

ORSAY  
N d'ordre:

**UNIVERSITE DE PARIS-SUD  
U.F.R. SCIENTIFIQUE D'ORSAY**

**THESE**

présentée  
pour obtenir

**LE GRADE DE DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY**

par

**Cristian Anghel**

**Sujet:**

**Fibrés vectoriels stables sur les courbes et les surfaces**

**Soutenue le 29 juin 1994 devant la commission d'examen**

**MM. Christian Peskine Président  
Arnaud Beauville  
Olivier Debarre  
Paltin Ionescu  
Joseph Le Potier**

# Sommaire

<b>1</b>	<b>Fibrés vectoriels stables avec <math>\chi = 0</math> sur une surface abélienne simple</b>	<b>3</b>
1.1	Introduction . . . . .	3
1.2	Espaces de modules en rang 2 . . . . .	4
<b>2</b>	<b>La stabilité de la restriction à une courbe lisse d'un fibré de rang 2 sur une surface algébrique</b>	<b>9</b>
2.1	Introduction . . . . .	9
2.2	La stabilité des restrictions . . . . .	10
2.3	Applications aux surfaces abéliennes . . . . .	16
<b>3</b>	<b>Fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe de genre deux</b>	<b>21</b>
3.1	Introduction . . . . .	21
3.2	Involution de l'espace des modules . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Une construction de fibrés vectoriels stables de rang deux avec <math>c_2</math> suffisamment grand sur une surface algébrique</b>	<b>28</b>
4.1	Introduction . . . . .	28
4.2	Construction de fibrés stables de rang deux . . . . .	29

# Chapitre 1

## Fibrés vectoriels stables avec $\chi = 0$ sur une surface abélienne simple

### 1.1 Introduction

Soit  $C$  une courbe lisse de genre deux, plongée dans sa jacobienne  $X$ . Dans [13], Mukai a étudié les faisceaux sur  $X$  sans torsion, stables, de rang arbitraire, avec  $c_1 \sim \mathcal{O}_X(C)$  et  $\chi = 0$ , en utilisant les faisceaux de Picard sur  $X$  (le signe  $\sim$  désigne l'équivalence numérique). Une méthode analogue nous permet de décrire une composante de l'espace des modules des fibrés de rang deux, stables, avec  $c_1^2 > 0$  et  $\chi = 0$ , sur une surface abélienne simple. Pour cela, on utilisera une certaine généralisation des faisceaux de Picard, en partant avec des fibrés de rang 1 sur une courbe lisse quelconque dans la surface duale. Si de plus  $c_1$  est divisible par 2, la transformation de Fourier et les résultats de [9] nous permettront de décrire une composante de l'espace des modules des fibrés stables  $E$  satisfaisant à  $\text{rang}(E) = c_1^2/4$ ,  $c_1(E) \sim 0$  et  $\chi(E) = -2$ . Par ailleurs nous décrirons une composante irréductible de l'espace des modules des faisceaux simples de rang arbitraire avec  $c_1^2 > 0$  et  $\chi = 0$ . D'après [5], tous ces espaces sont des exemples de systèmes hamiltoniens complètement intégrables pour la forme symplectique de Mukai [14].

*Notations et conventions* Soit  $X$  une surface abélienne. Pour tout fibré vectoriel  $E$  sur  $X$ , on note  $c_1(E)$  la classe de  $\det E$  dans  $\text{Pic}(X)$ . Le signe  $\sim$

désigne l'équivalence algébrique. On fixe une polarisation sur  $X$  et on note  $M_X(r, D, \chi)$  l'espace des modules des fibrés stables  $E$  de rang  $r$  sur  $X$  avec  $c_1(E) \sim D$  et  $\chi(E) = \chi$ .

Soient  $\widehat{X}$  la surface abélienne duale de  $X$  et  $P$  le fibré de Poincaré normalisé sur  $X \times \widehat{X}$ : pour tout élément  $\hat{a}$  de  $\widehat{X}$ , le faisceau  $P_{\hat{a}} := P|_{X \times \{\hat{a}\}}$  est l'élément de  $\text{Pic}^0(X)$  correspondant à  $\hat{a}$ . On désigne par  $D(X)$  la catégorie dérivée de la catégorie des  $\mathcal{O}_X$ -modules cohérents; on identifie un faisceau  $E$  sur  $X$  au complexe réduit à  $E$  en degré 0 et nul ailleurs. Dans [13], Mukai définit le foncteur  $\mathcal{S} : D(X) \rightarrow D(\widehat{X})$  (*transformation de Fourier*) par la formule  $\mathcal{S}(E) = R\hat{p}_*(P \otimes p^*E)$ , où  $p$  et  $\hat{p}$  sont les projections de  $X \times \widehat{X}$  sur  $X$  et  $\widehat{X}$  respectivement. On note  $R^i\mathcal{S}(E)$  ( $0 \leq i \leq 2$ ) les faisceaux de cohomologie de l'objet  $\mathcal{S}(E)$  de  $D(\widehat{X})$ . On dit qu'un faisceau  $E$  sur  $X$  est *faiblement d'indice  $i$*  s'il satisfait à  $R^j\mathcal{S}(E) = 0$  pour  $j \neq i$ , *d'indice  $i$*  si  $H^j(P_{\hat{a}} \otimes E) = 0$  quels que soient  $j \neq i$  et  $\hat{a} \in \widehat{X}$ ; lorsque c'est le cas, le faisceau  $R^i\mathcal{S}(E)$  est localement libre.

## 1.2 Espaces de modules en rang 2

Rappelons d'après [2] que on peut définir une transformation de Fourier  $s : H^*(X, \mathbf{Z}) \rightarrow H^*(\widehat{X}, \mathbf{Z})$  par la formule  $s(x) = \hat{p}_*(p^*x \cdot e^l)$ , où  $l$  désigne la classe du fibré de Poincaré dans  $H^2(X \times \widehat{X}, \mathbf{Z})$ . On a  $s(H^p(X, \mathbf{Z})) = H^{4-p}(\widehat{X}, \mathbf{Z})$ ,  $s$  applique l'élément  $1 \in H^0(X, \mathbf{Z})$  sur la classe d'un point dans  $H^4(\widehat{X}, \mathbf{Z})$  et vice-versa. Soient  $D$  un diviseur ample sur  $X$ ,  $\varphi_D : X \rightarrow \widehat{X}$  l'isogénie associée à  $D$ , et  $d = h^0(\mathcal{O}_X(D))$ ; on a  $s([D]) = -[\widetilde{D}]$ , où  $\widetilde{D}$  est un diviseur vérifiant  $d\widetilde{D} \sim (\varphi_D)_*(D)$  et donc  $\widetilde{D}^2 = D^2$ .

Le théorème de Grothendieck-Riemann-Roch fournit un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc}
D(X) & \xrightarrow{\mathcal{S}} & D(\widehat{X}) \\
\downarrow ch & & \downarrow ch \\
H^*(X, \mathbf{Q}) & \xrightarrow{s} & H^*(\widehat{X}, \mathbf{Q})
\end{array}$$

Ainsi si  $L$  est un faisceau faiblement d'indice 1 tel que  $c_1(E) = \widetilde{D}$ , on a  $\text{rang}(\widehat{L}) = -\chi(L)$ ,  $\chi(\widehat{L}) = -\text{rang}(L)$ , et  $c_1(\widehat{L}) \sim D$ .

Notons  $\{\widetilde{D}\}$  la variété des courbes de  $X$  algébriquement équivalentes à  $\widetilde{D}$ , et  $g = \frac{D^2}{2} + 1$  le genre de ces courbes. Soit  $U \subset \{\widetilde{D}\}$  l'ouvert des courbes lisses. Les jacobiniennes  $J^{g-3}(D_1)$ , pour  $D_1 \in U$ , s'organisent en une fibration  $\mathcal{J}_0^{g-3} \rightarrow U$ . Celle-ci admet une compactification naturelle  $\mathcal{J}^{g-3} \rightarrow \{\widetilde{D}\}$ , où  $\mathcal{J}^{g-3}$  est la composante de l'espace des modules des faisceaux semi-stables de dimension 1 sur  $\widehat{X}$  avec  $c_1 \sim \widetilde{D}$  et  $\chi = -2$  qui contient  $\mathcal{J}_0^{g-3}$  [12]. D'après [2] et [13], cet espace admet une forme symplectique canonique, pour laquelle la fibration  $\mathcal{J}^{g-3} \rightarrow \{\widetilde{D}\}$  est *lagrangienne*. Un fibré en droites générique  $L$  de degré  $d = g - 3$  sur une courbe  $D_1 \in U$  peut être inscrit dans une suite de la forme suivante :

$$0 \rightarrow L \rightarrow L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a}) \rightarrow \mathcal{O}_{\hat{a}} \rightarrow 0 \quad (1.1)$$

avec  $\hat{a} \in D_1$ .  $L$  et  $\mathcal{O}_{\hat{a}}$  sont faiblement d'indice 1 respectivement 0, et  $R^0\mathcal{S}\mathcal{O}_{\hat{a}} = P_{\hat{a}}$ . Par transformation de Fourier de la suite exacte (1.1) on trouve:

$$0 \rightarrow R^0\mathcal{S}L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a}) \rightarrow P_{\hat{a}} \rightarrow \widehat{L} \rightarrow R^1\mathcal{S}L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a}) \rightarrow 0 \quad (1.2)$$

et  $R^2\mathcal{S}L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a}) = 0$ .

