p(A_0), VB^p(A_1))_\beta$ est un sous-espace isométrique de $VB^p(A_\beta)$ pour tout $\beta \in]\theta, 1[$. Alors $(VB^p(A_0), VB^p(A_1))_\theta^+$ est un sous-espace isométrique de $VB^p(A_\theta^+)$.*

Démonstration. Par un argument analogue à celui du Lemme 5.7, on montre que $(VB^p(A_0), VB^p(A_1))_\theta^+$ s'injecte continûment (avec norme≤ 1) dans $VB^p(A_\theta^+)$.

Soient maintenant $(\theta_n)_{n\geq 0}$ une suite décroissante convergeant vers θ et $T \in (VB^p(\mathbb{T}, A_0), VB^p(\mathbb{T}, A_1))_\theta^+$. On a alors

$$\begin{aligned} \|T\|_{(VB^p(A_0),VB^p(A_1))_\theta^+} &= \sup_{n\geq 0} \|T\|_{(VB^p(A_0),VB^p(A_1))_{\theta_n}} \\ &= \sup_{n\geq 0} \|T\|_{VB^p(A_{\theta_n})} \leq \|T\|_{VB^p(A_\theta^+)} . \end{aligned}$$

Il en résulte que $\|T\|_{(VB^p(A_0),VB^p(A_1))_\theta^+} = \|T\|_{VB^p(A_\theta^+)}$. $\square$

Supposons maintenant que l'injection $i : A_0 \to A_1$ est d'image dense. Notons A_0' l'adhérence de $i^*(A_1^*)$ dans A_0^*. on voit que (A_0', A_1^*) est un couple régulier; d'après [12, Lemme 2.19], pour tout $0 < \theta < 1$, A^θ se plonge continûment dans $((A_0')^*, A_1^{**})^\theta$. Désignons par $\overline{A}^\theta$ le complété de A^θ dans $((A_0')^*, A_1^{**})^\theta$, $0 < \theta < 1$.

Corollaire 5.16. *Soient $\theta \in]0,1[$ et $p \in]1, +\infty]$. Supposons que (A_0, A_1) est un couple régulier et que $(VB^p(A_0), VB^p(A_1))_\beta$ est un sous-espace isométrique de $VB^p(A_\beta)$, pour tout $\beta \in]\theta, 1[$. Alors $\overline{(VB^p(A_0), VB^p(A_1))}^\theta$ est un sous-espace isométrique de $VB^p(\overline{A}^\theta)$.*

Démonstration. Montrons que $\overline{(VB^p(A_0), VB^p(A_1))}^\theta$ se plonge continûment dans $VB^p(\overline{A}^\theta)$. En effet, d'après le Lemme 5.7, $(VB^p(A_0), VB^p(A_1))^\theta$ se plonge continûment dans $VB^p(A^\theta)$, il suffit donc de montrer que

$$[VB^p(A_0), VB^p(A_1)]^\theta$$

se plonge continûment dans $VB^p(\overline{A}^\theta)$.

Pour tout $T \in [VB^p(A_0), VB^p(A_1)]^\theta$ et tout $f \in L^{p'}$ nous avons que

$$\begin{aligned} \|Tf\|_{\overline{A}^\theta} &= \sup\left\{ |\langle T(f), a^*\rangle| ;\ \|a^*\|_{(A_0^*,A_1^*)_\theta} \leq 1 \right\} \\ &= \sup\left\{ |\langle T, f\otimes a^*\rangle| ;\ \|a^*\|_{(A_0^*,A_1^*)_\theta} \leq 1 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \|T\|_{\overline{(VB^p(A_0),VB^p(A_1))}^{\theta}} \\
&\quad \times \sup\left\{\|f\otimes a^*\|_{[[VB^p(A_0),VB^p(A_1)]_\theta]^*}\,;\ \|a^*\|_{(A_0^*,A_1^*)_\theta}\leq 1\right\} \\
&\leq \|T\|_{\overline{(VB^p(A_0),VB^p(A_1))}^{\theta}} \times \|f\|_{L^{p'}}\,.
\end{aligned}$$

