INSTITUTUL DE MATEMATICĂ ”SIMION STOILOW” AL ACADEMIEI ROMÂNE

R E Z U M A T

TEZĂ DE DOCTORAT

METODE ANALITICE ŞI PROBABILISTE DE TEORIA POTENŢIALULUI

Perturbări cu funcţii ale operatorilor neliniari

Coordonator ştiinţific: **Prof. Dr. Lucian BEZNEA**

Doctorand: **Marian HAIDUCU**

Bucureşti, 2014

Rezumat

Lucrarea de faţă, propusă ca teză de doctorat, se încadrează în domeniul teoriei neliniare a potenţialului. Sunt dezvoltate tehnici care utilizează rezolvante neliniare asociate unui operator perturbat. Mai precis, ţinta a fost studiul operatorului Monge-Ampère prin intermediul unei funcţii nenegative, măsurabilă şi mărginită h.

O tehnică principală utilizată în studiul operatorilor de tip

$$\Delta - h$$

este clasica formulă Feynman-Kac

$$P_t^h f(x) = E^x \left(e^{-\int_0^t h(B_s)ds} f(B_t) \right)$$

unde B_t este mişcarea browniană, iar $(P_t^h)_{t\geq 0}$ este semigrupul având $\Delta - h$ ca generator infinitezimal. O metodă analoagă, analitică, utilizează rezolvanta de nuclee asociată, iar nucleul $V_h := (\Delta - h)^{-1}$ joacă un rol central ([1], [5], [8], [9]). Acesta este nucleul iniţial al rezolvantei submarkoviene $(V_{h+p})_{p\in(0,\infty)}$ şi satisface principiul complet de maxim. O astfel de funcţie h este numită *exactă* de H. Ben Saad ([1]).

În lucrare se abordează această problematică pentru operatorul Monge-Ampère. Formal se urmăreşte înlocuirea operatorului (liniar) Laplace cu operatorul Monge-Ampère, şi se construieşte un operator neliniar corespunzător lui V_h care satisface principiul complet de maxim în sensul dezvoltat de C. Dellacherie ([13], a se vedea şi [15], [18], [20]). De fapt, abordarea se va face într-un cadru neliniar mai general, operatorul Monge-Ampère fiind astfel un exemplu. Se particularizează contextul general al operatorilor neliniari care satisfac principiul complet de maxim şi care generează o rezolvantă neliniară, având V_h ca operator iniţial.

În acest sens, este definită funcţia exactă relativ la un operator neliniar, care este analoagă celei din cazul liniar, menţionat mai sus. Este fixat astfel cadrul general abstract al problemei şi anume o algebră de funcţii mărginite $\mathcal{L}$ care conţine constantele, presupusă a fi Banach în raport cu norma uniformă (în particular latice vectorială relativ la ordinea punctuală).

Se demonstrează că orice funcţie nenegativă din $\mathcal{L}$ este exactă, deci şi orice constantă reală nenegativă, ceea ce permite, în prezenţa principiului

complet de maxim (ipoteză obligatorie şi în cazul liniar) să se construiască rezolvante neliniare submarkoviane asociate operatorului neliniar iniţial şi respectiv cu operatorul neliniar perturbat.

Trecându-se la studiul operatorului asociat problemei Dirichlet cu date zero pe frontieră, pentru ecuaţia Monge-Ampère (numit în continuare operatorul Monge-Ampère), se aplică rezultatele obţinute în situaţia abstractă si se realizează astfel programul propus.

Teza are o introducere, studiul propriu-zis fiind împărţit în două părţi şi un apendix. Fiecare parte este structurată în câte două capitole.

Prima parte intitulată "Operatori neliniari, rezolvente asociate, perturbări", este consacrată prezentării cadrului general în care se încadrează lucrarea. **Capitolul 1** ("Preliminarii") este împărţit în patru paragrafe şi este bazat pe rezultate din [3], [13], [17], [18] şi [23]. În primul dintre ele ("Operatori neliniari"), se fixează conceptele general acceptate în teoria neliniară a potenţialului. Sunt definite noţiunile de operator neliniar, funcţie Lipschitz (şi operator Lipschitz), operator neliniar submarkovian, operator neliniar mărginit şi sunt prezentate, câteva rezultate necesare şi care sunt aplicate situaţiei concrete din lucrare.

