INSTITUTUL DE MATEMATICĂ
”SIMION STOILOW” AL ACADEMIEI ROMÂNE

TEZĂ DE DOCTORAT

Contribuţii la omogenizarea mediilor compozite eterogene

Coordonator ştiinţific,
Prof. Dr. Dan Polişevschi

Doctorand,
Florentina-Alina Stănescu

Bucureşti, 2014

Cuprins

REZUMAT

Abstract În ultimele patru decenii numeroase studii având drept temă subiectul prezentei lucrări au fost realizate în acest scop: modelarea matematică a comportamentului macroscopic pentru structurile microscopice eterogene, folosind teoria omogenizării. Analiza la scară macroscopică a unor astfel de materiale, a fost iniţiată de către Rayleigh, Maxwell, Einstein şi continuată de J.L. Lions, E. Sanchez-Palencia, H. I. Ene, L. Tartar, D. Cioränescu, U. Hornung. Având în vedere importanţa acestor studii la nivelul problemelor de transport şi de transfer din cadrul mediilor compozite, subiectele nu au primit atenţie numai din partea comunităţii matematice ci au constituit o preocupare constantă şi pentru ingineri, fizicieni şi chimişti.

Cuvinte cheie: Omogenizare, transferul de căldură, convergenţa în dublă scară, medii poroase fracturate, fluid Stokes, interfaţă de tip Beavers-Joseph, medii parţial fisurate, problema de difuzie.

2000 MSC: 35B27, 76M50, 80M40, 76S05, 76T99.

1 Fundamente Matematice

Prima parte a Capitolului 1 este concepută ca secţiune introductivă, în care sunt inserate noţiuni şi rezultate clasice, ce vor fi utilizate pe parcursul acestei lucrări. Facem referire cititorului la Cioränescu şi Donato [13], Lukkassen, Nguetseng şi Wall [27], Allaire [3], Poliševschi [35] precum şi Girault şi Raviart [16].

În a doua parte a tezei, vom reconsidera două probleme clasice de omogenizare. Prima dintre acestea studiază comportamentul asimptotic al unei structuri elastice, conţinând fisuri distribuite ε-periodic. Conform [39] (Ch.6), considerăm problema la limită pentru un corp elastic fisurat supus unei restricţii unilaterale fără frecare, adică, cele două părţi ale fisurii pot fi deschise dar nu suprapuse şi dacă fisura este închisă într-un punct atunci forţele care acţionează în acel punct sunt în direcţia normalei. Pentru problema studiată vom determina formularea variaţională şi vom demonstra că este bine pusă. În acest caz, sistemul omogenizat este obţinut formal utilizând metoda dezvoltărilor asimptotice în dublă scară. În cele din urmă, considerăm problema Dirichlet în cazul materialelor stratificate dispuse $\varepsilon-$periodic. Bazele teoriei materialelor stratificate au fost stabilite de către Murat şi Tartar în [30]. În această lucrare, urmărind [13](Ch.5, Sec.5.4), prezentăm formulele coeficienţilor efectivi pentru materiale stratificate dispuse $\varepsilon-$periodic, una dintre principalele realizări ale teoriei omogenizării, alături de legea lui Darcy din mecanica fluidelor şi modelarea materialelor compozite din elasticitate.

2 Problema transferului de căldură printr-un mediu bifazic cu salt interfacial de ordinul întâi

În Capitolul 2 vom studia comportamentul asimptotic, când $\varepsilon \to 0$, al temperaturii în problema transferului de căldură printr-un domeniu mărginit, având o structură $\varepsilon-$periodică, introdusă în [35], formată din două componente conexe separate de o interfaţă. Pe această interfaţă fluxul de căldură este continuu, iar temperatura este supusă unui salt interfacial de ordinul I şi anume, fluxul de căldură este proporţional cu saltul temperaturii (vezi [11] pentru justificarea fizică a modelului). Influenţa rezistenţei interfaciale la nivelul conductivităţii efective a fost investigată analitic şi experimental în [5]. Până în acel moment, rezistenţele barierelor termice nu au fost introduse explicit, dar transferul termic interfazic se presupunea a fi direct proporţional cu diferenţa de temparatură (vezi H.S. Carslaw şi J.C. Jaeger [11] pentru o justificare fiziă). De asemenea, transferul de căldură efectiv prin medii compozite cu structură periodică folosind dezvoltări asimptotice (a se vedea [9] şi [39]) a fost studiat în [4], problema fiind supusă unor condiţii la limită clasice (flux normal şi temperatură continuă). Prin urmare, J.L. Auriault şi H.I. Ene (vezi [5]) au prezentat cazul mediilor periodice compozite, formate din două componente solide conexe separate printr-o barieră termică, având conductivităţile de aceeaşi magnitudine. În analiza lor, descrierea transferului de căldură macroscopic s-a dovedit a fi influenţată de rezistenţa barierei termice cu privire la rezistenţa materialelor componentelor. Astfel că, folosind formal metoda dezvoltărilor asimptotice în dublă scară, lucrare prezintă cinci modele macroscopice, primele trei cazuri având câte o singură temperatură, ultimele obţinând temperaturi diferite pentru fiecare componentă a structurii. Un studiu riguros al transferului de căldură în prezenţa unei bariere termice, dar în lipsa unei ipoteze asupra conexităţii structurii a fost făcut de către R. Lipton în [24]. De asemenea, problema transferului de căldură printr-un material compozit alcătuit din două componente una conexă cealaltă neconexă, separate de o suprafaţă de contact a fost tratată de P. Donato and S. Monsurro în [14]. Pentru valori diferite ale lui r ($r > 1$ şi $-1 < r \leq 1$) lucrarea descrie ecuaţia macroscopică, folosind metoda funcţiilor test rapid oscilante a lui Tartar (a se vedea [42]).

Revenind la problema noastră considerăm conductorul de referinţă având conductivitatea de ordinul unităţii, singurul care ajunge la frontiera domeniului (în acest fel se evită prelungirea $H^1_{loc}(\Omega)$ construită în [1]). Cea de-a doua componentă a domeniului este reprezentată de structura de material în care conductivitatea este considerată a fi de ordinul $\varepsilon^{2\beta}$, cu $\beta \in [0,1]$. Se remarcă faptul că, în cazul în care $\beta > 1$ temperatura devine singulară în raport cu ε. Pe interfaţa dintre cele două componente ale structurii stabilim, în condiţia de salt, ε^r ordinul coeficientului de transmisie. Un contraexemplu din [20] demonstrează faptul că temperatura nu este finită din punct de vedere asimptotic pentru $r > 1$(cu excepţia în care se reduce sursa de căldură din interior); în această lucrare, restrângem studiul la $r \in (-1;1]$. O proprietate importantă a structurii considerate este existenţa unui operator de prelungire mărginit, similar cu cel introdus în [12] în cazul incluziunilor izolate. De asemenea, pentru a determina estimările a priori speficice fiecărei componente ale domeniului, vom folosi anumite inegalităţi obţinute de către D. Poliševski în [35]. În scopul de a descrie ecuaţiile macroscopice precum şi coeficienţii efectivi, vom aplica metoda convergenţei în dublă scară din cadrul teoriei omogenizării pentru cazurile periodice (vezi [3], [32] şi [13]). Astfel, problema se reduce la studiul a şase cazuri în funcţie de $\beta = 0$, $\beta \in (0,1)$ sau $\beta = 1$ şi $r = 1$ sau $r < 1$. Pentru fiecare caz vom obţine problemele local-periodice specifice, soluţiile acestora definind coeficienţii efectivi. Trebuie menţionat faptul că, în afara transferului de căldură numeroase fenomene au legătură cu problema studiată: de exemplu, distribuirea presiunii într-un mediu poros parţial fracturat, dispersia concetraţiei unei soluţii într-un domeniu cu diferite grade de difuzivitate sau difuzia unui produs chimic într-un fluid ce traversează un mediu poros cu diferite grade de permeabilitate. Făcând referire la aceste cazuri, pentru $\beta = 0$ şi $r = 0$ (în [24]) şi pentru pentru $\beta = 0$ şi diferite valori ale lui r, în special $r = 1$(corespunde cazului în care coeficientul de transmisie balansează măsura interfeţei, vezi [5], [33], [10], [20], [29] şi [14]) problemă considerată a fost deja tratată când structura de material conţine incluziunilor izolate. Pentru geometria noastră, doar cazul $\beta = 0$ şi $r = 1$ a fost studiat în [15].