Il en résulte que $Tf \in \overline{A}^{\theta}$ et $\|Tf\|_{\overline{A}^{\theta}} \leq \|T\|_{\overline{(VB^p(A_0),VB^p(A_1))}^{\theta}} \times \|f\|_{L^{p'}}$. Ceci implique que $[VB^p(A_0), VB^p(A_1)]^{\theta}$ se plonge continûment dans $VB^p(\overline{A}^{\theta})$. D'après [12, Prop. 2.20], $\overline{(VB^p(A_0), VB^p(A_1))}^{\theta}$ est un sous-espace isométrique de $(VB^p(A_0), VB^p(A_1))_{\theta}^{+}$, ce dernier se plonge isométriquement dans $VB^p(A_\theta^+)$ d'après la Proposition 5.15. Finalement $VB^p(\overline{A}^{\theta})$ est un sous-espace isométrique de $VB^p(A_\theta^+)$ (car d'après [12, Prop. 2.20] $\overline{A}^{\theta}$ est un sous-espace isométrique de A_θ^+), d'où le corollaire. □

Rappelons que $B_0 = C_0$ et $B_1 = C_0 + C_1$.

Proposition 5.17. $\overline{(VB^p(B_0), VB^p(B_1))}^{\theta}$ *est un sous-espace isométrique strict de* $VB^p(\overline{B}^{\theta})$ *pour tout* $\theta \in \,]0,1[$ *et tout* $p \in \,]1,+\infty]$.

Démonstration. Fixons $\theta \in \,]0,1[$ et $p \in \,]1,+\infty]$. Montrons que

$$\overline{(VB^p(B_0), VB^p(B_1))}^{\theta}$$

est un sous-espace isométrique de $VB^p(\overline{B}^{\theta})$.

D'après le Corollaire 5.16, il suffit montrer que $(VB^p(B_0), VB^p(B_1))_\beta$ est un sous-espace isométrique de $VB^p(B_\beta)$, pour tout $\beta \in \,]\theta,1[$.

Soit $\beta \in \,]\theta,1[$.

Cas 1: $p < +\infty$. Comme B_0 a la propriété de Radon-Nikodym, d'après [11, pro.2.3] $(VB^p(B_0), VB^p(B_1)_\beta = L^p(B_\beta)$ qui est un espace isométrique de $VB^p(B_\beta)$.

Cas 2: $p = +\infty$. D'après le rappel (v) $(VB^\infty(B_0), VB^\infty(B_1)_\beta$ est un sous-espace isométrique de $(VB^\infty(B_0), VB^\infty(B_1)^\beta$ qui est un sous-espace isométrique de $VB^\infty(B_\beta)$ d'après le Théorème 5.5.

Supposons maintenant que $\overline{(VB^p(B_0), VB^p(B_1))}^{\theta} = VB^p(\overline{B}^{\theta})$ pour un $\theta \in \,]0,1[$. Soit $\beta \in \,]\theta,1[$. Remarquons que $\overline{(VB^p(B_0), VB^p(B_1))}^{\theta}$ s'injecte continûment dans $(VB^p(B_0), VB^p(B_1))_\beta$ qui est un sous-espace isométrique de $L^p(B_\beta)$ d'après ce qui précède. Donc $VB^p(\overline{B}^{\theta})$ s'injecte continûment dans $L^p(B_\beta)$, comme B_θ est un sous-espace isométrique de $\overline{B}^{\theta}$, l'injection : $B_\theta \to B_\beta$ est un opérateur de Radon-Nikodym.

Soient $\alpha \in \,]0,\theta[$ et $\alpha' \in \,]\beta,1[$. D'après le théorème de réitération [4, Th. 4.7.2] $(B_\alpha, B_\theta)_{\eta,2} = B_{\gamma,2}$, et $(B_\beta, B_{\alpha'})_{\eta',2} = B_{\gamma',2}$, où $\gamma = (1-\eta)\alpha + \eta\theta$, $\gamma' = (1-\eta')\beta + \eta'\alpha'$, donc $B_{\gamma,2} \subset B_\theta \subset B_\beta \subset B_{\gamma',2}$. Il en résulte que l'injection : $B_{\gamma,2} \to B_{\gamma',2}$ est un opérateur de Radon-Nikodym, d'après [12, Th. 2.9] $B_{\gamma,2}$ a la propriété de Radon-Nikodym, à la preuve du Théorème 5.5, nous avons vu que ceci est impossible. $\square$

Proposition 5.18. *Supposons que l'injection $i : A_0 \to A_1$ est faiblement compacte. Alors pour tout $\theta \in \,]0,1[$, A_θ^+ est un espace dual.*

Démonstration.