Paragraful "Principii de maxim" se ocupă de introducerea proprietătilor menţionate în titlu, de interes deosebit fiind legătura dintre aceste principii şi proprietatea de submarkovianitate, existentă în cazul perechilor de operatori conjugaţi. Tot aici sunt reamintite conceptele de funcţii dominante (conform cu [21]).

Al treilea paragraf "Operatori hölderieni. Rezolvante neliniare" se ocupă de un operator general supus proprietăţii de a fi hölderian şi compact (aşa cum este operatorul Monge-Ampère) şi de rezolvantele neliniare submarkoviene asociate lui.

În ultimul paragraf "Extensii naturale ale operatorilor" studiem proprietatea de continuitate la stânga în ordine a unui operator neliniar, în prezenţa careia operatorul poate fi extins în mod natural la clasa funcţiilor inferior mărginite, cu păstrarea proprietăţii de continuitate menţionată, cât şi a unor variante de principii de maxim.

Capitolul 2 al acestei prime părţi, numit "Perturbări cu funcţii", are în vedere atingerea primului scop propus în planul iniţial. În paragraful 2.1 ("Funcţii exacte") se extinde conceptul corespunzător din cazul liniar, propunându-se o definiţie în concordanţă cu cea a lui Ben Saad ([1]), şi sunt studiate proprietăţile operatorului generat de exactitatea unei funcţii mărginite h. În prezenţa unui operator neliniar V şi a unei funcţii V-exacte h, se demonstrează că proprietatea lui V de a satisface principiul complet de maxim se transferă asupra operatorului rezultat (notat V_h), se arată că mulţimea funcţiilor V-exacte este stabilă în raport cu adunarea lor, se pune în evidenţă faptul că proprietatea lui h de a fi V-exactă este "ereditară" (în două sensuri: h este V_h exactă respectiv orice funcţie nenegativă mai mică decît h este şi ea V-exactă). Rezultatul final al paragrafului este acela că orice funcţie nenegativă din $\mathcal{L}$ (algebra de funcţii fixată iniţial) este V-exactă (fiind aici cuprinse şi funcţiile constante nenegative).

Al doilea paragraf face o incursiune în evoluţia problematicii perturbării în cazul liniar. Sunt reamintite rezultatele, devenite clasice ale lui M. F. Bronner ([12]) şi F. Hirsch ([16]). Este prezentat conceptul liniar de funcţie V-exactă (conform cu H. Ben Saad [1]) şi sunt puse în evidenţă lucrări mai recente ale lui L. Beznea, N. Boboc şi A. G. Oprina ([7], [10], [11]), legate, prin intermediul conceptului de subordonare, de acest subiect. Este reamintită şi formula Feynmann-Kac ([8]), care, în cazul liniar, permite descrierea probabilistă a semigrupului asociat operatorului perturbat.

Paragraful 2.3, "Rezolvante neliniare submarkoviene; operator iniţial", este consacrat corespondenţei dintre un operator neliniar care satisface principiul complet de maxim şi rezolvanta submarkoviană asociată. Se arată astfel că în cazul în care operatorul V este Lipschitz şi satisface principiul complet de maxim, atunci el este operatorul iniţial al unei rezolvante submarkoviene, dar demonstraţia propusă aici este una originală ce fructifica din plin conceptul de funcţie V-exactă. Este studiată şi problema reciprocă: dacă o rezolvantă neliniară submarkoviană admite un operator iniţial. Rezultatul prezentat este cunoscut din [15], dar aici el este completat de proprietăţi suplimentare cât şi de exemple care pun în evidenţă legătura menţionată.

Se completează rezultatul paragrafului 2.1, demonstrându-se că pentru un operator V care este operatorul iniţial al unei rezolvante submarkoviene şi are proprietatea de a fi complet continuu, orice funcţie nenegativă h din $\mathcal{L}$ este V-exactă. Sunt evidenţiate şi rezolvante asociate cu operatorii perturbaţi V_h.

Partea a doua, "Aplicaţie: perturbarea cu funcţii a operatorului Monge-Ampère", raspunde celei de-a doua ţinte a lucrării: un exemplu concret de operator care verifică proprietăţile generale din prima parte.

