Academia Romana
Institutul de Matematica ,,Simion Stoilow"

Teza de doctorat

Momente pentru reprezentări de grupuri Lie

Conducător ştiinţific:
Dr. Daniel Beltiţă

Doctorand:
Mihai Nicolae

Bucureşti, 2014

Mulţumiri

Realizarea acestei lucrari a fost posibila datorita ajutorului mai multor oameni carora le sunt recunoscator, dintre care il mentionez in mod special pe d-l dr. Mihai Pascu de la Universitatea Petrol-Gaze din Ploiesti si Institutul de Matematica ,,Simion Stoilow" al Academiei Romane. Dumnealui a insistat sa particip la concursul de admitere la doctorat in cadrul IMAR. Fara incurajarile dumnealui nu as fi reusit. Ii multumesc d-lui dr. Daniel Beltita pentru grija si intelegerea pe care le-a avut in acesti trei ani. Le multumesc d-lui dr. Stefan Berceanu de la Institutul de Fizica si Inginerie Nucleara ,,Horia Hulubei" si d-lui dr. Catalin Lefter de la Universitatea ,,Alexandru Ioan Cuza" din Iasi pentru amabilitatea si generozitatea cu care mi-au evaluat teza.

Cuprins

Introducere

Aplicatia moment a unei reprezentari unitare tare continue $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ a unui grup Lie finit dimensional este

$$\Psi_\pi\colon \mathcal{H}_\infty \setminus \{0\} \to \mathfrak{g}^*, \quad \Psi_\pi(v) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\langle \mathrm{d}\pi(\cdot)v, v\rangle}{\langle v, v\rangle},$$

unde $\mathcal{H}_\infty := \{v \in \mathcal{H} \mid \pi(\cdot)v \in C^\infty(G, \mathcal{H})\}$ este spatiul vectorilor de clasa C^∞, iar *multimea moment inchisa* este

$$I_\pi := \overline{\Psi_\pi(\mathcal{H}_\infty \setminus \{0\})} \subseteq \mathfrak{g}^*$$

adica inchiderea imaginii aplicatiei moment in dualul algebrei Lie $\mathfrak{g}$ a lui G. Aceste notiuni au fost introduse in lucrarile [Wi89], [Mi90], [Wi92], fiind motivate de anumite probleme din geometria simplectica, dar s-au dovedit extrem de importante si in teoria reprezentarilor de grupuri Lie.

Spre exemplu, s-a demonstrat in [AL92] ca toate grupurile Lie rezolubile (si in particular cele comutative) au proprietatea remarcabila ca multimea moment a oricarei reprezentari este convexa. Acest fapt este netrivial chiar si in cazul grupului $G = (\mathbb{R}, +)$. In acest caz, pentru orice reprezentare unitara $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ continua in raport cu topologia normei operatoriale avem $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}$ si exista un operator auto-adjunct $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ astfel incat $\pi(t) = e^{\mathrm{i}tA}$ pentru orice $t \in \mathbb{R} = G$, iar imaginea aplicatiei moment a lui π se poate identifica in mod canonic cu imaginea numerica a operatorului A,

$$W(A) := \{\langle Av, v\rangle \mid v \in \mathcal{H},\ \|v\| = 1\} = \Big\{ \frac{\langle Av, v\rangle}{\langle v, v\rangle} \,\Big|\, v \in \mathcal{H} \setminus \{0\} \Big\}.$$

In acest caz, teorema de convexitate din [AL92] mentionata anterior rezulta din teorema Hausdorff-Toeplitz, potrivit careia imaginea numerica a oricarui operator liniar este convexa. Acasta situatie simpla ilustreaza si importanta multimii moment, deoarece se stie ca spectrul $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ al operatorului A are proprietatile

$$\sigma(A) \subseteq W(A),\ \inf \sigma(A) = \inf W(A),\ \sup \sigma(A) = \sup W(A),$$

adica
$$I_\pi = \overline{W(A)} = [\inf \sigma(A), \sup \sigma(A)],$$
deci multimea moment contine informatii foarte important despre spectru, fiind insa mult mai usor de calculat decat spectrul.

