

SINTEZA LUCRARIII FAZA FINALA ANUL 2010

ICHIM BOGDAN NICOLAE

1. INTRODUCERE

Programul Normaliz si-a luat numele de la primul scop pentru care a fost construit: calculul de normalizari ale monoizilor (semigrupuri in alta terminologie) afini. Aceasta sarcina implica calculul bazei Hilbert a monoidului de puncte laticiale intr-un con rational C cu un sistem de generatori dat x_1, \dots, x_n . Aceste conuri pot fi echivalent descrise prin sisteme de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare, in acest caz calculul normalizarii fiind echivalent cu rezolvarea acestor sisteme (pentru detalii vezi [2], [3], [15]).

Punctul de legatura intre dezvoltarea programului Normaliz si proiectul Sistem de Algebra Computerizata pentru rezolvarea Sistemelor de Ecuatii si Inegalitati Diofantice Lineare este exact acesta descriere echivalenta a conurilor rationale.

In luna septembrie 2010 cu ocazia ICMS 2010 (International Congress on Mathematical Software, Kobe, Japan) a fost lansata o noua versiune denumita Normaliz 2.5 (vezi [6]). De asemenea a fost realizata o interfata grafica numita jNormaliz (vezi [1]). A fost implementata rezolvarea sistemelor de ecuatii, inegalitati si congruente diofantice lineare sub forma noilor moduri de lucru (5), (4) si (6) implementate in Normaliz 2.5. Aceste moduri au fost implementate in asa fel incat utilizatorul le poate combina, putand astfel rezolva efectiv sisteme compuse din ecuatii, inegalitati si congruente diofantice lineare.

Algoritmii noi implementati au fost publicati in articolul *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones* (vezi [5]) aparut in Journal of Algebra (2010), iar cateva din rezultatele nou obtinute au fost prezentate in articolul *Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics* (vezi [4]) care urmeaza sa apara (este acceptat spre publicare) in Experimental Mathematics. O scurta prezentare a programului Normaliz 2.5 este disponibila in articolul *Introduction to Normaliz 2.5* [7] aparut in Lecture Notes in Computer Science (2010).

2. SCURT ISTORIC

Prima versiune a programului Normaliz a fost un program C creat de Winfried Bruns si Robert Koch in 1997–1998 (vezi [8]) si extins in 2003 de Witold Jarnicki. Versiunea 2.0 (2007–2008) a fost complet rescrisa in C++ de Bogdan Ichim. Algoritmul Pottier pentru rezolvarea sistemelor de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare a fost adaugat in versiunea 2.1 (2009) de Bogdan Ichim. Gesa Kämpf, Bogdan Ichim, Andreas Paffenholz si Christof Söger au adaugat imbunatari la interfata programului in versiunea 2.2 (2009) si au realizat conectivitatea cu sistemele de algebra computerizata Singular, Macaulay si Polymake.

Mai recent, Bogdan Ichim si Christof Söger au implementat procesarea paralela si algoritmi imbunatatiti in versiunea 2.5 (2010), actuala versiune publica a programului. In Normaliz 2.5 au fost implemenate noi moduri de operare care permit rezolvarea sistemelor compuse din ecuatii, inegalitati si congruente diofantice lineare. V. Almendra and B. Ichim au implementat pentru prima data o interfata grafica pentru Normaliz numita jNormaliz (2010). Folosind Normaliz 2.5 am reusit in colaborare cu R. Hemmecke si M. Köppe, dezvoltatorii programului 4ti2 (vezi [11]), sa rezolvam probleme computationale extrem de dificile provenite din algebra statistica [4].

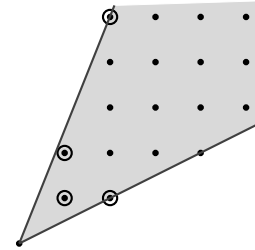
Incepand cu anul 2010 Normaliz si jNormaliz au fost incluse in pachetul standard al distributiilor KNOPPIX/Math (vezi [12]) si Gentoo (vezi [9]).

3. REZULTATE STIINTIFICE

In septembrie 2010 a fost publicat articolul *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones* (vezi [5]) in Journal of Algebra (2010).