Capitolul 3, intitulat "Problema Dirichlet pentru ecuaţia Monge-Ampère" începe cu un paragraf dedicat funcţiilor convexe ("materia primă" pentru ecuaţia Monge-Ampère). Sunt prezentate condiţii de echicontinuitate pentru clase de funcţii convexe şi sunt studiate clase speciale de funcţii convexe (având aceleaşi valori pe frontiera domeniului). În acest sens unele rezultate cunoscute au demonstraţii specifice cazului studiat aici.

Al doilea paragraf ("Măsura de curbură") este o recapitulare privind conceptul anunţat în titlu, avându-se în vedere îndeosebi principiul de minim pentru funcţii convexe şi principiul de minim pentru funcţii local convexe, instrumente esenţiale nu numai studiului funcţiilor convexe dar şi în paragrafele următoare.

Paragraful 3.3 ("Soluţia problemei Dirichlet pentru măsură nemărginită") schiţează soluţia problemei fixate, plecând de la măsuri Radon cu suport finit, trecând la cele cu suport compact şi apoi la cele mărginite. Se prezintă variante complete ale demonstraţiilor, urmărindu-se detaliat amănuntele constructive necesare argumentării. Se evidenţiază o altă manieră de găsire a soluţiei problemei Dirichlet corespunzătoare măsurii mărginite, care se generalizează obţinându-se un rezultat de caracterizare a existenţei soluţiei problemei Dirichlet pentru ecuaţia Monge-Ampère cu măsura Radon nemărginită.

Capitolul 4 ("Perturbarea operatorului Monge-Ampère") începe cu paragraful intitulat "Operatorul Monge-Ampère", care face o sinteză a construcţiei sale din [17], [18] şi [19]. Se defineşte astfel operatorul Monge-Ampère (notat M) şi sunt reamintite proprietăţile algebrice şi topologice ale acestuia, la care se adaugă şi proprietatea de a satisface principiul complet de maxim.

Se construieşte extensia operatorului potenţial al opratorului Monge-Ampère la funcţiile boreliene mărginite oarecare (notat cu V), apoi extensia naturală a acestui ultim operator (notată A). Se demonstrează că orice funcţie reală concavă şi nenegativă este A-dominantă, că A satisface principiul complet de maxim şi că ecuaţiile de conjugare sunt verificate de A şi A_1 pe clasa funcţiilor integrabile Lebesgue (unde A_1 este anticonjugatul lui A). Paragraful se încheie cu două rezultate de "teorie neliniară a măsurii".

,,Operatorul Monge-Ampère perturbat" este următorul paragraf (4.2). Se demonstrează continuitatea operatorului A_h în norma uniformă dar şi în raport cu ordinea (continuitatea la stînga în ordine), se construieşte extensia sa naturală şi este caracterizată proprietatea lui $A_h f$ de a fi funcţie reală. Caracterul perechii $(\pi_h A, \pi_h A_h)$ de a fi formată din operatori conjugaţi pe $\mathcal{L}$ se extinde la funcţii integrabile Lebesgue pe domeniul fixat.

Se arată că A_h este subaditiv. Punând în evidenţă funcţiile supermediene în raport cu rezolvanta $\mathcal{A}^h$ (rezolvanta submarkoviana asociată lui A_h) sunt prezentate proprietăţile generale ale acestora. Prin intermediul regularizatei $\mathcal{A}^h$-excesive se arată (similar cazului operatorului Monge-Ampère) că funcţiile $\mathcal{A}^h$-supermediene formează un con convex de funcţii. Tehnica utilizată este bazată pe principiul de minim pentru funcţii local convexe.

Ultimul paragraf al capitolului se ocupă de generatori (pentru rezolvante asociate operatorului Monge-Ampère, respectiv operatorului Monge-Ampère perturbat). Sunt fixate clasele de funcţii, specifice fiecăruia dintre generatori şi pe care sunt definiţi, iar definirea lor se bazează pe inversabilitatea operatorului Monge-Ampère, respectiv a operatorului Monge-Ampère perturbat. La finalul fiecareia dintre construcţii se pun în evidenţă proprietăţi pe care le satisfac cei doi generatori şi care sunt similare celor din cazul liniar.