Rezultatele din Capitolul 2 pot fi găsite şi în articolul [37], care a fost acceptat spre publicare.

2.1 Problema transferului de căldură

Fie Ω un domeniu mărginit din $\mathbb{R}^N$ $(N \geq 3)$, situat local de o singură parte a frontierei $\partial\Omega$, o varietate Lipschitz alcătuită dintr-un număr finit de componente conexe. Ω este format din două componente conexe dispuse $\varepsilon-$periodic, cu $\varepsilon \in (0,1)$. Folosind cubul unitate $Y = (0,1)^N$ vom descrie periodicitatea domeniului astfel:

Fie Y_a o submulţime deschisă şi conexă a lui Y, cu frontiera Lipschitz. Presupunem că $Y_b = Y \setminus \overline{Y}_a$ are frontiera local Lipschitz şi că intersecţiile lui ∂Y_b cu ∂Y sunt reproduse identic pe feţele opuse ale cubului. Pentru oricare $i \in \{1,2,\ldots,N\}$, notăm

$$\Sigma^{+i} = \{y \in \partial Y : \ y_i = 1\} \text{ şi } \Sigma^{-i} = \{y \in \partial Y : \ y_i = 0\}, \tag{2.1}$$

cu proprietatea că

$$\overline{Y}_b \cap \Sigma^{\pm i} \subset\subset \Sigma^{\pm i}, \quad \forall i \in \{1,2,...,N\}. \tag{2.2}$$

Repetând Y prin periodicitate, presupunem că reuniunea tututor $\overline{Y}_a$ este un domeniu conex din $\mathbb{R}^N$ având local frontiera de clasă $\mathcal{C}^2$; notăm această reuniune cu $\mathbb{R}^N_a$, mai mult $\mathbb{R}^N_b = \mathbb{R}^N \setminus \mathbb{R}^N_a$. Evident, originea sistemului de coordonate poate fi considerată în aşa fel să existe $R > 0$ cu proprietatea că $B(0,R) \subseteq \mathbb{R}^N_a$. În continuare, definim cele două componente ale lui Ω folosind următoarele mulţimi de indici:

Pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$ notăm

$$\mathbb{Z}_\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}^N : \ \varepsilon k + \varepsilon Y \subseteq \Omega\}, \tag{2.3}$$

$$I_\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon : \ \varepsilon k \pm \varepsilon e_i + \varepsilon Y \subseteq \Omega, \ \forall i \in \{1,...,N\}\}, \tag{2.4}$$

unde e_i reprezintă vectorii unitate din baza canonică a lui $\mathbb{R}^N$.

Structura de material este definită astfel

$$\Omega_{\varepsilon b} = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k \in I_\varepsilon} (\varepsilon k + \varepsilon \overline{Y}_b)\right) \tag{2.5}$$

şi conductorul de referinţă sub forma următoare

$$\Omega_{\varepsilon a} = \Omega \setminus \overline{\Omega}_{\varepsilon b}. \tag{2.6}$$

Interfaţa dintre cele două componente este notată cu

$$\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_{\varepsilon a} \cap \partial\Omega_{\varepsilon b} = \partial\Omega_{\varepsilon b}. \tag{2.7}$$

Se observă faptul că toate frontierele sunt considerate a fi local Lipschitz, $\Omega_{\varepsilon a}$ este conexă şi, în particular, $\Omega_{\varepsilon b}$ poate fi de asemenea conexă.

În continuare introducem spaţiul Hilbert

$$H_\varepsilon = \left\{ v \in L^2(\Omega) : v\Big|_{\Omega_{\varepsilon a}} \in H^1(\Omega_{\varepsilon a}), \ v\Big|_{\Omega_{\varepsilon b}} \in H^1(\Omega_{\varepsilon b}), \ v = 0 \text{ pe } \partial\Omega \right\} \tag{2.8}$$

înzestrat cu produsul scalar

$$(u,v)_{H_\varepsilon} = \int_{\Omega_{\varepsilon a}} \nabla u \nabla v + \varepsilon^2 \int_{\Omega_{\varepsilon b}} \nabla u \nabla v + \varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} [u][v], \tag{2.9}$$

unde $[u] = \gamma_{\varepsilon b} u - \gamma_{\varepsilon a} u$ şi $\gamma_{\varepsilon a} u$, $\gamma_{\varepsilon b} u$ sunt urmele lui u pe Γ_ε definite în $H^1(\Omega_{\varepsilon a})$, respectiv în $H^1(\Omega_{\varepsilon b})$.

De acum înainte, notăm $\Gamma := \partial Y_a \cap \partial Y_b$. Evident,

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}_\varepsilon} (\varepsilon k + \varepsilon \Gamma) \subseteq \Gamma_\varepsilon \tag{2.10}$$

şi dacă ν este normala la Γ(exterioară la Y_a) şi $x \in (\varepsilon k + \varepsilon \Gamma)$ pentru un anumit $k \in \mathbb{Z}_\varepsilon$, atunci

$$\nu^\varepsilon(x) = \nu\left(\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}\right), \tag{2.11}$$

unde $\left\{\frac{x}{\varepsilon}\right\}$ este format din părţile fracţionare ale lui $\varepsilon^{-1} x$.

Pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$ introducem factorul de transmisie $h^\varepsilon(x) = h(x/\varepsilon)$ şi conductivităţile simetrice $a^\varepsilon_{ij}(x) = a_{ij}(x/\varepsilon)$ şi $b^\varepsilon_{ij}(x) = b_{ij}(x/\varepsilon)$, unde h, a_{ij} şi b_{ij} sunt din $L^\infty_{per}(Y)$. De asemenea există $\delta > 0$ astfel încât

$$h \geq \delta, \quad \text{a.p.t.} \quad \text{pe } Y, \tag{2.12}$$

$$a_{ij}\xi_j\xi_i \geq \delta \xi_i \xi_i \;\; \text{şi} \;\; b_{ij}\xi_j\xi_i \geq \delta \xi_i\xi_i, \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^N, \quad \text{a.p.t.} \quad \text{pe } Y. \tag{2.13}$$

Fiind daţi $\beta \in [0,1]$, $r \in (-1;1]$ şi $f \in L^2(\Omega)$, vrem să determinăm temperatura u^ε care satisface următoarele ecuaţii

$$-\frac{\partial}{\partial x_i}\left(a^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f \quad \text{în } \Omega_{\varepsilon a}, \tag{2.14}$$

$$-\varepsilon^{2\beta}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(b^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\right) = f \quad \text{în } \Omega_{\varepsilon b}, \tag{2.15}$$

având următoarele condiţii

$$a^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\nu^\varepsilon_i = \varepsilon^{2\beta} b^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\nu^\varepsilon_i = \varepsilon^r h^\varepsilon\left(\gamma_{\varepsilon b} u^\varepsilon - \gamma_{\varepsilon a} u^\varepsilon\right) \text{ pe } \Gamma_\varepsilon, \tag{2.16}$$

$$u^\varepsilon = 0 \text{ pe } \partial\Omega. \tag{2.17}$$

Formularea variaţională a problemei (2.14)-(2.17) este următoarea:

Să se găsească $u^\varepsilon \in H_\varepsilon$ astfel încât

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) := \int_{\Omega_{\varepsilon a}} a^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \varepsilon^{2\beta}\int_{\Omega_{\varepsilon b}} b^\varepsilon_{ij}\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i} + \varepsilon^r \int_{\Gamma_\varepsilon} h^\varepsilon [u^\varepsilon][v] = \int_\Omega f v, \;\; \forall v \in H_\varepsilon. \tag{2.18}$$

Teorema 1. *Pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$ există şi este unic $u^\varepsilon \in H_\varepsilon$, soluţia problemei (2.18).*

2.2 Estimările a priori ale temperaturii

În continuare, pentru orice $u \in H^1(\Omega)$, $\varepsilon > 0$ şi $\alpha \in \{a, b\}$, vom folosi notaţiile

$$\widehat{u}^\varepsilon_\alpha = \begin{cases} u & \text{în } \Omega_{\varepsilon\alpha}, \\ 0 & \text{în } \Omega - \Omega_{\varepsilon\alpha}, \end{cases} \qquad \widehat{\nabla u}^\varepsilon_\alpha = \begin{cases} \nabla u & \text{în } \Omega_{\varepsilon\alpha}, \\ 0 & \text{în } \Omega - \Omega_{\varepsilon\alpha}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Pentru orice $\beta \in [0,1]$ şi $r \in (-1,1]$, folosind estimările a priori ale lui u^ε, soluţia lui (2.18), obţinem principalul rezultat de compacitate:

Teorema 2. *Pentru orice $\beta \in [0,1]$ şi $r \in (-1,1]$ există $u_a \in H^1_0(\Omega)$, $\eta_a \in L^2\left(\Omega; \widetilde{H}^1_{per}(Y_a)\right)$ şi $u_b \in L^2(\Omega, L^2_{per}(Y_b))$ astfel încât următoarele convergenţe sunt valabile pe un anumit subşir*

$$\widehat{u}^\varepsilon_a \xrightarrow{2s} \chi_a u_a, \quad \widehat{u}^\varepsilon_b \xrightarrow{2s} \chi_b u_b, \tag{2.20}$$

$$\widehat{\nabla u}^\varepsilon_a \xrightarrow{2s} \chi_a\left(\nabla_x u_a + \nabla_y \eta_a(\cdot, y)\right), \tag{2.21}$$

unde $\chi_\alpha : L^2(\Omega \times Y_\alpha) \to L^2(\Omega \times Y)$, $\alpha \in \{a, b\}$, reprezintă prelungirea naturală cu zero.

Când $\beta = 0$ se obţine u_b independent de y, cu $u_b \in H^1(\Omega)$. Mai mult, există $\eta_b \in L^2\left(\Omega; \widetilde{H}^1_{per}(Y_b)\right)$ astfel încât

$$\widehat{\nabla u}^\varepsilon_b \xrightarrow{2s} \chi_b\left(\nabla_x u_b + \nabla_y \eta_b(\cdot, y)\right). \tag{2.22}$$

Când $\beta \in (0,1)$ se obţine u_b independent de y, cu $u_b \in L^2(\Omega)$.

Când $\beta = 1$

$$\varepsilon\widehat{\nabla u}^\varepsilon_b \xrightarrow{2s} \chi_b \nabla_y u_b. \tag{2.23}$$

Acum, pentru orice $k \in \{1, 2, ..., N\}$, definim $\eta_{ak} \in \widetilde{H}^1_{per}(Y_a)$ unica soluţie a problemei local-periodice

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(a_{ij}\frac{\partial(\eta_{ak}+y_k)}{\partial y_j}\right) = 0 \quad \text{în } Y_a, \qquad a_{ij}\frac{\partial(\eta_{ak}+y_k)}{\partial y_j}\nu_i = 0 \quad \text{pe } \Gamma. \tag{2.24}$$

Conductivitatea efectivă A este dată de formula clasică

$$A_{ij} = \int_{Y_a} a_{ij} + a_{ik}\frac{\partial \eta_{aj}}{\partial y_k}\ dy, \qquad \forall i, j \in \{1, 2, ..., N\}. \tag{2.25}$$

Observaţia 3. Tensorul efectiv A este simetric şi pozitiv definit.

Observaţia 4. În mod asemănator cu (2.24), pentru orice $k \in \{1, 2, ..., N\}$, considerăm problema local-periodică asociată lui b_{ij} în Y_b; notăm soluţia acestei probleme cu $\eta_{bk} \in \widetilde{H}^1_{per}(Y_b)$. Corespunzător, definim conductivitatea efectivă B_{ij} ca în (2.25).

În continuare, introducem funcţiile w_0 şi w_1, singurele soluţii din $H^1_{per}(Y_b)$ ale următoarelor două probleme:

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(b_{ij}\frac{\partial w_0}{\partial y_j}\right) = 1 \quad \text{în } Y_b, \qquad\qquad w_0 = 0 \quad \text{pe } \Gamma \tag{2.26}$$

$$-\frac{\partial}{\partial y_i}\left(b_{ij}\frac{\partial w_1}{\partial y_j}\right) = 1 \text{ în } Y_b, \qquad -b_{ij}\frac{\partial w_1}{\partial y_j}\nu_i + hw_1 = 0 \text{ pe } \Gamma. \tag{2.27}$$

Având în vedere existenţa unui salt interfacial de ordinul întâi pe Γ_ε, există doi coeficienţi efectivi care descriu transferul la nivel microscopic:

$$\widetilde{h} = \int_\Gamma h(y)ds, \tag{2.28}$$

$$\widetilde{w_1 h} = \int_\Gamma w_1(y)h(y)ds. \tag{2.29}$$

2.3 Procesul de omogenizare în cazul $\beta = 0$ şi $r = 1$

Folosind argumente de densitate, se obţine faptul că

$$((u_a, u_b), (\eta_a, \eta_b)) \in V_1 := \left[H^1_0(\Omega) \times H^1(\Omega)\right] \times \left[L^2(\Omega, \widetilde{H}^1_{per}(Y_\alpha))\right], \quad \alpha \in \{a, b\},$$

este soluţia problemei: Să se găsească $((u_a, u_b), (\eta_a, \eta_b)) \in V_1$ astfel încât

$$\sum_{\alpha\in\{a,b\}} \int_{\Omega\times Y_\alpha} \alpha_{ij}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial \Phi_\alpha}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_i}\right) + \widetilde{h}\int_\Omega (u_b - u_a)(\Phi_b - \Phi_a) =$$

$$= \int_{\Omega\times Y} (\chi_a\Phi_a + \chi_b\Phi_b) f, \quad \forall ((\Phi_a, \Phi_b), (\varphi_a, \varphi_b)) \in V_1. \tag{2.30}$$