Acest articol prezinta algoritmul principal al Normaliz, precum si o varianta imbunatatita a algoritmului Pottier [14] pentru rezolvarea sistemelor de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare.

Fie C un con afin finit generat si punctat in \mathbb{R}^d , adica multiplu de combinatii lineare $\sum_{i=1}^n a_i v_i$ a unui numar finit de vectori intregi v_i cu coeficienti reali pozitivi a_i astfel incat $x, -x \in C$ daca si numai daca $x = 0$. Multimea $C \cap \mathbb{Z}^d$ este un monoid afin cu un sistem de generatori minimal unic denumit *baza Hilbert*. Pentru detalii vezi [2]. In figura baza Hilbert este marcata de cercuri deschise. Putem spune ca scopul principal al Normaliz este calculul acestor baze Hilbert asociate monoizilor afini de tipul $C \cap \mathbb{Z}^d$. Acesti monoizi sunt normali, de unde provine si denumirea programului.



Ca orice alt program destinat calculului de baze Hilbert, algoritmul de baza al Normaliz determina un sistem de generatori al monoidului asociat conului determinat fie printr-un sistem de generatori dat x_1, \dots, x_n , fie printr-un sistem de ecuatii, inecuatii si congruente diofantice omogene lineare. In sectiunea 3 a articolului *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones* este prezentat modul original in care Normaliz reduce acest sistem de generatori la o baza Hilbert. Aceasta reductie este de multe ori partea cea mai costisitoare din punct de vedere al timpului cat si resurselor necesare pentru calcul. Datorita noilor algoritmi implementati estimam ca am obtinut o imbunatire in medie de circa 10 ori a timpului de calcul (in multe cazuri particulare se poate vorbi de factori de imbunatatire a timpului de calcul mult mai mari, vezi [4]).

In sectiunea 4 a articolului mentionat este prezentata implementarea facuta de autori pentru algoritmul de dualizare Fourier–Motzkin (algoritmul Fourier–Motzkin calculeaza anvelopa convexa a unui numar finit de puncte, sau, in forma sa omogenizata, hiperplanele suport a unui con finit generat). Aceasta implementare este optimizata pentru cazul in care marea majoritate a fatetelor conului asociat sunt simpliciale. Avem nevoie de aceasta optimizare pentru algoritmul original prin care h-vectorul si polinomul Hilbert sunt calculate. Acest algoritm are la baza shellings induse de o linie (line shellings) si

este prezentat in sectiunea 6. Figura 1 ilustreaza modul de constructie al unui shelling indus de o linie.

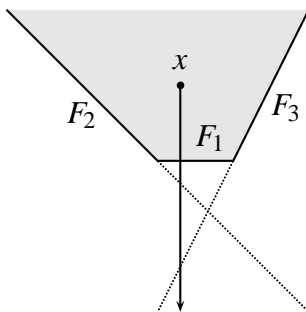


FIGURA 1. Shelling indus de o linie

In final, in sectiunea 7 este prezentata implementarea facuta algoritmului Pottier, care construiește conul prin taieri succesive cu hiperplane suport. Acest algoritm este ilustrat in figura 2. In general nu este usor de decis care din cei doi algoritmi se va comporta mai bine in cazul unui exemplu de sistem de ecuatii si inecuatii diofantice omogene lineare dat. De aceea este bine ca utilizatorul sa aiba la dispozitie ambii algoritmi. O implementare oarecum diferita a algoritmului Pottier a fost realizata in sistemul 4ti2 [10], [11]. Teste asupra variantei publice au aratat ca versiunea noastra este comparabila in performanta.

