ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ "SIMION STOILOW"

TEZĂ DE DOCTORAT
Rezumat

Pseudoconvexitate analitică

Coordonator ştiinţific,
C.S. I dr. Mihnea Colţoiu

Doctorand,
George-Ionuţ Ioniţă

Bucureşti, 2014

Introducere

În prima jumătate a tezei sunt prezentate noţiuni generale şi rezultate fundamentale din teoria spaţiilor Stein, a spaţiilor q-convexe (cu colţuri) şi a celor q-complete (cu colţuri). De asemenea, sunt incluse şi concepte specifice lucrării de faţă: convexitatea relativ la o mulţime liniară introdusă de M. Peternell [28], funcţia Andreotti a unei mulţimi analitice şi definiţia funcţiei (strict) q-plurisubarmonice (vezi [15]).

Partea a doua conţine rezultatele originale (vezi Teorema 2, Teorema 5 şi Teorema 6). Aceste teoreme sunt incluse în lucrările [18], [19] şi [20], lucrări care au fost acceptate spre publicare.

Teorema 2 generalizează rezultate obţinute de Stein [31], Ballico [2], [3], Le Barz [21] şi Vâjâitu [34] şi are următorul enunţ: dacă $\pi : Z \to X$ este un morfism local semi-propriu de spaţii complexe astfel încât X este q-complet, atunci Z este $(q + r)$-complet, unde r este dimensiunea fibrei.

În continuare sunt prezentate generalizări ale soluţiei la problema Levi pe spaţii complexe cu singularităţi izolate date de Colţoiu şi Diederich [8]. Aceştia au demonstrat că dacă $p : Y \to X$ este un domeniu Riemann neramificat, unde X şi Y sunt două spaţii complexe cu singularităţi izolate, astfel încât X este Stein şi p este morfism Stein, atunci Y este Stein. Teorema de mai sus a fost generalizată în două direcţii:

- am presupus că X este q-complet şi am obţinut că Y este q-complet (vezi Teorema 5);

- am presupus că morfismul p este local q-complet cu colţuri şi am obţinut că Y este q-complet cu colţuri (vezi Teorema 6).

Structura lucrării. Prezenta teză de doctorat constă din introducere, patru capitole şi o listă bibliografică cu 63 de titluri.

Cuvinte de mulţumire

Încep prin a mulţumi conducătorului meu de doctorat, domnul Profesor Mihnea Colţoiu atât pentru propunerea problemelor care fac subiectul acestei teze, dar şi pentru implicarea şi răbdarea de care a dat dovadă pe tot parcursul acestor ani.

Îi sunt profund recunoscător domnului Profesor Cezar Joiţa, cel care mi-a coordonat lucrarea de licenţă şi pe cea de master de la SNS-B. Îi mulţumesc pentru bunăvoinţa cu care mi-a răspuns tuturor întrebărilor şi pentru că este cel care mi-a facilitat întâlnirea cu analiza complexă în mai multe variabile.

Îi mulţumesc colegului meu Ovidiu Preda cu care am purtat nenumărate discuţii referitoare la spaţii Stein, q-convexitate şi morfisme local semi-finite.

Adresez sincere mulţumiri membrilor comisiei de doctorat: Prof. Dr. George Marinescu (Universitatea din Köln, Germania), C.S. II Dr. Cezar Joiţa (Institutul de Matematică ”S. Stoilow”, al Academiei Române), Conf. Dr. Constantin Costara (Universitatea ”Ovidius”, Constanţa, România) pentru timpul şi efortul alocat parcurgerii manuscrisului tezei de doctorat şi pentru observaţiile constructive făcute.

De asemenea, doresc să mulţumesc Institutului de Matematică ”Simion Stoilow” al Academiei Române şi Şcolii Normale Superioare din Bucureşti fără de care nu cred că aş fi ajuns până în acest moment.