Principalul rezultat obtinut in aceasta teza (Teorema 5.5.2) este o generalizare completa a teoremei de convexitate din [AL92] de la grupuri Lie rezolubile la grupuri local compacte separabile rezolubile, si anume demonstram ca ***multimile moment ale tuturor reprezentarilor de grupuri local compacte separabile rezolubile sunt convexe***.

Pentru a explica acest context de grupuri topologice in care vom lucra adesea, reamintim urmatoarele:

Orice morfism continuu de grupuri Lie este diferentiabil in mod automat.

$$\Downarrow$$

Un grup topologic poate avea cel mult o structura de grup Lie.

Semnificatia acestor fapte fundamentale din teoria Lie finit dimensionala este aceea ca trebuie sa gandim categoria grupurilor Lie ca pe o subcategorie plina a categoriei grupurilor topologice, si aceasta sugereaza in mod natural problema de a extinde metodele si rezultatele teoriei Lie de la cadrul traditional al grupurilor Lie finit dimensionale catre categorii mai largi de grupuri topologice. Aceasta problema este cu atat mai importanta cu cat studiul grupurilor Lie si al reprezentarilor lor prin operatori liniari ocupa un loc central in matematica actuala, atat din cauza aplicatiilor in alte domenii inclusiv din afara matematicii, cat si datorita ideilor profunde care au fost dezvoltate initial in legatura cu gruurile Lie, dar s-au dovedit apoi a fi strans legate de algebra liniara, analiza functionala, teoria operatorilor, analiza armonica, topologia diferentiala, teoria numerelor etc.

Aceasta teza de doctorat se inscrie in perspectiva schitata mai sus, prin faptul ca, avand ca punct de pornire momentele reprezentarilor de grupuri Lie, care implica in mod esential diferentiabilitatea, se dovedeste ca pentru intelegerea aplicatiei moment si a proprietatilor ei de convexitate este esential sa utilizam substratul topologic al teoriei Lie, sa studiem calculul diferential pe grupuri topologice generale, si astfel vom descoperi in cele din urma cadrul natural in care se poate stabili convexitatea multimilor moment ale reprezentarilor unitare. Anume, pentru toate grupurile local compacte separabile rezolubile (care nu sunt in mod necesar grupuri Lie) demonstram ca multimile moment ale tuturor reprezentarilor lor unitare sunt convexe, acesta fiind unul dintre principalele rezultate pe care le obtinem aici, dupa cum am mentionat deja mai sus.

Descrierea structurii tezei si a principalelor contributii originale

Aceasta teza de doctorat este formata din introducere, cinci capitole, si bibliografie. Fiecare dintre cele cinci capitole incepe printr-o prezentare a continutului si se incheie printr-o sectiune ce contine note bibliografice asupra rezultatelor prezentate in capitolul respectiv.

Capitolul 1 contine notiuni generale la care se face apel pe tot parcursul acestei lucrari. Principala tematica dezvoltata aici este aceea a diferentiabilitatii pe grupuri topologice care nu sunt neaparat grupuri Lie. Mai concret, pentru un grup topologic general, prezentam aici spatiul $\Lambda(G) = \mathrm{Hom}(\mathbb{R}, G)$ al subgrupurilor cu un parametru (care este identificat cu algebra Lie in cazul grupurilor Lie finit dimensionale), apoi studiem actiunea adjuncta $G \times \Lambda(G) \to G$. In continuare introducem spatiile de functii continuu diferentiabile pe G de-a lungul subgrupurilor cu un parametru, si, ca o contributie originala, in Propozitia 1.2.4 studiem o noua topologie pe aceste spatii de functii (cf. articolul nostru [BNi14a]). Apoi definim grupurile pre-Lie si, pentru completitudine, prezentam dupa [BCR81], dar cu detalii suplimentare, o abordare axiomatica a diferentiabilitatii pe aceste grupuri.