Maintenant le degré de  $L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a})$  sur  $D_1$  est  $g - 2$  et les éléments  $M$  de  $\text{Jac}^{g-2}(D_1)$  avec  $H^0(M) \neq 0$  forment une sous-variété  $W$  de codimension 2. Alors, pour  $L$  générique, ils existent au plus un nombre fini des points  $a_i$  dans  $X$  tel que  $L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a})$  peut s'écrire comme  $M \otimes P_{a_i}$  avec  $M \in W$ . Donc le support de  $R^0\mathcal{S}L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a})$  est fini et comme il doit être sans torsion, il est forcément nul. Donc la suite exacte (1.2) se réduit à:

$$0 \rightarrow P_{\hat{a}} \rightarrow \widehat{L} \rightarrow R^1\mathcal{S}L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a}) \rightarrow 0 \quad (1.3)$$

**Lemme 1.2.1**  $R^1\mathcal{S}L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a})$  est sans torsion et donc isomorphe à  $\mathcal{O}(D') \otimes \mathcal{J}_Z$  avec  $D' \sim D$  et  $l(Z) = D^2/2$

*Démonstration:* Supposons le contraire. Alors il existe un diviseur effectif  $C$  et une suite exacte de la forme suivante :

$$0 \rightarrow P_{\hat{a}}(C) \rightarrow \hat{L} \rightarrow Q \rightarrow 0 \quad (1.4)$$

avec  $Q$  sans torsion.  $C$  étant effectif et  $X$  simple, il est forcément ample. Donc  $R^1\mathcal{S}P_{\hat{a}}(C) = R^2\mathcal{S}P_{\hat{a}}(C) = 0$ .  $\hat{L}$  étant faiblement d'indice 1, par transformation de Fourier de (1.4) on trouve aussi  $R^0\mathcal{S}P_{\hat{a}}(C) = 0$  ce qui est impossible. Donc au départ  $R^1\mathcal{S}L \otimes \mathcal{O}_{D_1}(\hat{a})$  est sans torsion et il est de la forme  $\mathcal{O}(D') \otimes \mathcal{J}_Z$  avec  $D' \sim c_1(\hat{L}) \sim D$  et  $l(Z) = D^2/2$  à cause du fait que  $\chi(\hat{L}) = 0$ . Q.E.D.

**Lemme 1.2.2**  $\hat{L}$  est stable.

*Démonstration:* Supposons le contraire. Alors il existe un faisceau inversible  $F$  et un morphisme injectif  $F \rightarrow \hat{L}$  tel que

$$c_1(F) \cdot D \geq \frac{D^2}{2} \quad (1.5)$$

La flèche composée  $F \rightarrow \hat{L} \rightarrow \mathcal{O}(D') \otimes \mathcal{J}_Z$  est non-nulle car sinon, on trouve une application  $F \rightarrow P_{\hat{a}}$  et alors  $F^\vee \otimes P_{\hat{a}}$  a des sections, en contradiction avec (1.5). Donc il existe un diviseur effectif  $C \in |\mathcal{O}(D') \otimes F^\vee|$  passant par  $Z$ . La condition (1.5) implique  $C \cdot D \leq D^2/2$ . Alors :  $F^2 = (D - C)^2 = D^2 + C^2 - 2D \cdot C \geq C^2 > 0$  et donc  $F$  est ample. Comme dans la démonstration du lemme précédente on a alors  $R^1\mathcal{S}F = R^2\mathcal{S}F = 0$  et en appliquant la transformation de Fourier à la suite

$$0 \rightarrow F \rightarrow \hat{L} \rightarrow Q_1 \rightarrow 0 \quad (1.6)$$

on trouve aussi  $R^0\mathcal{S}F = 0$ , ce qui est impossible. Donc  $\hat{L}$  est stable. Q.E.D.

On a obtenu le résultat suivant :

**Théorème 1.2.3** Soient  $X$  une surface abélienne simple et  $D$  un diviseur ample sur  $X$ . Une composante irréductible de l'espace des modules  $M_X(2, D, 0)$  est birationnellement isomorphe à la jacobienne relative  $\mathcal{J}^{g-3}$  au-dessus de  $\{\tilde{D}\}$ .

**Remarque 1.2.4** Ils existent dans  $M_X(2, D, 0)$  des fibrés qui ne sont pas faiblement d'indice 1. Prenons par exemple pour  $X$  la jacobienne d'une courbe  $C$  lisse de genre deux, satisfaisant à  $\text{Pic}(X)/\text{Pic}^\circ(X) = Z$ . Soit  $E'$  une extension de la forme :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(-C) \longrightarrow E' \longrightarrow \mathcal{O}_X(C) \otimes J_Z \longrightarrow 0$$

avec  $l(Z) = 10$  et tel que  $H^0(\mathcal{O}_X(2C) \otimes J_Z) = 0$ . Le fibré  $E'$  est  $C$ -stable. Soit  $E = E' \otimes \mathcal{O}_X(2C)$ . Il est aussi  $C$ -stable et a la présentation suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(C) \longrightarrow E \longrightarrow \mathcal{O}_X(3C) \otimes J_Z \longrightarrow 0.$$

On a  $c_1(E) \equiv 4C$ ,  $\chi = 0$ , mais  $R^0\mathcal{S}(E) \neq 0$

Supposons de plus  $D = 2D_0$ . Alors, pour  $E$  générique dans la composante du théorème précédente, le fibré  $E_1 := E \otimes \mathcal{O}_X(-D_0)$  est stable avec  $\det(E_1) = \mathcal{O}_X$  et  $\chi(E_1) = D_0^2$ . D'après [9],  $E_1$  est faiblement d'indice 1 et  $\widehat{E}_1$  est stable avec  $c_1(\widehat{E}_1) \sim 0$ ,  $\chi(\widehat{E}_1) = -2$  et  $\text{rang}(\widehat{E}_1) = D_0^2$ . On obtient donc:

**Théorème 1.2.5** Une composante de l'espace de modules  $M_{\widehat{X}}(D_0^2, 0, -2)$  est birationnellement isomorphe à la jacobienne relative  $\mathcal{J}^{g-3}$  des courbes  $\sim \widetilde{D}$ .

Soit  $r$  un entier  $> 2$ . Nous allons maintenant décrire une composante irréductible de l'espace des modules  $\text{Spl}_X(r, D, 0)$  des fibrés simples de rang  $r$  avec  $c_1(E) \sim D$  et  $\chi(E) = 0$  (c'est un espace algébrique, cf.[1]). Soit  $L$  un fibré en droites générique de degré  $d = g - 1 - r$  sur une courbe lisse  $D_1 \sim \widetilde{D}$ . Comme  $r > 2$ , les éléments  $M$  de  $\text{Jac}^d(D_1)$  avec  $H^0(M) \neq 0$  forment une sous-variété  $W$  de  $\text{Jac}^d(D_1)$  de codimension  $\geq 3$ , et le fibré  $L$  ne peut s'écrire  $M \otimes P_{\hat{a}}$  avec  $M \in W$  et  $\hat{a} \in \widehat{X}$ . Le faisceau  $L$  sur  $X$  est donc d'indice 1, et d'après [13],  $\widehat{L}$  est localement libre. En utilisant le résultat dans la section 2 de [13], on a:  $\dim \text{Hom}(L, L) = \dim \text{Hom}(\widehat{L}, \widehat{L}) = 1$  et donc  $\widehat{L}$  est simple. Comme  $c_1(L) \sim \widetilde{D}$  et  $\chi(L) = -r$  on déduit de [2]

$$\text{rang}(\widehat{L}) = r \quad \chi(\widehat{L}) = 0 \quad c_1(\widehat{L}) \sim D.$$

Ces remarques peuvent être énoncées comme suit:

**Théorème 1.2.6** *Une composante dans l'espace  $Spl_X(r, D, 0)$  est birationnellement isomorphe à la jacobienne relative  $\mathcal{J}^{g-1-r}$  au-dessus de l'espace des courbes  $\sim \widetilde{D}$ . L'élément générique dans cette composante est localement libre.*

Comme ci-dessus, l'espace  $\mathcal{J}^{g-1-r}$  est muni d'une forme symplectique canonique, pour laquelle la fibration  $\mathcal{J}^{g-1-r} \rightarrow \{\widetilde{D}\}$  est lagrangienne.



# Chapitre 2

## La stabilité de la restriction à une courbe lisse d'un fibré de rang 2 sur une surface algébrique

### 2.1 Introduction

Soient  $S$  une surface algébrique lisse,  $E$  un fibré vectoriel de rang deux sur  $S$  et  $C$  une courbe lisse plongée dans  $S$ . Dans le paragraphe 1 nous établirons un critère de stabilité pour la restriction  $E|_C$ . En utilisant la méthode de Reider [18], sous certaines conditions numériques sur  $C$ , nous obtiendrons des propriétés restrictives sur  $E$  si  $E|_C$  n'est pas stable.

Si  $E$  est  $D$ -stable, où  $D$  est une polarisation sur  $S$ , on sait que pour  $n \gg 0$  et  $C$  générique tel que  $C \sim nD$ , la restriction  $E|_C$  est stable. Dans le paragraphe 2, pour  $S$  surface abélienne avec  $NS(S) = \mathbf{Z}$ , avec les méthodes du paragraphe 1 nous trouverons une estimation pour  $n$  tel que pour toute courbe lisse  $C$  algébriquement équivalente à  $nD$ , la restriction à  $C$  d'un fibré  $E$  générique dans une composante de certains espaces des modules soit stable. Si  $E$  est normalisé de façon que  $\det(E) = \mathcal{O}_S$  ou  $\mathcal{O}_S(D)$  on obtient  $n$  d'ordre  $\sqrt{\frac{4c_2}{D^2}}$ . Le résultat est plus fin que celui de Bogomolov [6], où  $n$  est d'ordre  $c_2$ .

## 2.2 La stabilité des restrictions

Soient  $S$  une surface algébrique lisse,  $Z$  un sous-schéma de dimension 0 de  $S$ ; notons  $J_Z$  l'idéal de  $Z$  dans  $S$  et  $l(Z)$  la longueur de  $\mathcal{O}_Z$ . On dit que  $Z$  est *en position spéciale* par rapport à un faisceau inversible  $M$  sur  $S$  si l'application de restriction  $H^0(M) \rightarrow H^0(M|_Z)$  n'est pas surjective et que  $H^0(S, MJ_{Z'}) = H^0(S, MJ_Z)$  pour tout sous-schéma  $Z'$  de  $Z$  de longueur  $l(Z) - 1$ .