În final, vreau să mulţumesc familiei şi prietenilor pentru suportul moral pe care mi l-au acordat pe parcursul programului doctoral.

Conţinutul lucrării

Noţiunile centrale din primul capitol sunt cele de spaţiu Stein, de funcţie (strict) plurisubarmonică şi de funcţie q-convexă pe un deschis din $\mathbb{C}^n$ şi de spaţiu q-convex, respectiv q-complet. O caracterizare echivalentă pentru funcţiile (strict) plurisubarmonice este dată prin intermediul formei Levi. Folosind scufundări locale noţiunile de funcţie (strict) plurisubarmonică şi de funcţie q-convexă se generalizează în contextul spaţiilor complexe.

Următorul rezultat reprezintă cea mai importantă caracterizare a spaţiilor Stein.

Teorema 1 ([16] şi [23], [24]). *Un spaţiu complex X este Stein dacă şi numai dacă există o funcţie continuă $\varphi : X \to \mathbb{R}$ strict plurisubarmonică şi de exhaustiune pe X.*

Noţiunea de funcţie strict plurisubarmonică, respectiv de spaţiu Stein se generalizează în felul următor.

Definiţia 1. *Considerăm X un spaţiu complex şi $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$ o funcţie netedă pe X. Funcţia φ se numeşte q-convexă dacă oricare ar fi $x \in X$ există o hartă locală $\iota : U \hookrightarrow \widetilde{U} \subset \mathbb{C}^n$ şi o funcţie $\widetilde{\varphi} \in \mathcal{C}^\infty(\widetilde{U}, \mathbb{R})$ astfel încât $\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi|_U$ şi aşa încât forma Levi a lui $\widetilde{\varphi}$ are cel puţin $n - q + 1$ valori proprii pozitive (> 0) în orice punct al lui $\widetilde{U}$.*

Definiţia 2. *Un spaţiu complex X se numeşte q-convex, dacă există o submulţime compactă K a lui X şi o funcţie netedă $\varphi : X \to \mathbb{R}$, care este de exhaustiune pe X şi q-convexă pe $X \backslash K$. Dacă putem alege $K = \emptyset$, atunci X se numeşte q-complet.*

În ultima parte a acestui capitol este considerat conceptul de funcţie q-convexă cu colţuri; aceasta se scrie local ca maximul unui număr finit de funcţii q-convexe (vezi [12] şi [13]).

Al doilea capitol conţine rezultate specifice lucrării de faţă.

Pentru a depăşi problema legată de faptul că suma sau maximul a două funcţii q-convexe nu este o funcţie q-convexă, M. Peternell [28] a introdus noţiunea de convexitate relativ la o mulţime liniară.

În cele ce urmează este definită noţiunea de funcţie Andreotti asociată unei submulţimi analitice $A \subset X$, unde X este un spaţiu complex. Funcţia Andreotti ne va ajuta să obţinem valori proprii pozitive în "direcţia normală" în punctele regulate ale lui A.

Acest capitol se încheie cu prezentarea noţiunea de funcţie (strict) q-plurisubarmonică.

Capitolul 3 conţine primul rezultat original al acestei teze.

Începem cu observaţia că dacă $\pi : Z \to X$ este un morfism finit de spaţii complexe, atunci Z este Stein dacă şi numai dacă X este Stein.

În [31], Stein a demonstrat că dacă X şi Z sunt două spaţii complexe şi $\pi : Z \to X$ este o acoperire neramificată astfel încât X este Stein, atunci Z este Stein.

Rezultatul anterior a fost generalizat pentru acoperiri ramificate de Le Barz [21]. Acesta a arătat că dacă X este Stein şi $\pi : Z \to X$ este un morfism local semi-finit, atunci Z este Stein.