In Capitolul 2, care se bazeaza in intregime pe rezultate originale din articolul nostru [BNi14a], extindem topologia mentionata mai sus la spatii de functii definite pe submultimi deschise ale unui grup topologic cu valori intr-un spatiu local convex. Aceasta topologie este una dintre principalele noutati cu caracter tehnic introduse in aceasta teza, iar utilitatea ei este relevata de faptul ca ne permite sa demonstram in Teorema 2.4.19 ca pentru orice grupuri topologice G si H este valabila legea exponentiala slaba pentru spatii de functii diferentiabile, si anume exista scufundarea canonica *algebrica si topologica*

$$C^\infty(H \times G, \mathcal{Y}) \hookrightarrow C^\infty(H, C^\infty(G, \mathcal{Y})).$$

Pe baza acestei legi exponentiale, in Teorema 2.5.2 descriem apoi complet structura operatorilor locali invarianti pe un grup topologic G, si anume construim un izomorfism canonic intre algebra acestor operatori si spatiul distributiilor pe G cu suportul in elementul unitate, deci acest spatiu poate fi gandit ca generalizarea algebrei universale anvelopante a algebrei Lie a unui grup Lie.

Capitolul 3 se bazeaza pe rezultate originale si pe demonstratii date unor rezultate complet netriviale care au fost publicate de alti autori fara demonstratie, sau cu demonstratie schitata sumar. Deoarece ne bazam pe aceste rezultate in restul tezei, am considerat necesar sa le demonstram detaliat aici. Ca si in celelalte capitole, referintele pentru rezultatele preluate din alte lucrari sunt precizate detaliat in text. Acest capitol constituie un prim pas in studiul aplicatiilor moment ale reprezentarilor de grupuri topologice, iar principalul rezultat original pe care il obtinem aici este caracterizarea grupurilor topologice nilpotente de pas 2 al caror grup tangent este un grup pre-Lie (Teoremele 3.1.10 si 3.4.4). Pentru inceput prezentam o motivatie detaliata a ideilor ce urmeaza sa fie dezvoltate mai departe in capitol. Apoi demonstram Propozitia 3.2.3, care a fost indicata fara demonstratie in [BCR81] si din care rezulta ca inmultirea pe grupuri pre-Lie este aplicatie diferentiabila (a se vedea articolul nostru [Nic14] pentru mai multe detalii). In continuare prezentam unele elemente de teorie Lie pentru grupuri topologice nilpotente de pas 2, care ne permit sa construim algebra Lie topologica a unui astfel de grup, ceea ce da in particular o demonstratie detaliata a Teoremei 3.3.23 (a carei demonstratie a fost doar schitata sumar in [Ne06]). In Sectiunea 3.4 introducem grupul tangent al unui grup topologic cu algebra Lie, notat cu $T(G)$. La acest nivel de generalitate, aceasta este o notiune noua, care a fost considerata in [HM07] doar pentru grupuri pro-Lie. Aratam ca grupul tangent al unui grup topologic nilpotent de pas 2 este grup nilpotent de pas 2, iar in final caracterizam grupurile nilpotente de pas 2 pentru care grupul tangent este grup pre-Lie (Teorema 3.4.4).

Capitolul 4 este bazat in intregime pe rezultate originale si contine cateva proprietati de baza ale aplicatiei moment pentru reprezentari unitare de grupuri topologice pe spatii Hilbert finit dimensionale. Principalele rezultate sunt Teorema 4.1.6 si Teorema 4.1.7, in care stabilim proprietati de convexitate ale imaginii aplicatiei moment pentru produse tensoriale de reprezentari. In continuare introducem proprietatea Trotter pentru grupuri topologice (care generalizeaza proprietatea similara pentru grupuri Lie exponentiale studiata recent in [NS12]), iar Propozitia 4.2.2 arata ca pentru grupurile topologice care au proprietatea Trotter valorile aplicatiei moment sunt functionale liniare, exact ca si in cazul reprezentarilor de grupuri Lie.

Capitolul 5 se bazeaza in intregime pe rezultate originale din articolul nostru [BNi14b] si contine principalul rezultat obtinut in aceasta teza de doctorat, anume Teorema 5.5.2. Aceasta teorema ofera un raspuns afirmativ la problema de a extinde teorema de convexitate din [AL92] (mentionata la inceputul acestei Introduceri) in cazul grupurilor local compacte separabile. In ciuda ipotezelor cu caracter tehnic, de compacitate locala si separabilitate, se dovedeste util sa introducem notiunea de aplicatie moment pentru o reprezentare unitara continua a unui grup topologic arbitrar (Definitia 5.3.1) si sa punem in evidenta cateva proprietati de baza in acest cadru general.