Soit  $L$  un faisceau inversible sur  $S$  et  $Z$  un sous-schéma de dimension 0 en position spéciale par rapport à  $K_S \otimes L$ . Un élément général de  $\text{Ext}^1(LJ_Z, \mathcal{O}_S)$  est la classe d'une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \longrightarrow LJ_Z \longrightarrow 0 ,$$

où le faisceau  $E$  est localement libre [10]. Soit  $C$  une courbe lisse telle que  $L \cdot C > 0$  et  $C \cap Z = \emptyset$ . Nous poserons:

$$d = L \cdot C .$$

Pour  $E|_C$  on a la présentation :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow E \longrightarrow E|_C \longrightarrow 0 .$$

Les deux classes d'extensions  $[E]$  et  $[E|_C]$  appartiennent respectivement à :

$$\begin{aligned} \text{Ext}^1(LJ_Z, \mathcal{O}_S) &\cong H^1(S, K_S LJ_Z)^* \\ \text{Ext}^1(L|_C, \mathcal{O}_C) &\cong H^0(S, \mathcal{O}_S(C)K_S L|_C)^* . \end{aligned}$$

L'application  $[E] \rightarrow [E|_C]$  est le cobord dual dans la cohomologie de la suite suivante :

$$0 \longrightarrow K_S LJ_Z \longrightarrow \mathcal{O}_S(C)K_S LJ_Z \longrightarrow \mathcal{O}_S(C)K_S L|_C \longrightarrow 0 .$$

Supposons que la restriction  $E|_C$  ne soit pas stable. Alors, il existe un fibré en droites  $P$  sur  $C$  de degré  $\left[\frac{d+1}{2}\right]$  et un homomorphisme injectif  $P \rightarrow E|_C$ . Cela équivaut à l'existence d'un homomorphisme  $\varphi : P \rightarrow L|_C$  tel que  $\bar{\varphi}([E|_C]) = 0$ , où  $\bar{\varphi}$  est l'homomorphisme de  $\text{Ext}^1(L|_C, \mathcal{O}_C)$  dans  $\text{Ext}^1(P, \mathcal{O}_C)$  induit par  $\varphi$ . Mais  $\text{Hom}(P, L|_C) \neq 0$  implique l'existence d'un diviseur effectif  $X$  sur  $C$  de degré  $\left[\frac{d}{2}\right]$  tel que  $P = L|_C \otimes \mathcal{O}_C(-X)$ . Notant  $J_X$  l'idéal de  $X$  dans

$S$ , et  $M$  le faisceau inversible  $\mathcal{O}_S(C)K_S L$ , l'application  $\bar{\varphi}$  est la transposée de l'homomorphisme naturel  $H^0(MJ_X|_C) \longrightarrow H^0(M|_C)$ . On trouve alors le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & & O & & \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & H^1(MJ_Z)^* & & \\
& & & & \downarrow j & & \\
& & & & H^1(M(-C)J_Z)^* & & \\
& & & & \downarrow \text{res} & & \\
0 & \longrightarrow & H^0(M|_X)^* & \xrightarrow{i} & H^0(M|_C)^* & \xrightarrow{\bar{\varphi}} & H^0(MJ_X|_C)^* \longrightarrow 0 \\
& & & & \downarrow & & \\
& & & & H^0(MJ_Z)^* & & 
\end{array} \tag{2.1}$$

L'application  $j$  est injective puisque  $\deg M|_C = \deg K_C + d > \deg K_C$  et donc  $H^1(M|_C) = 0$ . De même on a  $\deg MJ_X|_C = \deg K_C + \left[\frac{d+1}{2}\right] > \deg K_C$  et  $i$  est injective pour la même raison.

On déduit de ce diagramme le résultat suivant :

**Théorème 2.2.1** *Avec les notations précédentes les affirmations suivantes sont équivalentes :*

- i) *pour tout fibré  $E$  défini par une classe d'extension  $[E] \in H^1(K_S L J_Z)^*$ , ou bien  $E|_C$  est stable, ou bien  $[E|_C] = 0$ .*
- ii) *pour tout  $X \in \text{Hilb}^{\left[\frac{d}{2}\right]} C$ , l'application de restriction  $H^0(MJ_Z) \rightarrow H^0(M|_X)$  est surjective.*

Faisons désormais les hypothèses suivantes:

- $\alpha)$   $C^2 > 4c_2(E) - c_1(E)^2$ ;
- $\beta)$   $C + L$  est nef;
- $\gamma)$   $L$  est nef et  $L^2 > 0$ .

Si  $c_1(E)^2 \leq 4c_2(E)$  (en particulier si  $E$  est stable), les conditions  $\alpha)$  et  $\gamma)$  entraînent  $\beta)$ . Observons que  $\alpha)$  équivaut à

$$(C + L)^2 > 4l(Z) + 2d, \tag{2.2}$$

ce qui entraîne en particulier  $(C + L)^2 > 0$ .

Supposons maintenant qu'il existe  $E$  tel que  $[E] \in H^1(K_S L J_Z)^*$ ,  $[E|_C] \neq 0$  et  $E|_C$  est instable. D'après le théorème 1, il existe un diviseur  $X \in \text{Hilb}^{\lfloor \frac{d}{2} \rfloor} C$  telle que l'application :

$$H^0(M J_Z) \longrightarrow H^0(M|_X) \quad (2.3)$$

n'est pas surjective. Faisons la notation suivante:

$$d(Z) = \inf \{ l(Z') \mid Z' \subset Z, \text{rang}(H^0(M(-C)) \rightarrow H^0(M(-C)|_{Z'})) \leq l(Z') - 1 \} \quad (2.4)$$

**Remarque 2.2.2** a) Pour un  $Z'$  tel que le infimum est atteint dans (2.4) on a en fait

$$\text{rang}(H^0(M(-C)) \rightarrow H^0(M(-C)|_{Z'})) = l(Z') - 1,$$

puisque si non, on peut encore réduire  $Z'$  en gardant l'inégalité de (2.4). Donc

$$\begin{aligned} d(Z) &= 1 + \text{rang}(H^0(M(-C)) \rightarrow H^0(M(-C)|_{Z'})) \\ &\leq 1 + \text{rang}(H^0(M(-C)) \rightarrow H^0(M(-C)|_Z)). \end{aligned} \quad (2.5)$$

b) Dans la suite, en supposant  $E|_C$  instable et  $[E|_C] \neq 0$ , nous allons trouver un sous-schéma  $Z' \subset Z$  avec  $l(Z') \geq d(Z)$  et un diviseur  $F$  passant par  $Z'$  et satisfaisant certaines conditions numériques.

c) Dire que  $Z$  est en position spéciale par rapport à  $|K_S L|$  signifie qu'on a

$$\text{rang}(H^0(K_S L) \rightarrow H^0(K_S L|_Z)) \leq l(Z) - 1$$

et

$$\text{rang}(H^0(K_S L) \rightarrow H^0(K_S L|_Z)) = \text{rang}(H^0(K_S L) \rightarrow H^0(K_S L|_{Z'}))$$

pour tout sous-schéma  $Z'$  de  $Z$  de longueur  $l(Z) - 1$ . Par conséquence la condition

$$\text{rang}(H^0(K_S L) \rightarrow H^0(K_S L|_Z)) = l(Z) - 1$$

équivaut à  $d(Z) = l(Z)$ ; comme  $H^1(S, K_S L) = 0$ , elle équivaut aussi à  $\dim H^1(S, L J_Z) = 1$ . Lorsque ces conditions sont réalisées, on a nécessairement  $Z' = Z$  et cette observation va être utilisée dans la deuxième partie pour démontrer la stabilité de la restriction dans certains cas spéciaux.

**Lemme 2.2.3** Avec les notations et les hypothèses précédentes il existe  $Z' \subset Z$  et  $X' \subset X$  tels que  $l(Z') \geq d(Z)$  et  $X' \cup Z'$  soit en position spéciale pour  $|M|$ .

*Démonstration.* Considérons le diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{array}{ccccccc} H^0(M|_Z) & \longleftarrow & H^0(M) & \longleftarrow & H^0(M|_Z) & & \\ & & \downarrow k & \searrow l & \downarrow j & & \\ & & H^0(M|_C) & \xrightarrow{i} & H^0(M|_X) & \longrightarrow & 0. \end{array} \quad (2.6)$$

D'après (2.3)  $j$  n'est pas surjective et d'après la condition  $\gamma$ ) et le théorème d'annulation de Mumford  $k$  est surjective, donc  $X$  et  $Z$  vérifient la propriété suivante:

- (\*) Il existe un  $\beta \in H^0(M)$  ayant les images non-nulles dans  $H^0(M|_X)$  et  $H^0(M|_Z)$ .

Comme  $Z$  et  $X$  sont noethériens, on peut trouver des sous-schémas  $Z'$  de  $Z$  et  $X'$  de  $X$  qui sont minimaux pour la propriété (\*). Cela implique que  $X' \cup Z'$  est en position spéciale pour le système linéaire  $|M|$ . En plus

$$\begin{aligned} \text{rang}(H^0(M(-C)) \rightarrow H^0(M(-C)|_{Z'})) &< \text{rang}(H^0(M) \rightarrow H^0(M|_{Z'})) \\ &\leq l(Z'), \end{aligned}$$

le signe d'inégalité stricte étant du à la propriété (\*). Donc  $l(Z') \geq d(Z)$ . Q.E.D.

**Lemme 2.2.4** Avec les notations et les hypothèses précédentes il existe deux diviseurs  $M$  et  $F$  satisfaisant les conditions:

- i)  $M + F \sim C + L$
- ii)  $M \cdot F \leq l(Z') + l(X') \leq l(Z) + \frac{1}{2}(L \cdot C)$
- iii)  $(M - F)^2 > 0$  et  $(M - F) \cdot H > 0$  pour tout diviseur ample  $H$
- iv)  $F$  est effectif est passe par  $Z'$ .