Ballico [3] a generalizat într-o direcţie diferită rezultatul lui Stein: fie $\pi : Z \to X$ o acoperire neramificată de spaţii complexe. Dacă X este q-complet, atunci Z este q-complet. De asemenea, în [2], Ballico a demonstrat că dacă $\pi : Z \to X$ este un morfism finit de spaţii complexe astfel încât X este q-complete, respectiv q-convex, atunci Z este q-complet, respectiv q-convex.

Colţoiu şi Vâjâitu [11] au arătat că dacă $\pi : E \to B$ este o fibrare local analitică de spaţii complexe astfel încât fibra este o curbă Stein şi B este q-complet, atunci E este q-complet. Cazul în care E este o acoperire topologică a lui B a fost demonstrat în [3].

Vâjâitu [34] a generalizat rezultatele lui Ballico din [2] şi a demonstrat următoarea teoremă: fie $\pi : Z \to X$ o aplicaţie olomorfă, proprie de spaţii complexe. Dacă X este q-complet, atunci Z este $(q+r)$-complet, unde r este dimensiunea fibrei.

Scopul acestui capitol este să demonstrăm o teoremă (Teorema 2) care înglobează toate rezultatele menţionate anterior. Rezultatul este inclus în lucrarea [18].

Urmând ideile lui Le Barz (vezi [21]) vom da următoarea definiţie.

Definiţia 3. *Fie X şi Z două spaţii complexe. Spunem că un morfism $\pi : Z \to X$ este*

(a) semi-propriu dacă Z se scrie ca o reuniune disjunctă a unor spaţii deschise $(W^m)_m$ astfel încât $\pi|_{W^m} : W^m \longrightarrow X$ este o aplicaţie proprie $(m \in \mathbb{N})$;

(b) local semi-propriu dacă oricare ar fi $x \in X$, există o vecinătate U a lui x astfel încât $\pi|_{\pi^{-1}(U)} : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U$ este un morfism semi-propriu.

Acum suntem în măsură să enunţăm rezultatul principal al acestui capitol.

Teorema 2 ([18])**.** *Fie X şi Z două spaţii complexe, $\pi : Z \to X$ un morfism local semi-propriu şi $r = \max\{\dim \pi^{-1}(x) : x \in X\}$. Dacă X este q-complet, atunci Z este $(q+r)$-complet.*

Demonstraţia rezultatului de mai sus foloseşte următorul criteriu de q-completitudine pentru un spaţiu complex.

Teorema 3 ([10])**.** *Fie X un spaţiu complex şi $\mathcal{M}$ o mulţime liniară peste X. Considerăm $\{X_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ un şir crescător de submulţimi deschise în X astfel încât $X = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$. Presupunem că există funcţiile $u_i : X_i \to \mathbb{R}$, $u_i \in \mathcal{B}(X_i, \mathcal{M}|_{X_i})$ şi constantele $C_i, D_i \in \mathbb{R}$, $C_i < D_i$, $i \in \mathbb{N}$ care satisfac următoarele proprietăţi:*

(a) $\{x \in X_i : u_i(x) < D_i\} \subset\subset X_i$ oricare ar fi $i \in \mathbb{N}$;

(b) $\{x \in X_{i+1} : u_{i+1}(x) < C_i\} \subset \{x \in X_i : u_i(x) < D_i\}$ oricare ar fi $i \in \mathbb{N}$;

(c) pentru orice submulţime compactă $K \subset X$ există $j = j(K) \in \mathbb{N}$ aşa încât

$$K \subset \{x \in X_{i+1} : u_{i+1}(x) < C_i\} \text{ oricare ar fi } i \geq j.$$

Atunci există o funcţie de exhaustiune $v \in \mathcal{B}(X, \mathcal{M})$. În particular, dacă $\operatorname{codim} \mathcal{M} \leq q-1$, atunci X este spaţiu q-complet.

Următoarele afirmaţaţii contribuie în mod esenţial la demonstraţia Teoremei 2.