Conventie generala

Pe tot parcursul acestei lucrari, prin grup topologic intelegem intotdeauna de fapt grup topologic *separat*, iar prin spatiu Hilbert intelegem spatiu Hilbert *complex*.

Capitolul 1

Grupuri pre-Lie

Acest capitol contine notiuni generale la care se face apel pe tot parcursul acestei lucrari. Principala tematica dezvoltata aici este aceea a diferentiabilitatii pe grupuri topologice care nu sunt neaparat grupuri Lie. In Sectiunea 1.1 introducem spatiul $\Lambda(G)$ al subgrupurilor continue cu un parametru ale unui grup topologic arbitrar G. Acest spatiu este inzestrat cu topologia compact-deschisa, si in cazul grupurilor Lie este identificat in mod natural cu spatiul tangent in elementul unitate, adica algebra Lie a grupului respectiv. Prin analogie cu cazul grupurilor Lie, introducem aici actiunea adjuncta a unui grup topologic arbitrar G pe $\Lambda(G)$, notata

$$G \times \Lambda(G) \to \Lambda(G), \quad (x, \gamma) \mapsto \gamma^x$$

si aratam ca aceasta este o actiune continua (Lema 1.1.3). In Sectiunea 1.2 introducem diferentiabilitatea la stanga si la dreapta pe grupuri topologice. In Lema 1.2.2 sunt formule de legatura intre derivatele la stanga si la dreapta. Propozitia 1.2.3 asigura faptul ca multimea functiilor de clasa C^k obtinuta cu derivatele la stanga coincide cu multimea functiilor de clasa C^k obtinuta cu derivatele la dreapta. Introducem pe multimea $C^\infty(G)$ doua topologii de spatiu local convex cu ajutorul derivatelor la stanga si la dreapta si Propozitia 1.2.4 arata ca aceste topologii coincid. In Sectiunea 1.4 prezentam o serie de axiome pe care trebuie sa le verificam cand definim o notiune de diferentiabilitate pe grupuri topologice. In Sectiunea 1.3 definim grupurile pre-Lie pe care introducem o notiune de difentiabilitate pentru aplicatii definite pe submultimi deschise ale grupurilor pre-Lie. Teorema 1.4.2 arata ca aceasta notiune de diferentiabilitate introdusa este corecta, adica verifica axiomele prezentate in Sectiunea 1.4.

1.1 Preliminarii despre actiunea adjuncta a unui grup topologic

Fie G un grup topologic cu multimea vecinatatilor lui $1 \in G$ notata cu $\mathcal{V}_G(1)$. Definim

$$\Lambda(G) = \{\gamma : \mathbb{R} \to G \text{ cont.} \mid (\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad \gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)\}$$

si

$$(\forall n \geq 1) \quad \Lambda^n(G) := \underbrace{\Lambda(G) \times \cdots \times \Lambda(G)}_{n \text{ ori}}.$$

Elementele lui $\Lambda(G)$ se numesc *subgrupuri cu un parametru* ale lui G si sunt morfisme continue de grupuri. Inzestram $\Lambda(G)$ cu topologia uniform convergentei pe submultimile compacte din $\mathbb{R}$. Aceasta topologie este descrisa printr-un sistem fundamental de vecinatati ale fiecarui punct din $\Lambda(G)$ astfel: pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ si $V \in \mathcal{U}$ (baza de vecinatati deschise ale lui $1 \in G$) definim

$$U_V(\gamma) := \{\beta \in \Lambda(G) \mid \gamma(-t)\beta(t) \in V, (\forall) t \in [-1, 1]\}.$$

Multimile $U_V(\gamma)$ pentru $\gamma \in \Lambda(G)$ si $V \in \mathcal{U}$ formeaza o baza a topologiei lui $\Lambda(G)$, ca si intervalele deschise pentru topologia uzuala a lui $\mathbb{R}$. Daca T este un spatiu topologic atunci $f : T \to \Lambda(G)$ este continua daca $f^{-1}(U_V(\gamma))$ este deschisa in T pentru orice $V \in \mathcal{U}$ si orice $\gamma \in \Lambda(G)$. In plus f este continua in $x \in T$ daca $f^{-1}(U_V(f(x)))$ este vecinatate a lui x pentru orice $V \in \mathcal{U}$.