Teorema 5. *Dacă u^ε este soluţia problemei (2.18) atunci*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2s} \chi_a u_a + \chi_b u_b \tag{2.31}$$

unde $(u_a, u_b) \in H^1_0(\Omega) \times H^1(\Omega)$ este unica soluţie a problemei

$$\int_\Omega A_{ij}\frac{\partial u_a}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi_a}{\partial x_i} + \int_\Omega B_{ij}\frac{\partial u_b}{\partial x_j}\frac{\partial \Phi_b}{\partial x_i} + \widetilde{h}\int_\Omega (u_b - u_a)(\Phi_b - \Phi_a) =$$

$$= \int_\Omega (|Y_a|\Phi_a + |Y_b|\Phi_b) f, \quad \forall\, (\Phi_a, \Phi_b) \in H^1_0(\Omega) \times H^1(\Omega). \tag{2.32}$$

2.4 Procesul de omogenizare în cazul $\beta = 0$ şi $r \in (-1, 1)$

Datorită estimărilor a priori specifice acestui caz, rezultatul de compacitate este completat de:

Lema 6. *Există $u_b \in H^1(\Omega)$ şi $\eta_b \in L^2\left(\Omega; \widetilde{H}^1_{per}(Y_b)\right)$ astfel încât:*

$$\widehat{\nabla u_b^{\varepsilon}} \xrightarrow{2s} \chi_b \left(\nabla_x u_b + \nabla_y \eta_b(\cdot, y)\right). \tag{2.33}$$

Mai mult, există $u \in H^1_0(\Omega)$ astfel încât

$$u_a = u_b = u \text{ în } \Omega. \tag{2.34}$$

Folosind argumente de densitate, se remarcă faptul că

$$(u, \eta_a, \eta_b) \in V_2 := H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega, \widetilde{H}^1_{per}(Y_a)) \times L^2(\Omega, \widetilde{H}^1_{per}(Y_b))$$

este soluţia problemei: Să se găsească $(u, \eta_a, \eta_b) \in V_2$ astfel încât

$$\sum_{\alpha \in \{a,b\}} \int_{\Omega \times Y_\alpha} \alpha_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_\alpha}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_\alpha}{\partial y_i}\right) dxdy = \int_\Omega f\Phi\, dx, \ \ \forall\, (\Phi, \varphi_a, \varphi_b) \in V_2. \tag{2.35}$$

În acest caz procesul de omogenizare este rezumat astfel:

Teorema 7. *Dacă u^ε este soluţia problemei (2.18) atunci*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2s} u \tag{2.36}$$

unde $u \in H^1_0(\Omega)$ este unica soluţie a problemei omogenizate

$$\int_\Omega (A + B)\, \nabla u \nabla \Phi = \int_\Omega f\Phi, \ \ \forall \Phi \in H^1_0(\Omega), \tag{2.37}$$

unde A, B sunt matricile efective pozitiv definite în (2.25).

2.5 Procesul de omogeniare în cazul $\beta \in (0, 1)$ şi $r = 1$

Folosind argumente de densitate, arătăm că

$$(u_a, u_b, \eta_a) \in V_3 := H^1_0(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2(\Omega, \widetilde{H}^1_{per}(Y_a))$$

este soluţia problemei: Să se găsească $(u_a, u_b, \eta_a) \in V_3$ care satisface relaţia

$$\int_{\Omega \times Y_a} a_{ij} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_a}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial \Phi_a}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y_i}\right) + \widetilde{h} \int_\Omega (u_b - u_a)(\Phi_b - \Phi_a) =$$

$$= \int_{\Omega \times Y} (\chi_a \Phi_a + \chi_b \Phi_b)\, f, \quad \forall\, (\Phi_a, \Phi_b, \varphi_a) \in V_3. \tag{2.38}$$

Teorema 8. *Dacă u^ε este soluţia problemei (2.18) atunci*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2s} u + \frac{|Y_b|}{\widetilde{h}} \chi_b f, \tag{2.39}$$

unde $u \in H^1_0(\Omega)$ este unica soluţie a problemei Dirichlet

$$\int_\Omega A \nabla u \nabla \Phi = \int_\Omega f\Phi, \ \ \forall \Phi \in H^1_0(\Omega). \tag{2.40}$$

2.6 Procesul de omogenizare în cazul $\beta \in (0, 1)$ şi $r \in (-1, 1)$

Rezultatul preliminar specific acestui caz este:

Lema 9. *Există $u \in H^1_0(\Omega)$ astfel încât*

$$u_a = u_b = u \text{ în } \Omega. \tag{2.41}$$

Mai mult, pentru orice $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ şi $\varphi_a \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y_a))$, se obţine

$$\int_{\Omega \times Y_a} a_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_a}{\partial y_j}\right)\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y_i}\right) dxdy = \int_\Omega f\Phi\, dx. \tag{2.42}$$

Folosind argumente de densitate se remarcă faptul că

$$(u, \eta_a) \in V_4 := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega, \widetilde{H}^1_{per}(Y_a))$$

este soluţia problemei: Să se găsească $(u, \eta_a) \in V_4$ astfel încât

$$\int_{\Omega \times Y_a} a_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_a}{\partial y_j} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y_i} \right) dxdy = \int_\Omega f \Phi dx, \ \ \forall (\Phi, \varphi_a) \in V_4. \tag{2.43}$$

Teorema 10. *Dacă u^ε este soluţia problemei (2.18) atunci*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2s} u, \tag{2.44}$$

unde $u \in H_0^1(\Omega)$ este unica soluţie a problemei (2.40).

2.7 Procesul de omogenizare în cazul $\beta = 1$ şi $r = 1$

Folosind argumente de densitate, se arată că

$$(u_a, u_b, \eta_a) \in V_5 := H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{per}(Y_b)) \times L^2(\Omega, \widetilde{H}^1_{per}(Y_a))$$

este soluţia problemei: Să se găsească $(u_a, u_b, \eta_a) \in V_5$ astfel încât

$$\int_{\Omega \times Y_a} a_{ij} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_a}{\partial y_j} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y_i} \right) + \int_{\Omega \times Y_b} b_{ij} \frac{\partial u_b}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_b}{\partial y_i} +$$

$$+ \int_{\Omega \times \Gamma} h \left(u_b - u_a \right) \left(\varphi_b - \Phi \right) = \int_{\Omega \times Y_a} f \Phi + \int_{\Omega \times Y_b} f \varphi_b, \ \ \forall (\Phi, \varphi_b, \varphi_a) \in V_5. \tag{2.45}$$

Teorema 11. *Dacă u^ε este soluţia problemei (2.18) atunci*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2s} \left(\mid Y_a \mid + \widetilde{w_1 h} \right) u + w_1 \chi_b f \tag{2.46}$$

unde $u \in H_0^1(\Omega)$ este unica soluţie a problemei Dirichlet (2.40).