Etape 1. Montrons que l'injection canonique $i_{\theta,\beta} : A_\theta \to A_\beta$ est faiblement compacte, $\theta < \beta < 1$. En effet, considérons γ un nombre tel que $\theta < \gamma < \beta$. D'après [4, Th. 4.7.2], $A_{\gamma,2}$ est un interpolé entre A_θ et A_β. D'autre part, d'après [2, Prop. III.I], $A_{\gamma,2}$ est un espace réflexif, donc $i_{\theta,\beta} : A_\theta \to A_\beta$ est faiblement compacte.

Etape 2. Montrons que $(i_{\theta,\beta})^* : A_\beta^* \to (A_0^*, A_1^*)_\theta$, $\theta < \beta < 1$. En effet, soit $\theta < \delta < \beta$; on a $(i_{\delta,\beta})^* : A_\beta^* \to A_\delta^*$. D'après le rappel (ii-bis), $A_\delta^* = (A_0^*, A_1^*)^\delta$. En appliquant le résultat de [12, Lemme 2.3], on voit que $(A_0^*, A_1^*)^\delta$ se plonge continûment dans $(A_0^*, A_1^*)_\theta$, donc $(i_{\delta,\beta})^* : A_\beta^* \to A_\delta^*$ et A_δ^* se plonge continûmement dans $(A_0^*, A_1^*)_\theta$; c'est à dire que $(i_{\theta,\beta})^* : A_\beta^* \to (A_0^*, A_1^*)_\theta$.

D'après l'étape 1 et 2, $(i_{\theta,\beta})^{**} : [(A_0^*, A_1^*)_\theta]^* \to A_\beta$, pour tout $\beta \in \,]\theta,1[$. D'autre part, d'après l'étape 2, $(i_{\theta,\beta})^*$ est d'image dense, (car A_β^* est dense dans $(A_0^*, A_1^*)_\theta$ d'après le rappel (i)), donc $(i_{\theta,\beta})^{**} = J \ : [(A_0^*, A_1^*)_\theta]^* \to A_\theta^+$ est injective.

Etape 3. Montrons que A_θ^+ se plonge continûment dans $[(A_0^*, A_1^*)_\theta]^*$. En effet, notons Z l'adhérence de A_1^* dans A_0^*. D'après [12, Lemme 2.19], A_β se plonge isométriquement dans $\Big[(A_0^*, A_1^*)_\beta\Big]^*$, pour tout $\beta \in \,]\theta,1[$. Le rappel a) nous montre que $(A_0^*, A_1^*)_\beta = (A_0^*, Z)_\beta$, donc $A_\theta^+ = \bigcap_{1>\beta>\theta} A_\beta$ se plonge continûment dans $\bigcap_{1>\beta>\theta} \Big[(A_0^*, A_1^*)_\beta\Big]^* = \bigcap_{1>\beta>\theta} \Big[(A_0^*, Z)_\beta\Big]^*$. D'après rappel (ii-bis), $\Big[(A_0^*, Z)_\beta\Big]^* = (A_0^{**}, Z^*)^\beta$. D'autre part d'après [12, prop.2.21], $\bigcap_{1>\beta>\theta} (A_0^{**}, Z^*)^\beta = (A_0^{**}, Z^*)^\theta = [(A_0^*, A_1^*)_\theta]^*$. Il en résulte que A_θ^+ se plonge continûment dans $[(A_0^*, A_1^*)_\theta]^*$.

Etape 4. Montrons que $J(x) = x$, pour tout $x \in [(A_0^*, A_1^*)_\theta]^*$. En effet, soient $x \in [(A_0^*, A_1^*)_\theta]^*$, $\beta \in \,]\theta,1[$ et $x^* \in A_\beta^*$. On a alors

$$\langle J(J(x)), x^* \rangle = \langle (i_{\theta,\beta})^{**}(J(x)), x^* \rangle = \langle J(x), (i_{\theta,\beta})^* x^* \rangle = \langle (J(x), x^* \rangle .$$

Donc J(J(x))=J(x), comme J est injective, $J(x) = x$. $\square$

COROLLAIRE 5.19. *Supposons que l'injection* $i\ : A_0 \to A_1$ *est faiblement compacte et que* $A_\theta^+ = A_\theta$. *Alors* A_θ *est un espace dual.*

COROLLAIRE 5.20. *Sous les hypothèses du corollaire 5.19,* A_θ *a la propriété de Radon-Nikodym.*

Démonstration. On peut supposer que A_0 est séparable, d'après [10, rappel c)], A_θ est séparable, en utilisant le corollaire 5.19, on voit que A_θ est un dual séparable et d'après [13, chap.VII,2,cor.8], A_θ a la propriété de Radon-Nikodym. $\square$