References

[1] H. Ben Saad, *Generalisation des noyaux V_h et applications. Séminaire de Théorie du Potentiel de Paris. Lecture Notes in Math.*1060, Springer-Verlag (1984) 15-39.

[2] E.M.J. Bertin, *L'écuation de Monge-Ampère dans un space de Banach*, Classical and Modern Potential Theory and Applications / Springer, 430 (1994), pp 61-75.

[3] E.M.J. Bertin, *Convex Potential Theory* , 431, Univ. Utrecht (1987)

[4] P. van Beusekom, *On nonlinear Dirichlet forms*, Ph. D. Thesis, Univ. Utrecht, Utrecht (1994).

[5] L. Beznea, *Potential type subordonations*, Rev. Roum. Math. Pures Appl., 36 (1991), pp 115-135.

[6] L. Beznea, *Perturbation of sub-Markovian resolvents - a tribute to Gabriel Mokobodzki (1939-2007)*, In Proc. of the Second Workshop Series on Appl. Math., Ed. Univ. Pitesti (2008), pp 53-62.

[7] L. Beznea and N. Boboc, *Potential Theory and Right Procceses (Mathematics and Its Application, vol 572)*, Kluwer Academic Publishers/ Springer, (2004).

[8] L. Beznea and N. Boboc *Feynman-Kac formula for continuous additive functionals and extended Kato class measures*, Potential Anal., 30 (2009), pp 139-164.

[9] L. Beznea and N. Boboc *Measures not chaging polar sets and Schrodinger ecuations in L^p*, Acta Math. Sinica , 26 (2010), pp 249-264.

[10] L. Beznea and A. Oprina, *A class of subordonation operators on a direct sum*, Math. Reports 12 (62), 2 (2010), pp 119-126.

[11] L. Beznea and A. Oprina, *Nonlinear PDEs and measure-valued brancing type processes*, Journal of Matematical Analisis and Applications 384 (2011), pp 16-32.

[12] F. Bronner, *Principe du maximum et résolvantes sous-markoviennes*, C.R. Acad. Sci. Paris, (1973), pp 221-223.

[13] C. Dellacherie, *Une version non linéaire du théorème de Hunt*, In Proc. of the Int. Conf. on Potential Theory, Nagoya 90, (1992), pp 25-40.

[14] F. Van Gool, *Topics in non linear potential theory*, Graduate Thesis, Univ. Utrecht, 1992.

[15] F. Van Gool, *Nonlinear kernels and their resolvents*, Potential Anal. 12 (2000), pp 203-210.

[16] F. Hirsch, *Conditions necessaires et suffisantes d'existence dee familles résolvantes*, Z. Wahrscheinlichkeitstheorie 29, (1974) pp 73-85.

[17] C. Udrea, *Funcţii convexe*, Editura Tehnică, Bucureşti, (2002).

[18] C. Udrea, *Nonlinear resolvents*, Re. Roum. Math. Pures Appl.40 (1995), pp 691-712.

[19] C. Udrea, *A family of nonlinear resolvents*, Southest Asian Bull. Math.29 (2005), pp. 785-806.

[20] C. Udrea, *Resolvents and nonlinear potential theory*, In: Current Trends in Potential Theory, pp. 163-173, Theta Foundation Bucharest, (2005).

[21] C. Udrea, *Dominant functions and supermedian functions*, In: Proc. of Sixth Cong. of Romanian Math, Vol I, Romanian Acad. Publsh. House, Bucharest, (2009).

[22] C. Udrea, *The Perron-Winner-Brelot method and Monge-Ampere equation*, Nevanlinna Colloquium: Eds.: Line/Martio, Walter de Gruyter, (1995).

[23] C. Udrea, *Supermedian functions with respect to a non linear rezolvent*, Math. Rep, Ed Academiei Romane, TOM 49, nr. 3-4 , (1997), pp 285-297.

[24] C. Udrea, *Compactness and Uniform Convergence for Solutions of Monge-Ampere Equations*, Romanian Journal of Pure and Applied Mathematics, nr. 5-6 , (2009), pp 585-593.