Definitia 1.1.1. Pentru $x \in G$ si $\gamma \in \Lambda(G)$ definim

$$\gamma^x : \mathbb{R} \to G, \quad \gamma^x(t) := x^{-1}\gamma(t)x.$$

Numim γ^x *conjugatul lui* γ *in raport cu* $x \in G$ si avem $\gamma^x \in \Lambda(G)$.

Observatia 1.1.2. Daca grupul G este comutativ atunci $\gamma^x = \gamma$ pentru orice $x \in G$ si orice $\gamma \in \Lambda(G)$.

In continuare vom prezenta doua leme in a caror demonstratie este esential modul in care este definita topologia de pe $\Lambda(G)$.

Lema 1.1.3. *Aplicatia* $G \times \Lambda(G) \to \Lambda(G)$, $(x, \gamma) \mapsto \gamma^x$, *este continua.*

Aceasta lema este o consecinta a urmatoarei proprietati universale a spatiului $\Lambda(G)$.

Lema 1.1.4. *Fie* T *un spatiu topologic. O aplicatie* $g : T \to \Lambda(G)$ *este continua daca si numai daca aplicatia asociata* $h : T \times \mathbb{R} \to G$, $h(x, t) := g(x)(t)$, *este continua.*

Demonstrație. Implicatia h continua $\implies$ g continua.

Fie $x_0 \in T$ si $V \in \mathcal{U}$. Vrem sa aratam ca $g^{-1}(U_V(g(x_0)))$ este vecinatate a lui x_0, de unde vom obtine ca g este continua. Alegem $V_1 \in \mathcal{U}$ astfel incat $V_1V_1 \subseteq V$ si $t \in [-1,1]$. Atunci $h(x_0,t)V_1$ este o vecinatate deschisa a lui $h(x_0,t)$. Deoarece h este continua, rezulta ca $h^{-1}(h(x_0,t)V_1)$ este o vecinatate deschisa a lui $(x_0,t) \in T \times \mathbb{R}$. Deci $h^{-1}(h(x_0,t)V_1) = U_t \times D_t$, unde U_t este o vecinatate deschisa a lui $x_0 \in T$ si D_t este o vecinatate deschisa a lui $t \in \mathbb{R}$. Deci exista $\varepsilon_t > 0$ astfel incat $(t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t) \subseteq D_t$. Pentru $s \in [-1,1], |t-s| < \varepsilon_t$ si $x \in U_t$ avem $(x,s) \in U_t \times D_t$ si obtinem ca $(x,s) \in h^{-1}(h(x_0,t)V_1)$ si $h(x,s) \in h(x_0,t)V_1$. Deci $h(x,s) = g(x)(s) \in g(x_0)(t)V_1 = h(x_0,t)V_1$. Cum $t \in (t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t), (\forall)t \in [-1,1]$ rezulta ca $[-1,1] \subseteq \bigcup\limits_t (t-\varepsilon_t, t+\varepsilon_t)$. Cum $[-1,1]$ este compact rezulta ca exista $t_1, t_2, \ldots, t_k \in [-1,1]$ astfel incat $[-1,1] \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{k} (t_i - \varepsilon_i, t_i + \varepsilon_i)$ unde $\varepsilon_{t_i} = \varepsilon_i > 0$. Notam multimea $U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_k$ fiind intersectie finita, este o vecinatate deschisa a lui $x_0 \in T$. Avem $g(x)(t) \in g(x_0)(t_i)V_1 \subseteq g(x_0)(t)V_1^2 \subseteq g(x_0)(t)V$. Deci $g(x)(t) \in g(x_0)(t)V$, pentru orice $x \in U$ si $t \in [-1,1]$ si obtinem ca $g(x_0)(-t)g(x)(t) \in V, (\forall)x \in U, (\forall)t \in [-1,1]$ si $g(x) \in U_V(g(x_0))$. Deci $U \subseteq g^{-1}(U_V(g(x_0)))$ si obtinem ca g este continua in x_0 si cum x_0 este oarecare in T rezulta ca g este continua.