2.8 Procesul de omogenizare în cazul $\beta = 1$ şi $r \in (-1, 1)$

Lema 12. *Limitele u_a şi u_b satisfac relaţia:*

$$u_a = u_b \ \text{pe} \ \Omega \times \Gamma. \tag{2.47}$$

În plus, pentru orice $\Phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ şi $\varphi_\alpha \in \mathcal{D}(\Omega; C^\infty_{per}(Y_\alpha))$, $\alpha \in \{a, b\}$ astfel încât

$$\varphi_b(x, y) = \Phi(x), \ \forall (x, y) \in \Omega \times \Gamma, \tag{2.48}$$

avem:

$$\int_{\Omega \times Y_a} a_{ij} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_a}{\partial y_j} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y_i} \right) + \int_{\Omega \times Y_b} b_{ij} \frac{\partial u_b}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_b}{\partial y_i} = \int_{\Omega \times Y_a} f \Phi + \int_{\Omega \times Y_b} f \varphi_b. \tag{2.49}$$

Folosind argumente de densitate se obţine faptul că

$$((u_a, u_b), \eta_a) \in V_6 := V \times L^2(\Omega; \widetilde{H}^1_{per}(Y_a)),$$

$$V := \left\{ (\Phi, \varphi) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega; H^1_{per}(Y_b)), \ \ \varphi = \Phi \text{ on } \Omega \times \Gamma \right\}. \tag{2.50}$$

este soluţia problemei: Să se găsească $((u_a, u_b), \eta_a) \in V_6$ astfel încât

$$\int_{\Omega \times Y_a} a_{ij} \left(\frac{\partial u_a}{\partial x_j} + \frac{\partial \eta_a}{\partial y_j} \right) \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{\partial \varphi_a}{\partial y_i} \right) + \int_{\Omega \times Y_b} b_{ij} \frac{\partial u_b}{\partial y_j} \frac{\partial \varphi_b}{\partial y_i} =$$

$$= \int_{\Omega \times Y_a} f \Phi + \int_{\Omega \times Y_b} f \varphi_b, \quad \forall ((\Phi, \varphi_b), \varphi_a) \in V \times L^2(\Omega; \widetilde{H}^1_{per}(Y_a)). \tag{2.51}$$

Teorema 13. *Dacă u^ε este soluţia problemei (2.18) atunci*

$$u^\varepsilon \xrightarrow{2s} |Y_a| u + w_0 \chi_b f, \tag{2.52}$$

unde $u \in H_0^1(\Omega)$ este unica soluţie a lui (2.40).

3 Permeabilitatea efectivă a mediilor poroase fracturate care se supun legii de contact Beavers-Joseph

În Capitolul 3 studiem comportamentul asimptotic al unei curgeri Stokes printr-o distribuţie periodică de fracturi perturbând un mediu poros, unde infiltraţia se supune legii lui Darcy iar condiţia pe interfaţă este de tip Beavers-Joseph. Prima regiune reprezintă sistemul de fracturi, care este conex şi unde mişcarea este guvernată de sistemul Stokes. A doua regiune care este de asemenea conexă reprezintă sistemul de blocuri poroase având o anumită permeabilitate şi unde mişcarea este guvernată de legea lui Darcy. Aceste două curgeri sunt cuplate pe interfaţă de varianta Saffman a condiţiei Beavers-Joseph, care a fost confirmată de [21] ca limita unui proces de omogenizare. În afară de continuitatea componentei normale a vitezei, ea impune proporţionalitatea vitezei tangenţiale a vitezei fluidului cu componenta tangenţială a tensiunii vâscoase de pe partea fluidă a interfeţei. Demonstrăm existenţa şi unicitatea soluţiei acestui model în cadrul nostru $\varepsilon-$periodic.

O rescalare potrivită pune în evidenţă influenţa condiţiei Beavers-Joseph asupra comportamentului asimptotic al sistemului în două cazuri ale coeficientului de permeabilitate. Cum unul a fost tratat în [17], în Capitolul 3 considerăm cazul în care permeabilitatea este de ordinul ε^2. Cu această presupunere, comportamentul asimptotic al mediului poros fracturat poate fi găsit folosind metodele teoriei omogenizării. Prezentul cadru poate fi considerat ca o dezvoltare a omogenizării periodice în teoria filtraţiei, fiind adaptat fenomenelor în medii fracturate, cu ambele subdomenii conexe ca în [34], [2] şi [35]. Nu utilizează metoda formală a dezvoltărilor asimptotice ([22], [23], [39]), ci bazându-se pe prelungirea presiunii în stilul [41], [2], [25], [28], permite o demonstraţie riguroasă a convergenţei în dublă scară. Procedura este iniţiată în Secţiunea 3.2, unde estimările a priori permit utilizarea rezultatelor de compacitate ale convergenţei în dublă scară şi identificarea limitelor utilizând funcţii test speciale. Astfel, am găsit problema omogenizată verificată de limitele în dublă scară ale cuplului viteză-presiune. Este o problemă bine pusă şi poate fi decuplată. La limită, în dublă scară, presiunea este o mărime macroscopică în timp ce viteza depinde şi de variabila microscopică.

Rezultatele din Capitolul 3 pot fi găsite şi în articolul [18], care a fost acceptat spre publicare.

3.1 Curgerea prin structura ε-periodică

Fie Ω o mulţime deschisă, mărginită şi conexă din $\mathbb{R}^N (N \geq 2)$, situată local pe o singură parte a frontierei $\partial\Omega$, o varietate Lipschitz alcătuită dintr-un număr finit de componente conexe.

Fie Y_f o submulţime deschisă şi conexă a cubului unitate $Y = (0,1)^N$ cu frontiera Lipschitz, astfel încât intersecţiile lui ∂Y_f cu ∂Y sunt reproduse identic pe feţele opuse ale cublui şi $0 \notin \overline{Y}_f$. Normala exterioară la ∂Y_f este notată cu ν. Repetând Y prin periodicitate, presupunem că reuniunea tuturor $\bar{Y}_f$, notată cu $\mathbb{R}^N_f$, este un domeniu conex în $\mathbb{R}^N$ cu frontiera de clasă $\mathcal{C}^2$. Definind $Y_s = Y \setminus \overline{Y}_f$, presupunem de asemenea că reuniunea tuturor $\bar{Y}_s$ este un domeniu conex în $\mathbb{R}^N$.

Pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$, notăm

$$Z_\varepsilon = \{k \in \mathbb{Z}^N,\ \varepsilon k + \varepsilon Y \subseteq \Omega\} \tag{3.1}$$

$$I_\varepsilon = \{k \in Z_\varepsilon, \varepsilon k \pm \varepsilon e_i + \varepsilon Y \subseteq \Omega, \forall i \in \overline{1,N}\} \tag{3.2}$$

unde e_i sunt vectorii unitate din baza canonică a lui $\mathbb{R}^N$.

În cele din urmă definim sistemul de fracturi prin

$$\Omega_{\varepsilon f} = \operatorname{int}\left(\bigcup_{k \in I_\varepsilon} (\varepsilon k + \varepsilon \bar{Y}_f)\right) \tag{3.3}$$

şi matricea poroasă a structurii $\Omega_{\varepsilon s} = \Omega \backslash \bar{\Omega}_{\varepsilon f}$. Interfaţa dintre blocurile poroase şi fluid este notă cu $\Gamma_\varepsilon = \partial\Omega_{\varepsilon f}$. Normala la interfaţă, exterioară la $\Omega_{\varepsilon f}$ este:

$$\nu^\varepsilon(x) = \nu\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \quad x \in \Gamma_\varepsilon \tag{3.4}$$

unde ν a fost extinsă prin periodicitate la $\mathbb{R}^N$. Se observă că $\Omega_{\varepsilon s}$ şi $\Omega_{\varepsilon f}$ sunt mulţimi conexe şi că procentajul de fracturare al structurii structurii este

$$m = |Y_f| \in]0,1[, \quad \text{când} \quad \frac{|\Omega_{\varepsilon f}|}{|\Omega|} \to m \quad \text{unde} \quad \varepsilon \to 0. \tag{3.5}$$

Structurii anterioare îi asociem un model de curgere a fluidului printr-un mediu poros fracturat, presupunând că în $\Omega_{\varepsilon s}$ avem filtraţie supusă legii lui Darcy iar în $\Omega_{\varepsilon f}$ curgerea fluidului vâscos este guvernată de sistemul Stokes.