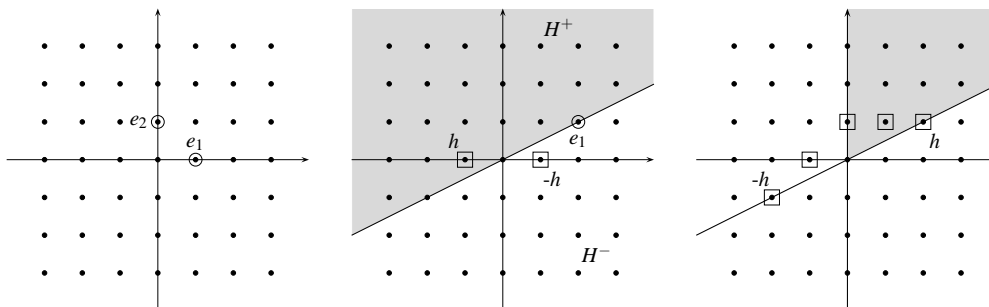


FIGURA 2. Algoritm Pottier

Din punct de vedere computational, in anul 2010 a fost realizata procesarea paralela totala si au fost imbunatatiti algoritmi de calcul. A fost implementata rezolvarea sistemelor de ecuatii, inegalitati si congruente diofantice lineare sub forma noilor moduri de lucru (5), (4) si (6). Programul imbunatatit a fost lansat in septembrie 2010 sub denumirea de Normaliz 2.5.

De asemenea, tot in septembrie 2010 a fost lansata o interfata grafica pentru Normaliz, denumita jNormaliz (vezi figura 3). Aceasta permite utilizatorului accesul simplu la functionalitatile Normaliz. Interfata a fost testata si functioneaza sub sistemele de operare Windows, Linux si Mac OS.

Normaliz 2.5 este disponibil din Singular. De asemenea, echipa condusa de Andreas Paffenholz, dezvoltatorii programului Polymake, au integrat Normaliz 2.5 in distributia

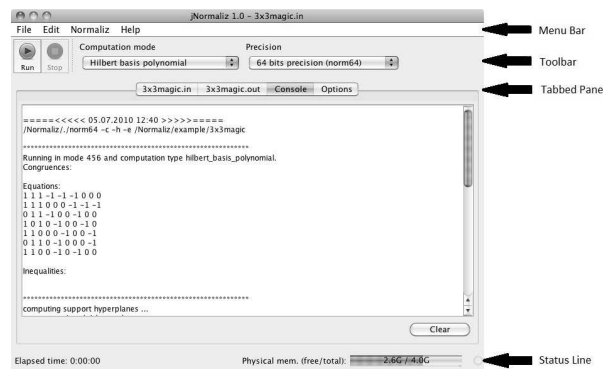


FIGURA 3. jNormaliz

lor curenta. Dan Grayson, care conduce dezvoltarea sistemului Macaulay, a inclus Normaliz 2.5 in acest sistem. In curand Normaliz 2.5 va fi disponibil in CoCoA. Recent Normaliz si jNormaliz au fost incluse in pachetul standard al distributiilor KNOPPIX/Math (vezi [12]) si Gentoo (vezi [9]).

Datorita imbunatatirii algoritmilor de calcul cat si a implementarii procesarii paralele au fost obtinute mai multe rezultate importante. Unul dintre acestea va fi prezentat pe scurt in ceea ce urmeaza.

Problema normalitatii monoizilor asociati cu tabelele de contingenta $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_N$ a fost aproape in intregime rezolvata de Hibi si Ohsugi [13]. Ultimul caz ramas deschis a fost recent rezolvat computational de catre noi in colaborare cu echipa care dezvolta programul 4ti2.

Folosind Normaliz 2.5 (actuala varianta publica) putem arata cu usurinta urmatoarele:

Lema 1. *Monoidul tabelelor de contingenta $5 \times 5 \times 3$ este normal.*

Aceasta completeaza clasificarea tabelelor de contingenta $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_N$ data in [13]:

Teorema 2. *Fie $r_1 \geq r_2 \geq \dots \geq r_N \geq 2$ numere intregi. Atunci monoidul atasat tabelelor de contingenta $r_1 \times r_2 \times \dots \times r_N$ este normal daca si numai daca tabelul de contingenta este de dimensiune:*

- $r_1 \times r_2$, $r_1 \times r_2 \times 2 \times \dots \times 2$, sau
- $r_1 \times 3 \times 3$, sau
- $4 \times 4 \times 3$, $5 \times 4 \times 3$, sau $5 \times 5 \times 3$.