*Démonstration.* D'après [10],  $X' \cup Z'$  étant en position spéciale pour  $|M|$ , on peut construire une extension localement libre de rang 2, de la forme suivante :

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \xi \longrightarrow \mathcal{O}_S(C) \otimes LJ_{Z' \cup X'} \longrightarrow 0.$$

Mais  $\det(\xi) = \mathcal{O}_S(C)L$  et  $c_2(\xi) = l(Z') + l(X') \leq l(Z) + \frac{d}{2}$ . Compte tenu de  $\alpha'$ ) on obtient  $c_1^2(\xi) > 4c_2(\xi)$ , et  $\xi$  est instable au sens de Bogomolov [17]. Nous trouvons alors pour  $\xi$  le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & O & & & \\
& & & \uparrow & & & \\
& & & \mathcal{O}_S(F)J_A & & & \\
& & & \uparrow & & & \\
O & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \xi & \longrightarrow & \mathcal{O}_S(C)LJ_{Z' \cup X'} \longrightarrow 0 \\
& & & & \uparrow & \nearrow \psi & \\
& & & & \mathcal{O}_S(M) & & \\
& & & & \uparrow & & \\
& & & & 0 & & 
\end{array}$$

où  $A$  est un sous-schéma fini de  $S$ , et  $M$  et  $F$  des diviseurs satisfaisant

i)  $M + F \sim C + L$

ii)  $M \cdot F \leq l(Z') + l(X') \leq l(Z) + \frac{1}{2}(L \cdot C)$

iii)  $(M - F)^2 > 0$  et  $(M - F) \cdot H > 0$  pour tout diviseur ample  $H$ .

Si l'application  $\psi$  est nulle, on a  $H^0(S, \mathcal{O}_S(-M)) \neq 0$  et avec i) et  $\beta$ ) on obtient  $H \cdot (M - F) \leq 0$  pour tout diviseur ample  $H$ . Donc  $\psi \neq 0$  et  $H^0(\mathcal{O}_S(F)J_{Z' \cup X'}) \neq 0$ , par conséquent  $F$  est effectif en passant par  $Z'$ . Q.E.D.

Dans la suite nous allons raffiné les informations concernant le diviseur  $F$ . En utilisant iii) ci-dessus et le théorème de l'indice, on a que

$$(M + F)^2 \cdot (M - F)^2 \leq (M^2 - F^2)^2,$$

d'où

$$M^2 \cdot F^2 \leq (M \cdot F)^2. \quad (2.7)$$

Avec  $\beta$ ) et iii) on obtient aussi

$$(M + F) \cdot (M - F) \geq 0$$

et donc

$$M^2 \geq F^2. \quad (2.8)$$

Supposons  $M \cdot F < 0$ . Alors  $(M + F) \cdot F \geq 0$  implique  $F^2 > 0$ . Avec (2.7) on a  $(F^2)^2 \leq (M \cdot F)^2$  et donc  $F^2 \leq -M \cdot F$ . Alors  $F \cdot (M + F) \leq 0$ . On peut

avoir seulement l'égalité. Donc  $F^2 = M^2 = -M \cdot F$  et, avec (2.7),  $M \sim -F$ . La relation i) devient  $C + L \sim 0$  et ceci n'est pas possible à cause de  $\alpha'$ . On a donc  $M \cdot F \geq 0$ . Notons  $D := C + L$ . D'après  $\alpha'$ ,  $D^2 > 0$  et le théorème de l'indice implique :

$$D^2 F^2 \leq (D \cdot F)^2. \quad (2.9)$$

Mais avec ii), on a :

$$(D - F) \cdot F \leq l(Z) + \frac{d}{2}$$

d'où, puisque  $D$  est nef et  $F$  effectif,

$$0 \leq D \cdot F \leq l(Z) + \frac{d}{2} + F^2. \quad (2.10)$$

Avec (2.9) et (2.10) on obtient

$$D^2 F^2 \leq (l(Z) + \frac{d}{2} + F^2)^2.$$

Cette inégalité s'écrit

$$0 \leq (F^2)^2 + F^2 (-D^2 + 2l(Z) + d) + (l(Z) + \frac{d}{2})^2. \quad (2.11)$$

Le discriminant de ce trinôme de degré 2 en  $F^2$  est  $\Delta = D^2 [D^2 - 4(l(Z) + \frac{d}{2})]$  qui est  $> 0$  à cause de  $\alpha'$ . Les racines sont :

$$F_{\pm} = \frac{D^2 - 2l(Z) - d + \sqrt{\Delta}}{2} > 0.$$

Avec (2.11) on a ou bien  $F^2 \leq F_-$ , ou bien  $F^2 \geq F_+$ . Supposons  $F^2 \geq F_+$ . Avec (2.8) on a aussi  $M^2 \geq F_+^2$ . A cause de (2.7), du fait que  $M \cdot F \geq 0$  et de ii) on trouve :

$$F_+^2 \leq M^2 \cdot F^2 \leq (M \cdot F)^2 \leq (l(Z) + \frac{d}{2})^2,$$

d'où  $F_+ \leq l(Z) + \frac{d}{2}$ . Mais ceci s'écrit

$$D^2 - 4(l(Z) + \frac{d}{2}) + \sqrt{\Delta} \leq 0,$$

ce qui contredit  $\alpha'$ ). On a donc  $F^2 \leq F_-$ . D'autre part l'inégalité ii) s'écrit

$$(C + L - F) \cdot F \leq l(Z) + \frac{d}{2}.$$

Mais  $L \cdot F \geq 0$  à cause de  $\gamma$  et donc :

$$F \cdot C \leq l(Z) + \frac{d}{2} + F^2.$$

On obtient donc le résultat suivant :

**Théorème 2.2.5** *Soit  $E$  un fibré vectoriel sur  $S$ , admettant une présentation*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \longrightarrow LJ_Z \longrightarrow 0.$$

*Soit  $C$  une courbe lisse sur  $S$  telle que :*

- 1)  $C \cap Z = \emptyset$ ;
- 2)  $[E|_C] \neq 0$  et  $E|_C$  est instable;
- 3)  $C^2 > 4c_2(E) - c_1(E)^2$ ;
- 4)  $C + L$  et  $L$  sont nef, et  $L^2 > 0$ .

*Alors il existe un sous-schéma  $Z'$  de  $Z$  avec  $l(Z') \geq d(Z)$  et un diviseur effectif  $F$  contenant  $Z'$  tel que:*

$$F^2 \leq \frac{1}{2}(C + L)^2 - l(Z) - \frac{d}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{(C + L)^2(C^2 - 4c_2(E) + c_1^2(E))}$$

*et  $F \cdot C \leq l(Z) + \frac{d}{2} + F^2$ .*

## 2.3 Applications aux surfaces abéliennes

Soit  $S$  une surface abélienne dont le groupe de Néron-Severi est engendré par la classe d'une courbe  $C_0$ , avec  $C_0^2 = x$ . Nous voulons trouver un  $n$  suffisamment petit telle que pour toute courbe lisse  $C \sim nC_0$ , la restriction à  $C$  du fibré générique  $E$  dans un espace de modules convenable est stable. Evidemment, cette propriété ne change pas lorsqu'on remplace  $E$  par  $E \otimes L$ , pour  $L \in \text{Pic}(S)$ . On peut donc normaliser  $E$  de façon que son déterminant soit  $\mathcal{O}_S$  ou  $\mathcal{O}_S(C_0)$ . Par la suite, nous allons considérer seulement le cas de déterminant trivial, l'autre cas étant tout-à-fait analogue. La méthode de la première partie va pouvoir être appliquée seulement dans le cas où  $c_2(E) = c \in \mathbf{N}^*$  est de la forme  $xk^2$  ou  $xk^2 + 1$  et donc on va travailler avec cette hypothèse dans la suite.



**Lemme 2.3.1** Soit  $\mathcal{M}_c$  l'espace des modules des fibrés  $E$  de rang 2  $C_0$ -stables avec  $\det(E) = \mathcal{O}_S$  et  $c_2(E) = c$ . Ecrivons  $c = xk^2 + c_0$ , avec  $0 \leq c_0 \leq 1$ .

i) Si  $c_0 = 0$  il existe une composante de  $\mathcal{M}_c$  et  $E$  un fibré dans cette composante de  $\mathcal{M}_c$  qui s'écrit comme l'extension:

$$0 \longrightarrow P_a(-kC_0) \longrightarrow E \longrightarrow P_{-a}(kC_0)J_Z \longrightarrow 0$$

avec  $l(Z) = 2c = 2xk^2$  et tel que  $Z$  ne se trouve pas sur une courbe  $\sim lC_0$  avec  $l < 2k$ .

ii) Si  $c_0 = 1$ , il existe une composante irréductible dans  $\mathcal{M}_c$  et un fibré  $E$  dans cette composante qui s'écrit comme l'extension

$$0 \longrightarrow P_a(-kC_0) \longrightarrow E \longrightarrow P_{-a}(kC_0)J_Z \longrightarrow 0,$$

avec  $l(Z) = 2xk^2 + 1$  et tel que  $Z$  ne se trouve pas sur une courbe  $\sim lC_0$  avec  $l < 2k$ .

*Démonstration.* i) Soit  $Z$  un ensemble de  $2xk^2$  points distincts sur une courbe lisse de  $|P_{-2a}(2kc_0)|$  tel que

$$h^0(P_{-2a}(2kc_0) \otimes J_Z) = 1 \tag{2.12}$$

et  $Z$  est en position spéciale pour  $|P_{-2a}(2kc_0)|$ . L'existence d'un tel  $Z$  est évidente à cause du fait que  $l(Z) = h^0(P_{-2a}(2kc_0))$ . Alors  $Z$  ne se trouve pas sur une courbe  $\sim lC_0$  avec  $l < 2k$ , car si non, pour une telle courbe  $D$ ,  $P_{-2a}(2kC_0) \otimes \mathcal{O}_X(-D)$  est effectif et alors  $Z$  se trouve aussi sur une courbe réductible de  $|P_{-2a}(2kc_0)|$  en contradiction avec (2.12). Soit  $E$  l'extension canonique suivante:

$$0 \longrightarrow P_a(-kC_0) \longrightarrow E \longrightarrow P_{-a}(kC_0)J_Z \longrightarrow 0.$$

L'argument utilisé ci-dessus montre que  $E$  est stable.

ii) Soit maintenant  $Z$  un ensemble de  $2xk^2 + 1$  points distincts en position spéciale pour  $|P_{-2a}(2kc_0)|$  tel que

$$h^0(P_{-2a}(2kc_0) \otimes J_Z) = 0.$$

Le même argument qu'on a utilisé au point i), nous montre que  $Z$  donne une unique extension non-triviale,

$$0 \longrightarrow P_a(-kC_0) \longrightarrow E \longrightarrow P_{-a}(kC_0)J_Z \longrightarrow 0,$$

pour laquelle le fibré  $E$  est stable et vérifie les conditions du lemme. Q.E.D.