Aceste două curgeri sunt cuplate pe interfaţă de varianta Saffman a condiţiei Beavers-Joseph ([8] şi [26]). Sistemul este completat de o condiţie de impermeabilitate pe $\partial\Omega$:

$$\mathrm{div} v^{\varepsilon s} = 0 \quad \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon s} \tag{3.6}$$

$$\mu_\varepsilon v^{\varepsilon s} = K^\varepsilon (g^\varepsilon - \nabla p^{\varepsilon s}) \quad \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon s}, \tag{3.7}$$

$$\mathrm{div} v^{\varepsilon f} = 0 \quad \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon f}, \tag{3.8}$$

$$\sigma_{ij}^\varepsilon = -p^{\varepsilon f}\delta_{ij} + 2\mu_\varepsilon e_{ij}(v^{\varepsilon f}) \quad \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon f} \tag{3.9}$$

$$-\frac{\partial}{\partial x_j}\sigma_{ij}^\varepsilon = g_i^\varepsilon \quad \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon f} \tag{3.10}$$

$$v^{\varepsilon s}\cdot\nu^\varepsilon = v^{\varepsilon f}\cdot\nu^\varepsilon \quad \text{pe} \quad \Gamma_\varepsilon, \tag{3.11}$$

$$-p^{\varepsilon s}\nu_i^\varepsilon - \sigma_{ij}^\varepsilon\nu_j^\varepsilon = \alpha_\varepsilon\mu_\varepsilon\beta_\varepsilon^{-1}(v_i^{\varepsilon f} - (v^{\varepsilon f}\cdot\nu^\varepsilon)\nu_i^\varepsilon) \quad \text{pe} \quad \Gamma_\varepsilon, \tag{3.12}$$

$$v^{\varepsilon s}\cdot n = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\Omega, \quad n \text{ este normala exterioară la } \Omega, \tag{3.13}$$

unde $v^{\varepsilon s}$, $v^{\varepsilon f}$ şi $p^{\varepsilon s}$, $p^{\varepsilon f}$ reprezintă vitezele şi presiunile fluidului prin cele două componente, $\mu^\varepsilon > 0$ este vâscozitatea fluidului, $\alpha_\varepsilon \in L^\infty(\Omega)$ este numărul pozitiv adimensional Beavers-Joseph , $g^\varepsilon \in L^2(\Omega)^N$ este forţa exterioară şi $e(v)$ reprezintă tensorul simetric al gradientului vitezei, definit prin $e_{ij}(v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$.

Tensorul de permeabilitate pozitiv este definit prin:

$$K^\varepsilon(x) = \beta_\varepsilon^2 K\left(\frac{x}{\varepsilon}\right), \tag{3.14}$$

unde $K \in L^\infty(Y)^{N\times N}$ şi $\beta_\varepsilon > 0$ reprezintă magnitudinea lui $(TrK^\varepsilon)^{1/2}$ cu privire la $\varepsilon \to 0$. În continuare folosim notaţiile:

$$H_0(\mathrm{div},\Omega) = \{v \in H(\mathrm{div},\Omega), \quad v\cdot\nu = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\Omega\} \tag{3.15}$$

$$L_0^2(\Omega) = \{p \in L^2(\Omega), \quad \int_\Omega p = 0\} \tag{3.16}$$

$$V_0(\mathrm{div},\Omega) = \{v \in H_0(\mathrm{div},\Omega), \quad \mathrm{div} v = 0 \quad \text{în} \quad \Omega\} \tag{3.17}$$

Mai departe, definim

$$H_\varepsilon = \{v \in H_0(\mathrm{div},\Omega), \quad v \in H^1(\Omega_{\varepsilon f})^N\}, \tag{3.18}$$

spaţiu Hilbert înzestrat cu produsul scalar

$$(u,v)_{H_\varepsilon} = \int_{\Omega_{\varepsilon s}} uv + \int_{\Omega_{\varepsilon s}} \mathrm{div} u \,\mathrm{div} v + \varepsilon^2\int_{\Omega_{\varepsilon f}} e(u)e(v) + \varepsilon\int_{\Gamma_\varepsilon}(\gamma^\varepsilon u - (\gamma_\nu^\varepsilon u)\nu^\varepsilon)\gamma^\varepsilon v \tag{3.19}$$

unde γ^ε şi γ_ν^ε notează operatorul de urmă şi operatorul de urmă normală pe Γ_ε cu privire la $\Omega_{\varepsilon f}$. Subspaţiul corespunzător vitezelor de divergenţă nulă este

$$V_\varepsilon = \{v \in V_0(\mathrm{div},\Omega), \quad v \in H^1(\Omega_{\varepsilon f})^N\}. \tag{3.20}$$

O consecinţă imediată, corespunzătoare inegalităţii lui Korn, este

Lema 14. *Există o constantă $C > 0$, independentă de ε, astfel încât*

$$|u|_{L^2(\Omega_{\varepsilon f})} + \varepsilon|\nabla u|_{L^2(\Omega_{\varepsilon f})} \le C|u|_{H_\varepsilon}, \quad \forall u \in H_\varepsilon. \tag{3.21}$$

Notând

$$A^\varepsilon = (K^\varepsilon)^{-1} \tag{3.22}$$

şi folosind pozitivitatea lui K^ε, putem presupune fără a reduce generalitatea, că

$$\exists a_0 > 0 \quad \text{astfel încât} \quad A_{ij}^\varepsilon(\cdot)\,\xi_i\xi_j \ge a_0|\xi|^2, \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^N, \quad \text{a.p.t. în } \Omega. \tag{3.23}$$

Rescalând vitezele

$$u^\varepsilon = \begin{cases} u^{\varepsilon s} & \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon s} \\ u^{\varepsilon f} & \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon f} \end{cases} = \frac{\mu_\varepsilon}{\beta_\varepsilon^2}\begin{cases} v^{\varepsilon s} & \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon s} \\ v^{\varepsilon f} & \text{în} \quad \Omega_{\varepsilon f} \end{cases} \tag{3.24}$$

atunci, pentru orice $u, v \in H_\varepsilon$ şi $q \in L^2_0(\Omega)$, definim

$$a_\varepsilon(u,v) = \int_{\Omega_{\varepsilon s}} A^\varepsilon uv + 2\beta_\varepsilon^2 \int_{\Omega_{\varepsilon f}} e(u)e(v) + \beta_\varepsilon \int_{\Gamma_\varepsilon} \alpha_\varepsilon(\gamma^\varepsilon u - (\gamma_\nu^\varepsilon u)\nu^\varepsilon)\gamma^\varepsilon v \tag{3.25}$$

$$b_\varepsilon(q,v) = -\int_\Omega q \operatorname{div} v. \tag{3.26}$$

Se observă că, dacă $(u^\varepsilon, p^\varepsilon)$ este o soluţia netedă a problemei (3.6)–(3.13), atunci este de asemenea soluţie şi pentru următoarea problemă: Să se găsească $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H_\varepsilon \times L^2_0(\Omega)$ astfel încât

$$a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) + b_\varepsilon(p^\varepsilon, v) = \int_\Omega g^\varepsilon v, \quad \forall v \in H_\varepsilon \tag{3.27}$$

$$b_\varepsilon(q, u^\varepsilon) = 0, \quad \forall q \in L^2_0(\Omega). \tag{3.28}$$

Teorema 15. *Există o unică pereche $(u^\varepsilon, p^\varepsilon) \in H_\varepsilon \times L^2_0(\Omega)$ soluţie a problemei (3.27)–(3.28).*