Exemple 3. Soit ψ :$\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ une fonction convexe croissante tel que $\psi(0) = 0$, $\frac{\psi(t)}{t} \underset{t\to+\infty}{\to} +\infty$ et $\psi(t) \geq t$, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$. Notons L^ψ l'espace d'Orlitz associée à ψ, comme $\psi(t) \geq t$, L^ψ s'injecte continûment dans L^1. Montrons que L^{φ_θ} est un espace dual, où φ_θ est donnée par sa fonction réciproque

$$\varphi_\theta^{-1}(t) = t^\theta \left[\psi^{-1}(t)\right]^{1-\theta}, t \in \mathbb{R}^+.$$

En effet, comme ψ est convexe et $\frac{\psi(t)}{t} \to_{t\to\infty} +\infty$, l'identité $j\ : L^\psi \to L^1$ est faiblement compacte [1, Rem., p. 123].

La preuve de [10, Lemme 1.2] montre que, pour tout θ, $(L^\psi, L^1)_\theta = (L^\psi, L^1)^\theta = L^{\varphi_\theta}$. D'autre part, $L^{\varphi_\theta} = (L^\psi, L^1)_\theta^+$. D'après le Corollaire 5.19, $(L^\psi, L^1)_\theta = (L^\psi, L^1)^\theta = L^{\varphi_\theta}$ est un espace dual.

Comme L^{φ_θ} est un espace séparable, d'aprèss [13, Chap. VII,2, Cor. 8], il a la propriété RNP.

Remerciement. Je remercie chaleureusement le professeur Françoise Lust-Piquard, le professeur Bernard Maurey et le professeur Gille Pisier pour le temps qu'ils m'ont consacré lors de la préparation de ce travail.

REFERENCES

[1] B. Beauzamy, *Opérateurs uniform ément convexifiants*. Studia Math. **57** (1976), 103–139.

[2] B. Beauzamy, *Espaces d'interpolation réels: topologie et géométrie*. Lecture Notes in Math. **666**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1978.

[3] J. Bergh, *On the relation between the two complex methods of interpolation* Indiana Univ. Math. J. **28** (1979), 775–777.

[4] J. Bergh and J. Löfström, *Interpolation Spaces. An Introduction.* Grundlehren Math. Wiss. **223**. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.

[5] O. Blasco, *Boundary values of vector valued harmonic functions considered as operators*. Studia Math. **VXXXVI** (1987), 19–33.

[6] O. Blasco and Q. Xu, *Interpolation between vector valued spaces.* J. Funct. Anal. **10** (1991), *2*, 331–359.

[7] A.V. Bukhvalov, *Interpolation of linear operators in spaces of vector-valued functions and mixed norm.* Sib. Math. J. **28** (1987), *1*, 24–36.

[8] A.V. Bukhvalov and A.A. Danilevich, *Boundary properties of analytic harmonic functions with values in Banach spaces.* Math. Zametki **31** (1982), 203–214.

[9] M. Daher, *Propriétés géométriques de* $\mathbf{h}^p(\mathbb{D}, X)$ *et généralisations.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **20** (2011), *2*, 439–463.

[10] M. Daher, *Interpolation des espaces de Hardy vectoriels.* Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **4** (2015), *2*, 389–425.

[11] M. Daher, *Some remarks on the interpolation spaces* A^θ, A_θ. Comment. Math. Univ. Carolin. **57** (2016), *3*, 1–15.

[12] M. Daher, *Interpolation des opérateurs de Radon-Nikodym et des espaces* L^p_Λ, h^p_Λ. Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **26** (2017), *1*, 1–22.

[13] J. Diestel and J.J. Uhl, *Vector Measures.* Math. Surveys **15**, American Mathematical Society (AMS), 1977.

[14] N. Dinculeanu, *Vector Measures.* Pergamon, New-York, 1967.

[15] D.J.H. Garling and S.J. Montgomery- Smith, *Complemented subspaces of spaces obtained by interpolation.* J. Lond. Math. Soc. (2) **44** (1991), *3*, 503–513.

[16] M. Haase, *Identification of some real interpolation spaces.* Proc. Amer. Math. Soc. **134** (2006), *8*, 2349–2358.

[17] M. Levy, *The real interpolation space* $(A_0, A_1)_{\theta,p}$ *contains* ℓ_p. Publ. Math. Univ. Pierre et Marie Curie, Sémin. Initiation Anal. 19ème année, Exp. No. 3, 1980.

Received March 19, 2020

Mohammad Daher
daher.mohammad@ymail.com