Notons  $k_0 := \lfloor \sqrt{\frac{c}{x}} \rfloor$ . Il existe alors un fibré en droites  $N \sim \mathcal{O}_S(k_0 C_0)$  et une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow E \otimes N \longrightarrow LJ_Z \longrightarrow 0, \quad (2.13)$$

avec  $L = N^2$  et  $l(Z) = c + xk_0^2$ .

Par la suite on veut trouver  $n$  aussi petit que possible en fonction de  $c$  tel que pour toute courbe lisse  $\sim nC_0$  la restriction d'un fibré générique qui se trouve dans les composantes spécifiées dans le lemme 2.3.1 soit stable. Pour cela nous allons appliquer les résultats de la première section au fibré  $E \otimes P_{-a}(k_0 C_0)$  dans les cas du lemme 2.3.1, de sorte qu'on a, avec les notations de la partie 2.2,  $L \sim \mathcal{O}_S(2k_0 C_0)$ . On va utiliser le théorème 2.2.5 pour trouver, dans le cas où la restriction n'est ni stable ni scindée, un diviseur  $F$  passant par un certain sous-schéma  $Z' \subset Z$ . Puisque dans les deux cas du lemme 2.3.1 on a  $H^1(LJ_Z) = \mathbf{C}$ , on va trouver  $Z' = Z$ . En plus, pour  $n$  suffisamment grand,  $F$  va être  $\sim lC_0$  avec  $l < 2k_0$  et la construction du lemme 2.3.1 va nous permettre de conclure que cela est impossible.

Soit donc  $E$  un des deux fibrés construits dans le lemme 2.3.1 et  $C$  une courbe lisse algébriquement équivalente à  $nC_0$  telle que  $Z \cap C = \emptyset$ . A cause du diagramme(2.1), la classe d'extension  $[E|_C]$  n'est pas nulle si et seulement si  $Z$  est en position générale pour  $\mathcal{O}_S(C)L$ . Supposons le contraire. Alors, ayant en vu que  $H^1(LJ_Z) = \mathbf{C}$ , on a que  $Z$  est en position spéciale pour  $|\mathcal{O}_S(C)L|$  et donc d'après [10] on obtient une extension

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S \longrightarrow \xi \longrightarrow \mathcal{O}_S(C)LJ_Z \longrightarrow 0$$

où le faisceau  $\xi$  est localement libre. Choisissons  $n$  tel que  $(C + L)^2 > 4l(Z)$ , c'est-à-dire

$$x(n + 2k_0)^2 > 4(c + xk_0^2). \quad (2.14)$$

D'après [17],  $\xi$  est alors instable au sens de Bogomolov et on obtient le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
& & & O & & & \\
& & & \uparrow & & & \\
& & & \mathcal{O}_S(F)J_A & & & \\
& & & \uparrow & & & \\
O & \longrightarrow & \mathcal{O}_S & \longrightarrow & \xi & \longrightarrow & \mathcal{O}_S(C)LJ_Z \longrightarrow 0 \\
& & & & \uparrow & \nearrow \psi & \\
& & & & \mathcal{O}_S(M) & & \\
& & & & \uparrow & & \\
& & & & 0 & & 
\end{array}$$

où  $M$  et  $F$  sont des diviseurs sur  $S$  satisfaisant les conditions :

- 1)  $M + F \sim (n + 2k_0)C_0$
- 2)  $M \cdot F \leq c + xk_0^2$
- 3)  $(M - F) \cdot C_0 > 0$
- 4)  $F$  est effectif et passe par  $Z$ .

Ecrivons  $M \sim \alpha C_0$  et  $F \sim \beta C_0$ . Alors :

- 1')  $\alpha + \beta = n + 2k_0$
- 2')  $x\alpha \cdot \beta \leq c + xk_0^2$
- 3')  $\alpha - \beta \geq 1$ .

Une manipulation facile montre que pour tout  $n \geq 2k_0 + 1$  la condition (2.14) est vérifiée et que avec 1'), 2') et 3') on trouve  $\beta < 2k_0$ . Selon le lemme 2.3.1, cela n'est pas possible et donc on a le lemme suivant :

**Lemme 2.3.2** *Si  $n \geq 2k_0 + 1$ , pour toute courbe  $C \sim nC_0$  lisse, la restriction de l'extension (2.13) n'est pas scindée.*

Supposons maintenant  $xn^2 > 4c$ ; il suffit pour cela de prendre  $n \geq 2k_0 + 1$ . Considérons l'extension (2.13) avec  $Z \cap C = \emptyset$ , et supposons que la restriction  $E|_C$  soit instable. D'après la partie 2.2 et le fait que  $H^1(LJ_Z) = \mathbf{C}$  il existe un diviseur  $M$  et un diviseur effectif  $F$  sur  $S$  passant par  $Z$  et :

$$\begin{aligned}
M + F &\sim (n + 2k_0)C_0 \\
M \cdot F &\leq c + xk_0^2 + xnk_0 \\
(M - F) \cdot C_0 &> 0.
\end{aligned}$$

Ecrivons  $M \sim \alpha C_0$  et  $F \sim \beta C_0$ . Alors

- a)  $\alpha + \beta = n + 2k_0$
- b)  $x\alpha \cdot \beta \leq c + xk_0^2 + xnk_0$
- c)  $\alpha - \beta \geq 1$ .

Posons  $P(z) = z^2 - z(n + 2k_0) + \frac{c}{x} + k_0^2 + nk_0$ ; on déduit de a) et b) qu'on a  $P(\beta) \geq 0$ . Les zéros de  $P(z)$  sont

$$\beta_{\pm} = \frac{n}{2} + k_0 \pm \sqrt{\frac{n^2}{4} - \frac{c}{x}}.$$

La condition c) entraîne  $\beta < \beta_+$ , donc l'inégalité  $P(\beta) \geq 0$  impose  $\beta \leq \beta_-$ . Supposons que l'on ait  $\beta_- < 2k_0$ ; on en déduira que  $Z$  est contenu dans la courbe  $F \sim \beta C_0$ , avec  $\beta < 2k_0$ , ce qui est impossible. Un calcul facile montre que l'inégalité  $\beta_- < 2k_0$  équivaut à  $n > k_0 + \frac{c}{xk_0}$  et comme  $c \leq x(k_0 + 1)^2 - 1$ , il suffit que :

$$n \geq 2k_0 + 3.$$

Dans ces conditions la restriction de  $E$  est stable et alors la restriction d'un fibré générique dans la composante de  $E$  est stable.

On peut conclure avec le théorème suivant :

**Théorème 2.3.3** *Pour  $c$  de la forme  $xk^2$  ou  $xk^2 + 1$ , dans  $\mathcal{M}_c$  il existe une composante telle que pour toute courbe lisse  $C \sim nC_0$ , avec  $n \geq 2k_0 + 3$  la restriction d'un fibré générique dans cette composante est stable.*

**Remarque 2.3.4** 1) Le nombre  $n_0 = 2k_0 + 3$  est d'ordre  $\sqrt{\frac{4c_2}{x}}$ .

2) Des estimations tout-à-fait analogues peuvent être obtenues dans le cas  $\det(E) \sim \mathcal{O}_S(C_0)$ .

3) Soit  $S$  la jacobienne d'une courbe  $C$  de genre deux, avec  $NS(S) = \mathbf{Z} \cdot C$ . Dans le cas des fibrés stables avec  $\det(E) = \mathcal{O}_S(C)$  et  $c_2 = 1$  on peut démontrer avec des arguments tout-à-fait élémentaires que la restriction à  $C$  est instable. La méthode ci-dessus nous permet de démontrer que la restriction sur une courbe  $\sim 2C$  d'un fibré générique est stable. De même, dans le cas  $c_2 = 2$ , des arguments simples montrent que la restriction sur  $C$  d'un fibré générique est stable, ce que l'on obtient aussi par la méthode présentée ici. Dans ces cas nos résultats sont donc optimaux.

# Chapitre 3

## Fibrés vectoriels semi-stables sur une courbe de genre deux

### 3.1 Introduction

Soit  $C$  une courbe lisse de genre deux, munie d'une thêta caractéristique fixée, notée  $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$ . On désigne par  $\mathcal{M}_r$  l'espace de modules des fibrés semi-stables  $E$  sur  $C$  de rang  $r$ , avec  $\det E = \mathcal{K}^{\frac{r}{2}}$ . Soit  $J$  la jacobienne de  $C$ . D'après [16], pour  $E$  générique dans  $\mathcal{M}_r$ , l'ensemble :

$$D_E := \{\alpha \in J \mid H^0(E \otimes \alpha) \neq 0\}$$

est un diviseur sur  $J$ , qui fait partie du système  $|r\Theta|$  où  $\Theta$  est le diviseur thêta de  $J$  associé à  $\mathcal{K}^{\frac{1}{2}}$ . On obtient ainsi une application rationnelle

$$D : \mathcal{M}_r \dashrightarrow |r\Theta| = \mathbf{P}^{r^2-1}.$$

De plus, d'après [8], le groupe de Picard de  $\mathcal{M}_r$  est engendré par la classe du diviseur  $\Theta_{\mathcal{M}_r} := \{E \in \mathcal{M}_r \mid H^0(E) \neq 0\}$ , et d'après [4], l'application  $D$  s'identifie à l'application rationnelle définie par le système linéaire  $|\Theta_{\mathcal{M}_r}|$ .