3.2 Procesul de omogenizare

În această secţiune, pentru orice funcţie φ definită pe $\Omega \times Y$ vom folosi următoarele notaţii

$$\varphi^h = \varphi|_{\Omega \times Y_h}, \quad \tilde{\varphi}^h = \frac{1}{|Y_h|}\int_{Y_h} \varphi(\cdot, y)dy, \quad h \in \{s, f\}, \tag{3.29}$$

$$\tilde{\varphi} = \int_Y \varphi(\cdot, y)dy, \quad \text{adică} \quad \tilde{\varphi} = (1-m)\tilde{\varphi}^s + m\tilde{\varphi}^f. \tag{3.30}$$

Utilizând V_ε-elipticitatea lui a_ε, din estimările a priori rezultă că $\exists u \in L^2(\Omega \times Y)^N$ astfel încât, pe un subşir

$$u^\varepsilon \stackrel{2}{\rightharpoonup} u \tag{3.31}$$

$$u^\varepsilon \rightharpoonup \int_Y u(\cdot, y)dy \in V_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad \text{slab în} \quad L^2(\Omega)^N. \tag{3.32}$$

Notând $\chi_{\varepsilon f}(x) = \chi_f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$ şi $\chi_{\varepsilon s}(x) = \chi_s\left(\dfrac{x}{\varepsilon}\right)$, unde χ_f şi χ_s sunt funcţiile caracteristice ale lui Y_f şi Y_s în Y, remarcăm faptul că $(\chi_{\varepsilon s} u^\varepsilon)_\varepsilon$, $(\chi_{\varepsilon f} u^\varepsilon)_\varepsilon$ and $\left(\varepsilon \chi_{\varepsilon f} \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}\right)_\varepsilon$ sunt mărginite în $(L^2(\Omega))^N$, $\forall i \in \{1, 2, \cdots, N\}$.

Lema 16. *Notând*

$$\tilde{H}^1_{\mathrm{per}}(Y_f) = \{\varphi \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N_f), \quad \varphi \quad Y\text{-periodică}, \quad \int_{Y_f} \varphi = 0\},$$

atunci $u^f \in L^2(\Omega, (\tilde{H}^1_{\mathrm{per}}(Y_f))^N)$ satisface

$$\varepsilon \chi_{\varepsilon f} \nabla u_i^\varepsilon \stackrel{2}{\rightharpoonup} \chi_f \nabla_y u_i^f. \tag{3.33}$$

Mai mult,

$$\operatorname{div} \widetilde{u} = 0 \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{3.34}$$

$$\gamma_n \widetilde{u} = 0 \quad \text{pe} \quad \partial\Omega, \tag{3.35}$$

$$\operatorname{div}_y u = 0 \quad \text{în} \quad \Omega \times Y. \tag{3.36}$$

Propoziţia 17. *Există o constantă $C > 0$, independentă de ε, astfel încât*

$$|p^\varepsilon|_{L^2(\Omega)} + |\nabla p^\varepsilon|_{L^2(\Omega_{\varepsilon s})} \leq C. \tag{3.37}$$

Lema 18. *Există $p \in L^2_0(\Omega \times Y)$ cu $p^s = \tilde{p}^s \in H^1(\Omega)$ şi $p^f = \tilde{p}^f \in L^2(\Omega)$ astfel încât, să avem:*

$$p^\varepsilon \stackrel{2}{\rightharpoonup} p. \tag{3.38}$$

Mai mult: $p^s = p^f = p$, aşadar $p \in \tilde{H}^1(\Omega)$.

3.3 Problema omogenizată

Se consideră spaţiul Hilbert:

$$X = \{u \in L^2(\Omega \times Y),\ u^f \in L^2(\Omega, \tilde{H}^1_{\text{per}}(Y_f)),\ (\tilde{u}^s, \tilde{u}^f) \in H_0(\text{div}, \Omega)^2,\ \text{div}_y u = 0\}$$

înzestrat cu produsul scalar:

$$(u, v)_X = \int_{\Omega \times Y_s} u\, v + \int_\Omega \text{div}\tilde{u}\, \text{div}\tilde{v} + \int_{\Omega \times Y_f} e_y(u) e_y(v) + \int_{\Omega \times \Gamma} \alpha(y)(\gamma u \gamma v - \gamma_\nu u \gamma_\nu v)$$

şi fixăm:

$$X_0 = \{u \in X,\ \text{div}\tilde{u} = 0\}, \quad M = L^2_0(\Omega).$$

Putem prezenta primul rezultat de omogenizare:

Propoziţia 19. *Să se găsească* $(v, q) \in X \times M$ *astfel încât*

$$a(v, \varphi) + b(q, \varphi) = \int_\Omega g\tilde{\varphi}, \quad \forall \varphi \in X \tag{3.39}$$

$$b(\pi, v) = 0, \quad \forall \pi \in M \tag{3.40}$$

unde

$$a(v, \varphi) = \int_{\Omega \times Y_s} Av\varphi + 2\beta \int_{\Omega \times Y_f} e_y(v) e_y(\varphi) + \int_{\Omega \times \Gamma} \alpha(y)(\gamma v - (\gamma_\nu v)\nu)\gamma\varphi \tag{3.41}$$

$$b(\pi, v) = -\int_\Omega \pi \text{div}\tilde{v}. \tag{3.42}$$

Observaţia 20. Folosind condiţia "inf-sup" se observă că problema (3.39)–(3.40) este bine pusă.

Propoziţia 21. *Problema (3.39)–(3.40) este echivalentă cu: Să se găsească* $u \in X_0$ *astfel încât*

$$a(u, \varphi) = \int_\Omega (g - \nabla p)\tilde{\varphi}, \quad \forall \varphi \in X_0. \tag{3.43}$$

Observaţia 22. În acest caz, problema (3.43) se poate decupla într-o problemă omogenizată şi una locală. În acest scop, definim

$$W = \{w \in L^2(Y), \quad w^f \in \tilde{H}^1_{\text{per}}(Y_f), \quad \text{div}_y w = 0 \quad \text{în} \quad Y\}$$

şi obţinem faptul că, soluţia problemei omogenizate este:

$$u(x, y) = w^i(y) \left(g_i(x) - \frac{\partial p}{\partial x_i} \right), \tag{3.44}$$

unde $\forall i \in \{1, \cdots, N\}$, $w^i \in W$ este soluţia problemei locale:

$$\int_{Y_s} Aw^i\psi + 2\beta \int_{Y_f} e_y(w^i) e_y(\psi) + \int_\Gamma \alpha(\gamma w^i - (\gamma_\nu w^i)\nu)\psi = \int_Y \psi e_i, \quad \forall \psi \in W, \tag{3.45}$$

e_i fiind vectorii unitate din baza canonică a lui $\mathbb{R}^N$.

Acum, notăm

$$K_{ji} = \int_Y w^i_j. \tag{3.46}$$

Propoziţia 23. *Tensorul de permeabilitate efectiv* K *este simetric şi pozitiv definit.*

Din (3.44) obţinem legea lui Darcy

$$\tilde{u} = K(g - \nabla p), \tag{3.47}$$

unde $\tilde{u} \in H_0(\text{div}, \Omega)$ şi $p \in \tilde{H}^1(\Omega)$ este unica soluţie a următoarei probleme la limită:

$$\text{div}(K\nabla p) = \text{div}(Kg) \quad \text{în} \quad \Omega, \tag{3.48}$$

$$K\nabla p \cdot n = Kg \cdot n \quad \text{pe} \quad \partial\Omega, \tag{3.49}$$

unde evident $\text{div}(Kg) \in H^{-1}(\Omega)$.