Lema 1 ([28]). *Fie X un spaţiu complex şi $\varphi : X \to \mathbb{R}$ o funcţie C^∞, q-convexă. Atunci există o mulţime liniară $\mathcal{M}$ peste X de codimensiune $\leq q-1$ astfel încât φ este 1-convexă relativ la $\mathcal{M}$.*

Lema 2 ([28]). *Fie $\iota : U \hookrightarrow \widetilde{U}$ o hartă locală a spaţiului complex X şi $\varphi : U \to \mathbb{R}$ o funcţie C^∞. Atunci funcţia φ este 1-convexă relativ la o mulţime liniară $\mathcal{M}$ dacă şi numai dacă oricare ar fi o mulţime compactă $K \subset U$ există $\delta > 0$ şi oricare ar fi $x \in K$ există o funcţie $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(\widetilde{U}, \mathbb{R})$ astfel încât $\widetilde{\varphi} \circ \iota = \varphi$ şi*

$$L(\widetilde{\varphi}, \iota(x))\iota_*(\xi) \geq \delta \left\|\iota_*(\xi)\right\|^2$$

oricare ar fi $\xi \in \mathcal{M}_x$.

Propoziţia 1 ([34]). *Dacă $\pi : Z \to X$ o aplicaţie olomorfă, atunci există un şir descrescător de $p+1$ submulţimi analitice A_k ale lui Z, unde $p \leq$* $\dim Z$, *$Z = A_p \supset A_{p-1} \supset \cdots \supset A_1 \supset A_0 = \emptyset$ astfel încât oricare ar fi $k \in \{1, 2, \ldots, p\}$ avem* $\dim A_{k-1} < \dim A_k$, *Sing $(A_k) \subset A_{k-1}$ şi*

$$\pi|_{A_k \setminus A_{k-1}} : A_k \setminus A_{k-1} \to X$$

are rang local constant.

Lema 3 ([21]). *Fie X şi Z două spaţii complexe şi $\pi : Z \to X$ un morfism local semi-propriu. Atunci există o acoperire local finită $\{U_j\}_j$ a lui Z şi o acoperire local finită $\{V_l\}_l$ a lui X astfel încât următoarele condiţii sunt satisfăcute:*

1. *oricare ar fi j, există un număr natural m_j şi o hartă locală notată $\iota_j : U_j \hookrightarrow \widetilde{U}_j$, unde $\widetilde{U}_j$ este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{C}^{m_j}$;*

2. *oricare ar fi l, există un număr natural n_l şi o hartă locală notată $\tau_l : V_l \hookrightarrow \widetilde{V}_l$, unde $\widetilde{V}_l$ este o submulţime deschisă a lui $\mathbb{C}^{n_l}$;*

3. *oricare ar fi j, există $l(j)$ astfel încât avem $\pi(U_j) \subset V_{l(j)}$ şi $\pi|_{U_j}$ se prelungeşte la o aplicaţie olomorfă $\widetilde{\pi} : \widetilde{U}_j \to \widetilde{V}_{l(j)}$.*

De asemenea, există o funcţie C^∞ $f : Z \to \mathbb{R}$ aşa încât:

- *$\{z \in Z : f(z) < c_1\} \cap \{z \in Z : (\varphi \circ \pi)(z) < c_2\} \subset\subset Z$, $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$;*

- *oricare ar fi j, există o aplicaţie $g_j : V_{l(j)} \to \mathbb{R}$ astfel încât $f|_{U_j} = g_j \circ \pi|_{U_j}$;*

- *g_j admite o prelungire C^∞, $\widetilde{g}_j : \widetilde{V}_{l(j)} \to \mathbb{R}$;*

- *oricare ar fi o mulţime compactă $K \subset X$,*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\left\{\left|\frac{\partial^2\widetilde{g}_j}{\partial z_r^{(l(j))}\partial\bar{z}_s^{(l(j))}}\right|_{|_{\tau_{l(j)}(V_{l(j)}\cap K)}} : V_{l(j)}\cap K\neq\emptyset, r,s=\overline{1,n_{l(j)}}\right\}<\infty.$$