Acest rezultat, impreuna cu alte rezultate similare, vor fi publicate in lucrarea "Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics" [4], lucrare acceptata spre publicare in Experimental Mathematics.

4. DISEMINAREA REZULTATELOR

In scopul diseminarii rezultatelor am participat la patru conferinte nationale si internationale, am tinut trei expuneri in cadrul Scolii nationale de algebra Bucuresti 2010 (unde am fost unul din organizatori) si am tinut zece prezentari in cadrul seminariului de algebra al Institutului de Matematica "Simion Stoilow". Mentionez faptul ca in cadrul Scolii

naționale de algebra București 2010 s-au ținut în total șase expuneri pe teme relevante pentru acest proiect.

Foarte importantă a fost participarea la ICMS 2010 (International Congress on Mathematical Software, September 2010, Kobe, Japan) în calitate de "invited speaker". Cu această ocazie a fost lansat și prezentat Normaliz 2.5 celor mai valoroși specialiști la nivel internațional. Calitatea de "invited speaker" atestă recunoașterea internațională a valorii rezultatelor obținute.

De asemenea menționez faptul că au fost redactate șase capitole dintr-un curs pe tema algebrei computaționale. Acest curs este destinat studenților și are ca scop atragerea lor către acest domeniu de convergență al matematicii și științei calculatoarelor.

BIBLIOGRAFIE

- [1] V. Almendra and B. Ichim, *jNormaliz. A graphical interface for Normaliz*. Available at <http://www.math.uos.de/normaliz>.
- [2] W. Bruns and J. Gubeladze, *Polytopes, rings, and K-theory*. Springer 2009.
- [3] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen–Macaulay rings. Rev. ed.* Cambridge University Press 1998.
- [4] W. Bruns, R. Hemmecke, B. Ichim, M. Köppe, and C. Söger, *Challenging computations of Hilbert bases of cones associated with algebraic statistics*. Exp. Math., in press.
- [5] W. Bruns and B. Ichim, *Normaliz: algorithms for affine monoids and rational cones*. J. Algebra **324** (2010), 1098–1113.
- [6] W. Bruns, B. Ichim and C. Söger, *Normaliz. Algorithms for rational cones and affine monoids*. Available at <http://www.math.uos.de/normaliz>.
- [7] W. Bruns, B. Ichim and C. Söger, *Introduction to Normaliz 2.5*, LNCS **6327**, Fuduka K. (ed.) et al., Proceedings of ICMS 2010, pp. 209–212.
- [8] W. Bruns and R. Koch, *Computing the integral closure of an affine semigroup*. Univ. Jgel. Acta Math. **39** (2001), 59–70.
- [9] Gentoo team, *Gentoo Linux*. Available from <http://www.gentoo.org/>.
- [10] R. Hemmecke, *On the computation of Hilbert bases of cones*. In *Mathematical software*, A. M. Cohen (ed.) et al. Proceedings of the 1st international congress. World Scientific., 2002, pp. 307–317.
- [11] R. Hemmecke, R. Hemmecke and P. Malkin, *4ti2. Version 1.3.2. Computation of Hilbert bases, Graver bases, toric Gröbner bases, and more*. Available from <http://www.4ti2.de>.
- [12] T. Hibi JST CREST team, *KNOPPIX/Math*. Available from <http://www.knoppix-math.org/>.
- [13] H. Ohsugi and T. Hibi, *Toric ideals arising from contingency tables*. In *Commutative Algebra and Combinatorics*, W. Bruns, Ed., Ramanujan Math. Soc. Lect. Notes Ser. **4** (Part II). Ramanujan Math. Soc., 2007, pp. 91–115.
- [14] L. Pottier, *The Euclidean algorithm in dimension n*. Research report, ISSAC 96, ACM Press 1996.
- [15] G. M. Ziegler, *Lectures on polytopes*. Springer 1994.

INSTITUTUL DE MATEMATICA "SIMION STOILOW" AL ACADEMIEI ROMÂNE, C.P. 1-764, 010702 BUCURESTI, ROMANIA
E-mail address: bogdan.ichim@imar.ro