Propoziţia 24. *Problema (3.48)–(3.49) este bine pusă.*

Bibliografie

[1] E. Acerbi, V. Chiado Piat, G. Dal Maso, D. Percivale, An extension theorem from connected sets and homogenization in general periodic domains, Nonlinear Analysis, 18 (1992) 481–496.

[2] G. Allaire, Homogenization of the Stokes flow in a connected porous medium, Asymptotic Analysis 2 (1989) 203-222.

[3] G. Allaire, Homogenization and two-scale convergence, S.I.A.M. J. Math. Anal. 23 (1992) 1482-151.

[4] J.L. Auriault, Effective macroscopic description for heat conduction in periodic composites, Int. J. Heat Mass Transfer 26, (1983) 861–869.

[5] J.L. Auriault, H. Ene, Macroscopic modelling of heat transfer in composites with interfacial thermal barrier, Internat. J. Heat Mass Transfer 37 (1994), 2885–2892.

[6] G.I. Barenblatt, Y.P. Zheltov, I.N. Kochina, On basic conceptions of the theory of homogeneous fluids seepage in fractured rocks (in Russian), Prikl.Mat. i Mekh. 24 (1960) 852-864.

[7] G.I. Barenblatt, V.M. Entov, V.M. Ryzhik, Theory of Fluid Flows Through Natural Rocks, Kluwer Acad. Pub., Dordrecht, 1990.

[8] G.S. Beavers, D.D. Joseph, Boundary conditions at a naturally permeable wall, J. Fluid Mech. 30 (1967) 197–207.

[9] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou Asymptotic Analysis for Periodic Structures, North-Holland, Amsterdam, 1978.

[10] E. Canon, J.N. Pernin , Homogenization of diffusion in composite media with interfacial barrier, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. 44 (1) (1999), 23–26.

[11] H.S. Carslaw, J.C. Jaeger , Conduction of Heat in Solids, Clarendon Press, Oxford, 1947.

[12] D. Cioranescu, J. Saint-Jean-Paulin, Homogenization in open sets with holes, J. Math. Anal. Appl. 71 (2)(1979) 590–607

[13] D. Cioranescu, P. Donato, An Introduction to Homogenization, Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications, vol. 17, Oxford Univ. Press, New York, 1999.

[14] P. Donato, S. Monsurrò, Homogenization of two heat conductors with interfacial contact resistance, Anal. Appl. 2 (3) (2004), 247–273.

[15] H.I. Ene, D. Poliševski, Model of diffusion in partially fissured media, Z.A.M.P. 53 (2002) 1052–1059.

[16] V. Girault, P.-A. Raviart Finite Element Methods for Navier-Stokes Equations, Springer-Verlag, Berlin, 1986.

[17] I. Gruais, D. Poliševski, Fluid flows through fractured porous media along Beavers-Joseph interfaces, Journal de Mathématiques Pures et Appliquées, 2013

[18] I. Gruais, D. Poliševski, A. Stănescu, The effective permeability of fractured porous media subject to the Beavers-Joseph contact law, accepted for publication in Asymptotic Analysis.

[19] U. Hornung, Homogenization and porous media,Interdiscip. Appl. Math.6, Springer,New York(1997).

[20] H.K. Hummel, Homogenization for heat transfer in polycrystals with interfacial resistances, Appl. Anal., 75 (3-4) (2000), 403–424.

[21] W. Jäger, A. Mikelić, Modeling effective interface laws for transport phenomena between an unconfined fluid and a porous medium using homogenization, Transp. Porous Med. 78 (2009) 489–508.

[22] J.B. Keller, Darcy's law for flow in porous media and the two-space method, Nonlinear partial differential equations in engineering and applied science (Proc. Conf., Univ. Rhode Island, Kingston, R.I., 1979), Lecture Notes in Pure and Appl. Math. 54 429–443, Dekker,New York(1980)

[23] J.-L Lions, Some methods in the mathematical analysis of systems and their control, Kexue Chubanshe (Science Press), Beijing(1981)

[24] R. Lipton, Heat conduction in fine scale mixtures with interfacial contact resistance, SIAM J. Appl. Math. 58 (1) (1998), 55–72.

[25] R. Lipton and M. Avellaneda, Darcy's law for slow viscous flow past a stationary array of bubbles, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 114 (1-2)(1990) 71–79.

[26] I.P. Jones, Low Reynolds number flow past a porous spherical shell, Proc Camb. Phil. Soc. 73 (1973) 231–238.

[27] D. Lukkassen, G. Nguetseng, P. Wall, Two-scale convergence. Int. J. Pure Appl. Math. 2 (2002) 35–86.

[28] A. Mikelić, Effets inertiels pour un écoulement stationnaire visqueux incompressible dans un milieu poreux, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.320 (10) (1995) 1289–1294.

[29] S. Monsurrò, Homogenization of a two-component composite with interfacial thermal barrier, Adv. Math. Sci. Appl., 13 (1) (2003), 43–63.

[30] F. Murat, L. Tartar Calcul des variations et homogénéisation, in: Homogenization methods: theory and applications in physics (Bréau-sans-Nappe,1983) Collect. Dir. Études Rech. Élec. France 57, Eyrolles, Paris Paris, Eyrolles, 1985, 319-370.

[31] M. Neuss-Radu, Some extensions of two-scale convergence. C.R. Acad. Sci. Paris, t. 322, Serie I (1996) 899-904.

[32] G. Nguetseng, A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization, S.I.A.M. J.Math.Anal. 20 (1989) 608-623.

[33] J.N. Pernin, Homogénéisation d'un problème de diffusion en milieu composite à deux composantes, C. R. Acad. Sci. Paris Sér., I 321 (1995), 949–952.

[34] D. Poliševski, On the homogenization of fluid flows through periodic media, Rend. Sem. Mat. Univers. Politecn. Torino 45 (2) (1987) 129–139.

[35] D. Poliševski, Basic homogenization results for a biconnected ϵ-periodic structure, Appl. Anal. 82 (4) (2003) 301–309.

[36] D. Poliševski, The Regularized Diffusion in Partially Fractured Porous Media, in: L. Dragos (Ed.) Current Topics in Continuum Mechanics, Volume 2, Ed. Academiei, Bucharest, 2003.

[37] D. Poliševski, R. Schiltz-Bunoiu, A. Stănescu, Heat transfer with first-order interfacial jump in a biconnected structure, accepted for publication in Bulletin Mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie .

[38] P.G. Saffman, On the boundary condition at the interface of a porous medium, Stud. Appl. Math. 50 (1971) 93–101.

[39] E. Sanchez-Palencia, Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. Lecture Notes in Physics, Vol. 127, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[40] R.E. Showalter, N.J. Walkington, Micro-structure models of diffusion in fissured media, J. Math. Anal. Appl. 155 (1991) 1-20.

[41] L. Tartar, Incompressible fluid flow in a porous medium. Convergence of the homogenization process. Appendix of [39].

[42] L.Tartar, Quelques remarques sur l'homogénéisation, functional analysis and numerical analysis, In Proc. Japan Seminar 1976, ed. Fujita, pp.468–482.

Confirmări: Articolele publicate de Alina Stănescu au fost realizate în cadrul proiectului "Doctoratul în Ştiinţe fundamentale-începutul unei cariere de vârf în cercetare", cofinanţat de Uniunea Europeană şi Guvernul României din Fondul Social European prin Programul Operaţional Sectorial Dezvoltarea Resurselor Umane 2007-2013, contractul de finanţare nr. POSDRU/107/1.5/S/82514.