Lema 4 ([34])**.** *Fie $\pi : Z \to X$ o aplicaţie olomorfă între două spaţii complexe cu $r = \max\{\dim\pi^{-1}(x) : x \in X\}$. Atunci există o mulţime liniară $\mathcal{N}$ peste Z de codimensiune $\leq r$ astfel încât oricare ar fi un deschis relativ compact U din Z, există o acoperire finită $\{V_l\}_l$ a lui $\overline{\pi(U)}$ cu deschişi relativ compacţi şi funcţii C^∞ $\psi_l : U_l \to \mathbb{R}_+$ care sunt 1-convexe relativ la $\mathcal{N}$ peste $U_l \cap U$, unde $U_l = \pi^{-1}(V_l)$.*

Capitolul se încheie cu prezentarea unei reciproce a teoremei lui Le Barz, anume dacă X este un spaţiu Stein n-dimensional, atunci există $f : X \to \mathbb{C}^n$ un morfism local semi-finit. Concluzia care se desprinde din demonstraţia rezultatului de mai sus este că dacă $f : X \to \mathbb{C}^n$ este un morfism local semi-finit, unde X este un spaţiu Stein n-dimensional, atunci f este aproape proprie. În continuare se studiază reciproca afirmaţiei de mai sus şi se arată că dacă $f : X \to Y$ este morfism local semi-finit, unde Y este Stein, atunci f nu este aplicaţie aproape proprie. Exemplul considerat este acoperirea cu un număr infinit de foi a discului punctat din $\mathbb{C}$, acoperire dată de funcţia logaritm.

În ultimul capitol sunt incluse rezultatele originale din lucrările [19] şi [20].

Conform soluţiei la problema Levi dacă $Y \subset \mathbb{C}^n$ este un deschis local Stein, i.e., orice punct $x \in \mathbb{C}^n$ are o vecinătate $V = V(x)$ astfel încât $V \cap Y$ is Stein, atunci Y este Stein (Oka [26], [27], Bremermann [4], Norguet [25]). Utilizând caracterizarea lui Oka a domeniilor Stein din $\mathbb{C}^n$ avem că funcţia $-\log d$ este plurisubarmonică pe Y, unde d reprezintă distanţa euclidiană la frontiera lui Y. Mai mult, Oka a considerat domenii Riemann neramificate $p : Y \to \mathbb{C}^n$ peste $\mathbb{C}^n$ şi a arătat că Y este Stein dacă şi numai dacă $-\log d$ este plurisubarmonică pe Y. De aici rezultă că dacă p este morfism Stein, adică orice punct $x \in \mathbb{C}^n$ are o vecinătate $V = V(x)$ astfel încât $p^{-1}(V)$ este Stein, atunci Y este Stein.

Grauert şi Docquier [14] au generalizat rezultatul lui Oka pentru varietăţi Stein. În particular, aceştia au demonstrat că dacă $p : Y \to X$ este un domeniu Riemann neramificat, p este morfism Stein şi X este Stein, atunci Y este Stein.

În [1], Andreotti şi Narasimhan au arătat că dacă $Y \subset X$ este un deschis într-un spaţiu Stein X cu singularităţi izolate şi Y este local Stein, atunci Y este (global) Stein. Cazul general al teoremei anterioare, pentru singularităţi arbitrare, se numeşte "problema Stein locală" sau "problema Levi pe spaţii singulare" şi este o problemă deschisă. O trecere în revistă a rezultatelor referitoare la problema Levi pe spaţii Stein se găseşte în [7] sau în [30].

Colţoiu şi Diederich au generalizat rezultatele menţionate anterior şi au demonstrat următorul fapt.