Dans cet article nous proposons une méthode géométrique pour étudier l'application  $D$ . L'idée fondamentale est de présenter un fibré  $E$  générique dans  $\mathcal{M}_r$  à l'aide d'une suite exacte

$$0 \rightarrow E \rightarrow \mathcal{K}(p)^r \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} \rightarrow 0$$

où  $\sum q_i$  est la trace sur  $C$  du diviseur  $D_E$ . Nous montrons que le fibré  $E$  est déterminé par la donnée du diviseur  $\sum q_i$  sur  $C$  et de  $2r$  points dans un espace projectif  $\mathbf{P}_{r-1}$ , puis que l'involution  $E \mapsto \sigma^*(E^\vee \otimes \mathcal{K})$  (où  $\sigma$  est l'involution hyperelliptique de  $C$ ) correspond à l'association des ensembles de  $2r$  points dans  $\mathbf{P}_{r-1}$  [7].

## 3.2 Involution de l'espace des modules

Soit  $E$  un fibré stable de rang  $r$  sur  $C$  avec  $\det E = \mathcal{K}_C^{\frac{r}{2}}$ . Soit  $p \in C$  fixé et  $E^\vee$  le dual de  $E$ . Supposons  $H^0(E(-p)) = 0$ . Nous avons:

$$\deg(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) = 2r \quad \text{et} \quad \chi(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) = r.$$

Par dualité nous trouvons:

$$H^1(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p))^\vee \cong H^0(E(-p)) = 0$$

à cause de la stabilité de  $E$ , et par suite:

$$h^0(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) = \dim \text{Hom}(\mathcal{K}^\vee(-p), E^\vee) = r.$$

Posons  $V_E := \text{Hom}(E, \mathcal{K}(p))$ . Pour tout fibré  $E$  sur  $C$  on a une application canonique:

$$v_E : E \rightarrow \mathcal{K}(p) \otimes V_E^\vee.$$

**Lemme 3.2.1** *L'application  $v_E$  est un isomorphisme au-dessus d'un point  $q$  de  $C$  si et seulement si  $\mathcal{O}_C(q-p) \notin D_E$ .*

*Démonstration.* A cause de la stabilité,  $H^0(E(-p)) = 0$ . Au-dessus de  $q \in C$ , le noyau de  ${}^t v_E \otimes 1_{\mathcal{K}(p)} : V_E \rightarrow \mathcal{H}om(E, \mathcal{K}(p))$  s'identifie au sous-espace de  $V_E = \text{Hom}(E, \mathcal{K}(p))$  formé par les homomorphismes nuls en  $q$ , c'est-à-dire à  $\text{Hom}(E, \mathcal{K}(p-q))$ . Mais on a

$$\begin{aligned} \dim \text{Hom}(E, \mathcal{K}(p-q)) &= h^0(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p-q)) \\ &= h^1(E \otimes \mathcal{O}_C(q-p)) \quad \text{par dualité} \\ &= h^0(E \otimes \mathcal{O}_C(q-p)) \quad \text{car } \chi(E) = 0, \end{aligned}$$

d'où le lemme. **Q.E.D.**

Notons  $i_p$  le plongement de  $C$  dans  $J$  défini par  $i_p(x) = \mathcal{O}_C(x-p)$  et  $C_p := i_p(C)$ .

**Lemme 3.2.2** Soit  $E \in \mathcal{M}_r$  tel que  $D_E \not\in C_p$ . Alors le conoyau de  $v_E : E \rightarrow \mathcal{K}(p) \otimes V_E^\vee$  est de torsion, et on a  $\text{div}(\det v_E) = i_p^* D_E \in |r(\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} + p)|$ .

*Démonstration.* L'assertion sur le conoyau de  $v_E$  résulte du 3.2.1. Notons  $f, g$  les deux projections de  $C \times C$  sur  $C$ . Soit  $\mathcal{P}$  un fibré de Poincaré sur  $C \times J$  et  $\mathcal{P}_p$  son image réciproque sur  $C \times C$  par le morphisme  $(1_C, i_p)$ . Par définition de  $D_E$ , pour toute résolution localement libre

$$0 \rightarrow L_1 \xrightarrow{u} L_0 \rightarrow \mathcal{R}^1 g_*(f^*(E^\vee \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{P}_p^{-1}) \rightarrow 0,$$

on a  $i_p^* D_E = \text{div}(\det u)$ . Mais on a  $\mathcal{P}_p|_{C \times \{x\}} = \mathcal{O}_C(x - p)$  et du fait que  $\det u$  ne change pas si on remplace  $\mathcal{P}_p$  par  $\mathcal{P}_p \otimes g^* M$  avec  $M \in \text{Pic}(C)$ , on peut prendre  $\mathcal{P}_p = \mathcal{O}(\Delta - f^*[p])$ , où  $\Delta$  est la diagonale de  $C \times C$ . Soit  $d$  l'injection canonique de  $\Delta$  dans  $C \times C$ ; considérons sur  $C \times C$  la suite exacte

$$0 \rightarrow f^*(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) \otimes \mathcal{O}(-\Delta) \rightarrow f^*(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) \rightarrow d_*(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) \rightarrow 0.$$

Par application de  $\mathcal{R}g_*$ , on trouve :

$$0 \rightarrow H^0(E^\vee \otimes \mathcal{K}(p)) \otimes_{\mathbf{C}} \mathcal{O}_C \xrightarrow{u} E^\vee \otimes \mathcal{K}(p) \rightarrow \mathcal{R}^1 g_*(f^*(E^\vee \otimes \mathcal{K}) \otimes \mathcal{P}_p^{-1}) \rightarrow 0$$

et donc  $i_p^* D_E = \text{div}(\det u) = \text{div}(\det v_E)$ . D'autre part  $\det v_E$  est une section (non nulle) de  $(\det E)^{-1} \otimes (\mathcal{K}(p))^{\otimes r} \cong \mathcal{K}^{\frac{r}{2}}(rp)$ . **Q.E.D.**

**Remarque 3.2.3** La démonstration ci-dessus est la transcription en rang arbitraire de la démonstration du lemme 4.2 de [3].

Ce lemme nous montre que l'application rationnelle  $D$  s'inscrit dans le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}_r & \overset{D}{\dashrightarrow} & |r\Theta| \\ & \searrow \mathcal{P} & \swarrow i_p^* \\ & & |r(\mathcal{K}^{1/2} + p)| \end{array}$$

avec  $\mathcal{P}(E) = \text{div}(\det v_E)$ . Soit  $Q = \sum_{i=1}^{2r} q_i$  un diviseur de  $|r(K^{\frac{1}{2}} + p)|$  formé de  $2r$  points distincts. Nous allons maintenant étudier la fibre de  $\mathcal{P}$  au-dessus de  $Q$ .

Soit  $E \in \mathcal{M}_r$  un fibré tel que  $\text{div}(\det v_E) = \sum q_i$ . Alors  $E$  admet une présentation

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{v_E} \mathcal{K}(p) \otimes_{\mathbf{C}} V_E^{\vee} \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} \rightarrow 0. \quad (3.1)$$

L'homomorphisme  $\lambda$  détermine  $2r$  formes linéaires  $L_1, \dots, L_{2r}$  sur  $V_E^{\vee}$ , bien définies à un scalaire près, autrement dit  $2r$  points de  $\mathbf{P}(V_E)$ ; on associe ainsi à  $E$  une orbite du groupe  $PGL(r)$  agissant diagonalement sur  $(\mathbf{P}_{r-1})^{2r}$ .

**Lemme 3.2.4** *Le point  $(L_i) \in (\mathbf{P}_{r-1})^{2r}$  est semi-stable pour l'action du groupe  $PGL(r)$ .*

Démonstration. Posons  $V = \mathbf{C}^r$  et considérons les  $L_i$  comme des vecteurs de  $V$ . D'après [7], une condition nécessaire et suffisante pour que  $(L_i)$  soit semi-stable est que pour tout sous-ensemble  $\{i_1, \dots, i_k\}$  de  $\{1, \dots, 2r\}$  la dimension du sous-espace  $W \subset V$  engendré par  $L_{i_1}, \dots, L_{i_k}$  soit  $\geq \frac{k}{2}$ . Or on a un diagramme commutatif de suites exactes

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & E & \rightarrow & \mathcal{K}(p) \otimes V^{\vee} & \xrightarrow{(L_i)} & \bigoplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \rightarrow & F & \rightarrow & \mathcal{K}(p) \otimes W^{\vee} & \xrightarrow{(L_{i_j})} & \bigoplus_{j=1}^k \mathcal{O}_{q_{i_j}} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ & & 0 & & 0 & & 0 & & \end{array}$$

avec  $\text{rang}(F) = \dim(W)$  et  $\text{deg}(F) = 3 \dim(W) - k$ . La semi-stabilité de  $E$  implique alors  $k \geq 2 \dim(W)$ . **Q.E.D.**

On a donc construit un morphisme  $L : \mathcal{P}^{-1}(Q) \rightarrow (\mathbf{P}_{r-1})_{ss}^{2r} / PGL(r)$ . Inversement, soient  $L_1, \dots, L_{2r}$  des points de  $\mathbf{P}_{r-1}$ . On leur associe des homomorphismes (non nuls)  $\tilde{L}_i : \mathcal{K}(p)^r \rightarrow \mathcal{O}_{q_i}$ , bien définis à un scalaire près; le noyau  $E$  de  $\lambda = \bigoplus \tilde{L}_i$ , qui ne dépend que de la famille  $(L_i)$ , est un fibré de rang  $r$ , de déterminant  $\mathcal{K}^{\frac{r}{2}}$ , qui s'insère dans une suite exacte

$$0 \rightarrow E \xrightarrow{i} \mathcal{K}(p)^r \xrightarrow{\lambda} \bigoplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} \rightarrow 0. \quad (3.2)$$