Teorema 4 ([8])**.** *Fie X şi Y două spaţii complexe cu singularităţi izolate şi $p : Y \to X$ un domeniu Riemann neramificat. Presupunem că X este Stein şi că p este morfism Stein, i.e., orice punct $x \in X$ are o vecinătate $V = V(x)$ astfel încât $p^{-1}(V)$ este Stein. Atunci Y este Stein.*

Scopul acestui capitol este generalizarea teoremei lui Colţoiu şi Diederich în două direcţii:

(1) modificarea ipotezei cu privire la spaţiul Stein X (X va fi acum q-complet);

(2) modificarea ipotezei cu privire la morfismul Stein $p : Y \to X$ (p va fi acum local q-complet cu colţuri).

Rezultatele care se obţin în urma observaţiilor de mai sus şi care vor fi demonstrate în cele două capitole ulterioare sunt prezentate mai jos. Acestea au fost incluse în lucrările [19] (Teorema 5), respectiv [20] (Teorema 6) acceptate spre publicare.

Teorema 5 ([19])**.** *Fie X şi Y două spaţii complexe cu singularităţi izolate şi $p : Y \to X$ un domeniu Riemann neramificat. Presupunem că X este q-complet şi că p este morfism Stein, i.e., orice punct $x \in X$ are o vecinătate $V = V(x)$ astfel încât $p^{-1}(V)$ este Stein. Atunci Y este q-complet.*

Teorema 6 ([20])**.** *Fie X şi Y două spaţii complexe cu singularităţi izolate şi $p : Y \to X$ un domeniu Riemann neramificat. Presupunem că X este Stein şi că p este local q-complet cu colţuri, i.e., orice punct $x \in X$ are o vecinătate $V = V(x)$ astfel încât $p^{-1}(V)$ este q-complet cu colţuri. Atunci Y este q-complet cu colţuri.*

Dacă X şi Y sunt netede, atunci Teorema 5 a fost demonstrată de Vâjâitu în [33].

Dacă p este aplicaţia de incluziune, atunci Teorema 6 a fost demonstrată de Vâjâitu în [32]. De asemenea, dacă X şi Y sunt netede, Vâjâitu a arătat că dacă X este r-complet cu colţuri şi dacă p este local q-complet cu colţuri, atunci Y este $(q + r - 1)$-complet cu colţuri (vezi [33]).

În cadrul ambelor demonstraţii se fac următoarele reduceri: $\mathrm{Sing}(X) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ este o mulţime finită şi că $p(Y) \subset\subset X$. De asemenea, se vor distinge două cazuri:

(a) $x_1, x_2, \dots, x_k \notin p(Y)$;

(b) $x_1, \dots, x_l \notin p(Y)$ şi $x_{l+1}, \dots, x_k \in p(Y)$.

Ca şi în cazul Teoremei 2, sunt folosite criterii pentru testarea q-completitudinii, respectiv a q-completitudinii cu colţuri a unui spaţiu complex.

Propoziţia 2 ([33]). *Fie Y un spaţiu complex şi $\mathcal{N}$ o mulţime liniară peste Y de codimensiune $\leq q-1$. Presupunem că există o funcţie $\Phi : Y \to \mathbb{R}$ astfel încât $\Phi \in \mathcal{B}(Y, \mathcal{N})$ şi oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$ submulţimile de nivel $\{\Phi < c\}$ sunt $\mathcal{N}$-complete (i.e., există o funcţie de exhastiune $u_c \in \mathcal{B}(\{\Phi < c\}, \mathcal{N}|_{\{\Phi<c\}})$). Atunci Y este q-complet.*

Propoziţia 3 ([33]). *Dacă X este un spaţiu complex şi $\Phi \in F_q(X)$ astfel încât oricare ar fi $c \in \mathbb{R}$ mulţimea $X_c := \{\Phi < c\}$ este q-completă cu colţuri, atunci X este q-complet cu colţuri.*

Rezultatele fundamentale care se folosesc în cadrul celor două demonstraţii sunt Lema 1 (pentru Teorema 5) şi următoarea teoremă.