Pour que l'homomorphisme  $i$  s'identifie à l'homomorphisme  $v_E$  de la suite exacte (3.1), il faut et il suffit qu'on ait  $H^0(C, E(-p)) = 0$ , c'est-à-dire que l'homomorphisme  $H^0(\lambda) : H^0(\mathcal{K})^r \rightarrow \mathbf{C}^{2r}$  soit bijectif. Si c'est le cas, la suite exacte (3.2) montre qu'on a  $\text{div}(\det v_E) = Q$ , ce qui entraîne que  $E$  est semi-stable et appartient à  $\mathcal{P}^{-1}(Q)$ . En termes des points  $L_i = (L_i^1, \dots, L_i^r)$  de  $\mathbf{P}_{r-1}$ , la condition sur  $H^0(\lambda)$  s'explique comme suit. Notons  $\varphi : C \rightarrow \mathbf{P}_1$  le morphisme canonique, en choisissant le point à l'infini de  $\mathbf{P}_1$  en dehors des  $q_i$ . Alors  $H^0(\lambda)$  est donné par la matrice

$$\Delta(L) = \begin{pmatrix} L_1^1 & \dots & L_1^r & \varphi(q_1)L_1^1 & \dots & \varphi(q_1)L_1^r \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ L_{2r}^1 & \dots & L_{2r}^r & \varphi(q_{2r})L_{2r}^1 & \dots & \varphi(q_{2r})L_{2r}^r \end{pmatrix}.$$

et  $H^0(\lambda)$  est bijectif si et seulement si  $\det \Delta(L) \neq 0$ . En conclusion:

**Proposition 3.2.5** *Soit  $Q$  un diviseur dans  $|r(\mathcal{K}^{1/2} + p)|$  formé de  $2r$  points distincts. L'application  $E \mapsto (L_i)$  définit un isomorphisme de la fibre  $\mathcal{P}^{-1}(Q)$  sur l'ouvert du quotient  $(\mathbf{P}_{r-1})_{ss}^{2r}/PGL(r)$  correspondant aux familles  $(L_i)$  telles que  $\det \Delta(L) \neq 0$ .*

Soit maintenant  $\sigma$  l'involution canonique de  $C$ . Pour  $E \in \mathcal{M}_r$ , notons  $\tilde{E} := \sigma^*(E^\vee \otimes \mathcal{K})$ . On a évidemment  $\tilde{E} \in \mathcal{M}_r$ , de sorte que  $\sim$  est une involution de  $\mathcal{M}_r$ .

**Lemme 3.2.6** *Pour tout  $E \in \mathcal{M}_r$  on a  $D_E = D_{\tilde{E}}$*

*Démonstration.* Soient  $x, y$  des points de  $C$ . On a

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_C(x-y) \in D_{\tilde{E}} & \\ \iff h^0(\tilde{E}(x-y)) \neq 0 & \\ \iff h^0(E^\vee \otimes \mathcal{K}(\sigma(x) - \sigma(y))) \neq 0 & \text{ par application de } \sigma^* \\ \iff h^1(E(\sigma(y) - \sigma(x))) \neq 0 & \text{ par dualité} \\ \iff h^0(E(\sigma(y) - \sigma(x))) \neq 0 & \text{ car } \chi(E) = 0 \\ \iff h^0(E(x-y)) \neq 0 & \text{ car } \sigma(y) - \sigma(x) \equiv x - y \\ \iff \mathcal{O}_C(x-y) \in D_E. & \end{aligned}$$

Comme tout élément de  $J$  est de la forme  $\mathcal{O}_C(x-y)$  pour  $x$  et  $y$  convenables, cela prouve le lemme. **Q.E.D.**

Par suite l'involution  $\sim$  induit une involution de chaque fibre  $\mathcal{P}^{-1}(Q)$  pour  $Q \in |r(\mathcal{K}^{\frac{1}{2}} + p)|$ . Notre résultat principal est d'identifier cette involution à l'aide de l'isomorphisme défini dans la prop. 3.2.5. Rappelons suivant [7] qu'étant donnés  $2r$  points  $L_i$  dans un espace projectif  $\mathbf{P}(V)$  on peut définir un nouvel ensemble de points, dit *associé*, de la manière suivante: on représente les points par des vecteurs  $L_i \in V$ ; ils définissent une application  $L : \mathbf{C}^{2r} \rightarrow V$ , qu'on suppose surjective. Notant  $N$  le noyau de  $L$ , on obtient par transposition un homomorphisme  $\mathbf{C}^{2r} \rightarrow N^\vee$  qui définit l'ensemble de points associés dans  $\mathbf{P}(N^\vee)$ . On vérifie que cette construction ne dépend pas des choix faits, et définit un automorphisme involutif de la variété quotient  $(\mathbf{P}_{r-1})_{ss}^{2r}/PGL(r)$ .

**Théorème 3.2.7** *Soit  $Q$  un diviseur dans  $|r(\mathcal{K}^{1/2} + p)|$  formé de  $2r$  points distincts. Par l'isomorphisme  $E \mapsto (L_i)$  défini dans la proposition, l'involution  $E \mapsto \sigma^*(E^\vee \otimes \mathcal{K})$  de  $\mathcal{P}^{-1}(Q)$  correspond à l'association des ensembles de points dans  $(\mathbf{P}_{r-1})_{ss}^{2r}/PGL(r)$ .*

*Démonstration.* A cause du lemme 3.2.6,  $\tilde{E}$  a aussi une présentation du type (3.1):

$$0 \rightarrow \tilde{E} \xrightarrow{v_{\tilde{E}}} \mathcal{K}(p) \otimes_{\mathbf{C}} \tilde{V}^\vee \rightarrow \bigoplus_{i=1}^{2r} \mathcal{O}_{q_i} \rightarrow 0, \quad (3.3)$$

où l'on a posé  $\tilde{V} := \text{Hom}(\tilde{E}, \mathcal{K}(p))$ . Pour la suite, on va fixer  $x_0 \in C$  tel que  $x_0 \neq p$ . Faisons le produit tensoriel de (3.1) par  $\mathcal{O}_C(-x_0)$ . On trouve:

$$0 \rightarrow E(-x_0) \rightarrow \mathcal{O}_C(p + \sigma(x_0)) \otimes V^\vee \rightarrow \bigoplus \mathcal{O}_{q_i} \rightarrow 0 \quad (3.4)$$

et les formes  $L_i$  qui définissent  $E$  peuvent être vues en cohomologie:

$$0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_C(p + \sigma(x_0))) \otimes V^\vee \xrightarrow{\oplus L_i} H^0(\bigoplus \mathcal{O}_{q_i}) \rightarrow H^1(E(-x_0)) \rightarrow 0$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & & \parallel \\ \mathbf{C}^r & & \mathbf{C}^{2r} \\ & & \parallel \\ & & \mathbf{C}^r \end{array} \quad (3.5)$$

La condition  $p \neq x_0$  assure les dimensions écrites et le fait que la suite est exacte. Prenons maintenant le dual de (3.4), tensorisons par  $\mathcal{K}$  et appliquons  $\sigma^*$ . Nous trouvons:

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-\sigma(p) + \sigma(x_0)) \otimes \sigma^*V \rightarrow \tilde{E}(\sigma(x_0)) \xrightarrow{h} \bigoplus \mathcal{O}_{\sigma(q_i)} \rightarrow 0 \quad (3.6)$$

où  $\sigma^*V := H^0(\tilde{E}(\sigma(p)))$ . La flèche  $h$  est définie par des formes linéaires  $L'_i$  sur les fibres de  $\tilde{E}(\sigma(x_0))$  en  $\sigma(q_i)$ . De même que pour (3.4), les  $L'_i$  peuvent être vues en cohomologie:

$$0 \rightarrow H^0(\tilde{E}(\sigma(x_0))) \xrightarrow{\oplus L'_i} H^0(\oplus \mathcal{O}_{\sigma(q_i)}) \xrightarrow{f} H^1(\mathcal{O}_C(-\sigma(p) + \sigma(x_0))) \otimes \sigma^*V \rightarrow 0 \quad (3.7)$$

Maintenant, par dualité, la suite (3.7) s'écrit :

$$0 \rightarrow \sigma^*H^1(E(-x_0))^\vee \xrightarrow{\oplus L'_i} \sigma^*H^0(\oplus \mathcal{O}_{q_i})^\vee \xrightarrow{f} \sigma^*(H^0(p + \sigma(x_0)) \otimes V^\vee)^\vee \rightarrow 0 \quad (3.8)$$

où  $\sigma^*H^1(E(-x_0))^\vee = H^1(\sigma^*(E(-x_0)))^\vee$ . La suite (3.8) est exactement le dual de (3.5) transformé par  $\sigma^*$  et donc  $f = \sigma^*({}^t\oplus L_i)$ . La suite (3.8) signifie exactement que les ensembles  $(\sigma^*L_i)_i$  et  $(L'_i)_i$  sont associés.

Prenons maintenant la suite (3.3) tensorisée par  $\mathcal{O}_C(\sigma(x_0))$ . Notons  $\tilde{L}_i$  les formes définissant  $\tilde{E}$  dans (3.3). En utilisant aussi la suite (3.5) on trouve le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 0 & & & \\ & & & \downarrow & & & \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-\sigma(p) + \sigma(x_0)) \otimes \sigma^*V & \rightarrow & \tilde{E}(\sigma(x_0)) & \xrightarrow{\oplus L'_i} & \oplus \mathcal{O}_{\sigma(q_i)} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & & & \\ 0 \rightarrow \mathcal{O}_C(-\sigma(p) + \sigma(x_0)) \otimes \sigma^*V & \rightarrow & \mathcal{K}(p + \sigma(x_0)) \otimes \tilde{V}^\vee & \xrightarrow{g} & \oplus \mathcal{O}_{\sigma(q_i)} \oplus \mathcal{O}_{q_i} & \rightarrow & 0 \\ & & \downarrow \oplus \tilde{L}_i & & & & \\ & & \oplus \mathcal{O}_{q_i} & & & & \\ & & \downarrow & & & & \\ & & 0 & & & & \end{array}$$

Maintenant l'application  $g$  ci-dessus est donnée par les  $L'_i$  au-dessus des  $\sigma(q_i)$  et par les  $\tilde{L}_i$  au-dessus des  $q_i$ . Mais la deuxième suite horizontale du diagramme tensorisée par  $\mathcal{O}_C(\sigma(p) - \sigma(x_0))$  est  $\sigma^*$ -invariante, à cause du fait que toute section de  $H^0(\mathcal{K}^2)$  est  $\sigma^*$  invariante. On a donc  $\sigma^*\tilde{L}_i = L'_i$ , et comme l'ensemble  $(L'_i)$  est associé avec  $(\sigma^*L_i)$ , les ensembles  $(\tilde{L}_i)$  et  $(L_i)$  sont associées. Cela achève la démonstration. **Q.E.D.**

# Chapitre 4

## Une construction de fibrés vectoriels stables de rang deux avec $c_2$ suffisamment grand sur une surface algébrique

### 4.1 Introduction

L'existence des fibrés stables de rang et  $c_1$  arbitraires et avec  $c_2$  suffisamment large a été prouvée récemment dans [11]. La méthode utilisée permet de trouver la borne à partir duquel de tels fibrés existent seulement quand le groupe de Neron-Severi de la surface est  $\mathbf{Z}$ . D'autre part dans [15], Qin prouve pour  $c_1$  satisfaisant certaines conditions numériques et  $c_2$  plus grand qu'une constante explicite, l'existence d'un fibré  $E$  de rang deux et d'une polarisation  $H$ , tel que  $E$  est  $H$ -stable.

Soient  $S$  une surface algébrique, lisse sur  $\mathbf{C}$ ,  $H$  une polarisation de  $S$  et  $L \in \text{Pic}(S)$ . Pour  $c$  plus grand qu'une constante explicite (dependant du nombre de points qu'on doit choisir sur un multiple de la polarisation tel que les points ne soient pas situés sur des éléments du système adjoint de  $L$  et sur certaines courbes satisfaisant la condition 4.1), nous construirons des fibrés de rang deux  $H$ -stable avec le déterminant  $L$  et la seconde classe de Chern égale à  $c$ . La constante sera en liéson avec des points situés

## 4.2 Construction de fibrés stables de rang deux

Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la polarisation est représentée par un diviseur très ample. On établit le lemme suivant qui sera le point clef de notre construction.

**Lemme 4.2.1** *Soit  $E$  un fibré de rang deux présenté comme l'extension*

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_S(L) \otimes \mathcal{J}_Z \rightarrow 0,$$

où  $Z$  est une sous-schéma de dimension 0 sur  $S$ . Si  $L \cdot H > 0$  et  $E$  n'est pas stable, il existe un diviseur effectif  $F$  tel que

$$\begin{aligned} H^0(\mathcal{O}_S(F) \otimes \mathcal{J}_Z) &\neq 0 \\ F \cdot H &\leq \frac{L \cdot H}{2}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

*Démonstration:* Si  $E$  n'est pas stable, il existe un morphisme non nul  $\mathcal{O}_S(D) \rightarrow E$  tel que  $D \cdot H \geq L \cdot H/2$ . La flèche  $\mathcal{O}_S(D) \rightarrow \mathcal{O}_S(L) \otimes \mathcal{J}_Z$  est non nulle. Autrement  $-D$  est effectif ou 0, ce que contredit l'inégalité  $D \cdot H \geq L \cdot H/2 > 0$ . Donc  $H^0(\mathcal{O}_S(L-D) \otimes \mathcal{J}_Z) \neq 0$  et en plus  $(L-D) \cdot H \leq L \cdot H/2$ . Pour finir on prend  $F = L - D$ . **Q.E.D.**

Nous faisons les notations suivantes: pour  $L \cdot H > 0$

$$\begin{aligned} n_L &= \inf \{n \in \mathbf{N}^* \mid nH^2 > \frac{L \cdot H}{2}, nH^2 > (L + K_S) \cdot H\} \\ \alpha(L, H) &= \max \{h^0(\mathcal{O}_S(L + K_S)) + 1, 2 + n_L H \cdot (L + K_S), 1 + n_L \frac{L \cdot H}{2}\}, \end{aligned}$$

et pour  $L \cdot H$  arbitraire

$$\beta(L, H) = \begin{cases} \alpha(L, H) & \text{si } L \cdot H > 0 \\ \alpha(-L, H) & \text{si } L \cdot H < 0 \\ \alpha(L + 2H, H) - H^2 & \text{si } L \cdot H = 0 \end{cases}$$

La construction est donné dans le théorème suivant:

**Théorème 4.2.2** *Pour tout  $c \geq \beta(L, H)$  il existe un fibré de rang deux  $H$ -stable avec  $c_1(E) = L$  et  $c_2(E) = c$ .*

*Démonstration:* Supposons d'abord que  $L \cdot H > 0$ . Soient  $H_1 \in |n_L H|$  irréductible et  $Z \subset H_1$  un 0-cycle formé par des points distincts tels que  $l(Z) \geq \alpha(L, H)$ . Alors l'application  $H^0(\mathcal{O}_S(L + K_S)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_Z)$  n'est pas surjective car  $l(Z) \geq \alpha(L, H) \geq h^0(\mathcal{O}_S(L + K_S)) + 1$ . En utilisant les inégalités  $l(Z) \geq \alpha(L, H) \geq 2 + n_L H \cdot (L + K_S)$  et  $n_L H^2 > (L + K_S) \cdot H$  nous observons qu'il n'y a pas de courbes dans  $|L + K_S|$  passant par  $Z$  ou par un sous-cycle de longueur  $l(Z) - 1$ . Donc  $H^0(\mathcal{O}_S(L + K_S) \otimes \mathcal{J}_Z) = H^0(\mathcal{O}_S(L + K_S) \otimes \mathcal{J}_{Z'}) = 0$  pour tout  $Z' \subset Z$  avec  $l(Z') = l(Z) - 1$ . Alors  $Z$  est en position spéciale pour  $|L + K_S|$  et d'après [10], il existe une extension localement libre

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow E \rightarrow \mathcal{O}_S(L) \otimes \mathcal{J}_Z \rightarrow 0$$

avec  $c_1(E) = L$  et  $c_2(E) = l(Z)$ . Les inégalités

$$l(Z) \geq \alpha(L, H) \geq 1 + n_L \frac{L \cdot H}{2} n_L H^2 > \frac{L \cdot H}{2}$$

montrent qu'il n'y a pas de courbes effectives  $F$  passant par  $Z$  telles que  $F \cdot H \leq L \cdot H/2$ . En utilisant le lemme 4.2.1,  $E$  est  $H$ -stable.

Si  $L \cdot H < 0$  nous faisons la construction ci-dessus pour  $-L$  et on utilise le fait que  $E$  et  $E^\vee$  sont stables en même temps.

Si  $L \cdot H = 0$  nous faisons la construction ci-dessus pour  $L + 2H$  et nous obtenons un fibré  $E'$  comme extension

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_S \rightarrow E' \rightarrow \mathcal{O}_S(L + 2H) \otimes \mathcal{J}_Z \rightarrow 0.$$

Alors  $E = E' \otimes \mathcal{O}_S(-H)$  est un fibré  $H$ -stable avec les classes de Chern égales à  $L$  et respectivement  $c_2(E') - H^2$ . **Q.E.D.**

# Bibliography

- [1] A.Altman, S.Kleiman: Compactifying the Picard scheme. Adv. in Math. **35**, 50-112 (1980)
- [2] A.Beauville: Quelques remarques sur la transformation de Fourier dans l'anneau de Chow d'une variété abélienne. Algebraic Geometry (Tokyo/Kyoto 1982), LN **1016**, 238-260; Springer-Verlag (1983)
- [3] A.Beauville: *Fibrés de rang 2 sur une courbe, fibré déterminant et fonctions theta*. Bull.Soc.Math.France, 116, 1988, 431-448.
- [4] A.Beauville, M.S.Narasimhan : *Spectral curves and the generalized theta divisor*. J. reine angew. Math. 398, (1989), 169-179.
- [5] A.Beauville: Systèmes hamiltoniens complètement intégrables associés aux surfaces K3. Problems in the theory of surfaces and their classification, Symposia Mathematica **32**, 25-31; Academic Press (1991)
- [6] F. Bogomolov : *On stability of vector bundles on surfaces and curves*, Preprint
- [7] I.Dolgachev, D.Ortland : *Point sets in projective spaces and theta functions*, Astérisque 165, (1988).
- [8] J.M.Drezet, M.S.Narasimhan : *Groupes de Picard des variétés de modules de fibrés semistables sur les courbes algébriques*, Invent.Math. 97, (1989), 53-94.
- [9] R. Fahlaoui et Y. Laszlo: Transformée de Fourier et stabilité sur les surfaces abéliennes. Compositio math. **79**, 271-278 (1991)

- [10] P. Griffiths and J. Harris : *Residues and zero-cycles on algebraic varieties*, Ann. of Math. **108** (1978), 461-505
- [11] A. Hirschowitz, Y. Laszlo, *A propos de l'existence de fibrés stables sur les surfaces*, préprint (1993)
- [12] J. Le Potier : *Faisceaux semi-stables de dimension 1 sur le plan projectif*. Preprint (1992)
- [13] S. Mukai : *Duality between  $D(X)$  and  $D(\widetilde{X})$  with its applications to Picard Sheaves*. Nagoya Math. J. **81** , 153-175 (1981)
- [14] S. Mukai : *Symplectic structure of the moduli space of sheaves on an abelian or K3 surface*, Invent. Math. **77** (1984), 153-175
- [15] Z. Qin, *On the existence of stable rank-2 sheaves on algebraic surfaces*, J. reine. angew. Math. **439** (1993), 213-219
- [16] M. Raynaud : *Sections des fibrés vectoriels sur une courbe*, Bull.Soc.Math.France, 110, 1982, 103-125.
- [17] M. Reid : *Bogomolov theorem  $c_1^2 \leq 4c_2$* , Proc. Intern. Symp. on Algebraic Geometry, Kyoto, 1977, 633 -642
- [18] I. Reider : *Vector bundles of rank 2 and linear systems on algebraic surfaces*, Ann. of Math. **127** (1988), 309-316