Teorema 7 ([10]). *Un spaţiu complex X este 1-convex dacă şi numai dacă există o funcţie strict plurisubarmonică, de exhaustiune $\Phi : X \to [-\infty, \infty)$. Mai mult, Φ poate fi aleasă $-\infty$ exact pe mulţimea excepţională S a lui X şi real analitică în afara lui S.*

Ideile sunt care sunt folosite în continuare sunt inspirate din [8] şi aici amintim o tehnică clasică de lipire a funcţiilor strict plurisubarmonice cu diferenţe mărginite (utilizând rezultatele ale lui M. Peternell [29] sau Matsumoto [22]) sau metoda de regularizare (vezi [17]) folosită pentru a evita dificultăţile care apar în încercarea de a construi o funcţie cu forma Levi mărgnită inferior în direcţia verticală. Aceste idei ca şi Teorema 7 apar în demonstraţia ambelor teoreme.

Pentru demonstraţia Teoremei 6 avem nevoie de rezultate specifice.

Teorema 8 ([5]). *Dacă X este o varietate complexă şi $f : X \to \mathbb{R}$ este o funcţie continuă, strict q-plurisubarmonică, atunci oricare ar fi o funcţie continuă $\delta : X \to (0, \infty)$ există o funcţie $\widetilde{f} \in F_q(X)$ astfel încât $|\widetilde{f} - f| < \delta$.*

Lema 5 ([6]). *Dacă X este un spaţiu complex, $A \subset X$ o submulţime analitică şi $f \in F_q(A)$, atunci oricare ar fi $\eta \in C^0(A, \mathbb{R})$, $\eta > 0$ există o vecinătate deschisă U a lui A în X şi $\widetilde{f} \in F_q(U)$ astfel încât $\left|\widetilde{f}|_A - f\right| \leq \eta$.*

Lema 6 ([28]). *Dacă X este un spaţiu complex şi $A \subset X$ este o mulţime analitică, atunci există $h \in C^\infty(X, \mathbb{R})$, $h \geq 0$ astfel încât:*

(a) $\{h = 0\} = A$;

(b) *oricare ar fi* $x \in X$ *există o vecinătate deschisă* U *a lui* x *şi o funcţie netedă* $\sigma : U \to \mathbb{R}$ *aşa încât* $\log(h|_{U \setminus A}) + \sigma|_{U \setminus A}$ *este plurisubarmonică.*

Bibliografie selectivă

[1] Andreotti, A., Narasimhan, R.: *Oka's Heftungslemma and the Levi Problem for Complex Spaces*, Trans. AMS **111** (1964), 345-366.

[2] Ballico, E.: *Morfismi finiti tra spazi complessi e q-convessità*, Ann. Univ. Ferrara, sez. VII - Sc. Mat. **26** (1980), 29-31.

[3] Ballico, E.: *Rivestimenti di spazi complessi e q-completezza*, Riv. Mat. Univ. Parma **7** (1981), 443-452.

[4] Bremermann, H. J.: *Über die Äquivalenz der pseudokonvexen Gebiete und der Holomorphiegebiete im Raum von n komplexen Veränderlichen*, Math. Ann. **128** (1954), 63-91.

[5] Bungart, L.: *Piecewise smooth approximations to q-plurisubharmonic functions*, Pacific J. Math. **142** (1990), 227-244.

[6] Colţoiu, M.: *n-concavity of n-dimensional complex spaces*, Math. Z. **210** (1992), 203-206.

[7] Colţoiu, M.: *The Levi problem on Stein spaces with singularities. A survey*, Rend. Mat. (Roma) **29** (2009), 341-353.

[8] Colţoiu, M., Diederich, K.: *The Levi problem for Riemann domains over Stein spaces with singularities*, Math. Ann. **338** (2007), 283-289.

[9] Colţoiu, M., Mihalache, N.: *Strongly plurisubharmonic exhaustion functions on* 1*-convex spaces*, Math. Ann. **270** (1985), 63-68.

[10] Colţoiu, M., Vâjâitu, V.: *On the n-completeness of covering spaces with parameters*, Math. Z. **237** (2001), 815-831.

[11] Colţoiu, M., Vâjâitu, V.: *Locally trivial fibrations with singular 1-dimensional Stein fiber over q-complete spaces*, Nagoya Math. J. **157** (2000), 1-13.

[12] Diederich, K., Fornaess, J. E.: *Smoothing q-convex functions and vanishing theorems*, Invent. Math. **82** (1985), 291-305.

[13] Diederich, K., Fornaess, J. E.: *Smoothing q-Convex Functions in the Singular Case*, Math. Ann. **273** (1986), 665-671.

[14] Docquier, F., Grauert, H.: *Levische Problem und Rungescher Satz für Teilgebiete Steinscher Mannigfaltigkeiten*, Math. Ann. **140** (1960), 94-123.

[15] Fujita, O.: *Domaines pseudoconvexes d'ordre général et fonctions pseudoconvexes d'ordre général*, J. Math. Kyoto Univ. **30** (1990), 637-649.

[16] Grauert, H.: *On Levi's problem and the embedding of real-analytic manifolds* Ann. Math. (2) **68** (1958), 460-472.

[17] Hörmander, L: *An Introduction to Complex Analysis in Several Variables*, North Holland, 1990.

[18] Ioniţă, G.-I.: *q-convexity properties of locally semi-proper morphisms of complex spaces*, acceptat spre publicare în Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.

[19] Ioniţă, G.-I.: *q-completeness of unbranched Riemann domains over complex spaces with isolated singularities*, acceptat spre publicare în Complex Var. Elliptic Equ.

[20] Ioniţă, G.-I.: *q-completeness with corners of unbranched Riemann domains*, acceptat spre publicare în Kyushu J. Math.

[21] Le Barz, P.: *A propos des revêtements ramifiés d'espaces de Stein*, Math. Ann. **222** (1976), 63-69.

[22] Matsumoto, K.: *Pseudoconvex Riemann domains of general order over Stein manifolds*, Kyushu J. Math. **44** (1990), 95-107.

[23] Narasimhan, R.: *The Levi problem for complex spaces* Math. Ann. **142** (1961), 355-365.

[24] Narasimhan, R.: *The Levi problem for complex spaces II* Math. Ann. **146** (1962), 195-216.

[25] Norguet, F.: *Sur les domaines d'holomorphie des fonctions uniformes de plusieurs variables complexes (passage du local au global)*, Bull. Soc. Math. France **82** (1954), 139-159.

[26] Oka, K.: *Domaines pseudoconvexes*, Tohoku Math. J. **49** (1942), 15-52.

[27] Oka, K.: *Domaines finis sans points critiques intérieurs*, Japanese J. Math. **23** (1953), 97-155.

[28] Peternell, M.: *Algebraische Varietäten und q-vollständige komplexe Räume*, Math. Z., **200** (1989), 547-581.

[29] Peternell, M.: *Continuous q-convex exhaustion functions*, Invent. Math. **85** (1986), 249-262.

[30] Siu, Y.-T.: *Pseudoconvexity and the problem of Levi*, Bull. AMS **840** (1978), 481-512.

[31] Stein, K.: *Überlagerung holomorph vollständiger komplexer Räume*, Arch. Mat. **7** (1956), 354-361.

[32] Vâjâitu, V.: *Locally q-complete open sets in Stein spaces with isolated singularities*, Kyushu J. Math. **51** (1997), 355-368.

[33] Vâjâitu, V.: *Pseudoconvex domains over q-complete manifolds*, Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa **29** (2000), 503-530.

[34] Vâjâitu, V.: *Some convexity properties of morphisms of complex spaces*, Math. Z. **217** (1994), 215-245.