Demonstram ca daca g este continua atunci h este continua. Fie $(x_0,t_0) \in T \times \mathbb{R}$. Alegem $k \in \mathbb{N}$ astfel incat $|t_0| < k$. Pot lua orice $k \geq [|t_0|] + 1$. Cand $t \to t_0$ avem ca $|t| \leq k$. Fie $V \in \mathcal{U}$. Atunci $U_V(g(x_0))$ este deschisa in $\Lambda(G)$. Deoarece g este continua rezulta ca $g^{-1}(U_V(g(x_0)))$ este deschisa in T si in contine pe x_0.

Cand $x \to x_0$ avem $x \in g^{-1}(U_V(g(x_0)))$ deci $g(x) \in U_V(g(x_0))$ adica $g(x)(s)g(x_0)(-s) \in V, (\forall)s \in [-1,1]$.

Din $|t| < k$ rezulta $g(x)(\frac{t}{k})g(x_0)(-\frac{t}{k}) \in V$ cand $x \to x_0$.

Deci

$$\begin{aligned}\lim_{x \to x_0, t \to t_0} \Big(g(x)(\frac{t}{k})g(x_0)(-\frac{t}{k})g(x_0)(\frac{t}{k})\Big)^k &= \Big(g(x_0)(\frac{t_0}{k})\Big)^k = g(x_0)(\frac{t_0}{k}k) \\ &= g(x_0)(t_0) = h(x_0,t_0).\end{aligned}$$

Obtinem ca $\lim\limits_{x \to x_0, t \to t_0} h(x,t) = h(x_0,t_0)$ de unde rezulta ca h este continua in (x_0,t_0), deci este continua pe $T \times \mathbb{R}$ si demonstratia Lemei 1.1.4 se incheie. □

Observatia 1.1.5. Daca grupul G este comutativ, aplicatia $(x,\gamma) \mapsto \gamma^x$ devine $(x,\gamma) \mapsto \gamma$, adica proiectia pe a doua componenta care este continua in topologia produs de pe $G \times \Lambda(G)$.

1.2 Diferentiabilitate pe grupuri topologice

Definitia 1.2.1. Fie G un grup topologic si $\mathcal{Y}$ un spatiu local convex si X o submultime deschisa in G. Functia continua $\varphi : X \to \mathcal{Y}$ este *diferentiabila de clasa* C^k (sau *de k ori continuu diferentiabila*) daca:

a) Exista $D^j\varphi : X \times \Lambda^j(G) \to \mathcal{Y}; j = 0, 1, \ldots, k,\ D^0\varphi = \varphi$ si pentru orice $x \in X; j = 0, 1, \ldots, k-1$ si $(\gamma_1, \ldots, \gamma_{j+1}) \in \Lambda^{j+1}(G)$ avem

$$D^{j+1}\varphi(x; \gamma_1, \ldots, \gamma_j, \gamma_{j+1}) := \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} D^j\varphi(x\gamma_{j+1}(t); \gamma_1, \ldots, \gamma_j).$$

b) Derivata $D^j\varphi : X \times \Lambda^j(G) \to \mathcal{Y}$ este continua pentru orice $j \leq k$. Notam cu $C^k(X, \mathcal{Y})$ multimea functiilor $\varphi : X \to \mathcal{Y}$ de k ori continuu diferentiabile si

$$C^\infty(X, \mathcal{Y}) := \bigcap_{n \geq 1} C^n(X, \mathcal{Y}).$$

Daca $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$ atunci $C^n(X) := C^n(X, \mathbb{C})$ pentru orice $n = 1, 2, \ldots, \infty$.

Daca inlocuim $x\gamma_{j+1}(t)$ cu $\gamma_{j+1}(t)x$ in definitia de mai sus, obtinem notiunea de functie *de k ori continua diferentiabila la dreapta* si multimile $C^k_{dr}(X, \mathcal{Y})$ si $C^\infty_{dr}(X, \mathcal{Y})$. Derivata la dreapta o vom nota cu $D^j_r\varphi$.

Lema 1.2.2. *Au loc urmatoarele relatii:*

a) $D_r f(x; \gamma) = Df(x; \gamma^x)$ *si* $Df(x; \gamma) = D_r f(x; \gamma^{x^{-1}})$.

b) Mai general, pentru orice $k \geq 1$ *avem*

$$D^k_r f(x; \gamma_1, \ldots, \gamma_k) = D^k f(x; \gamma^x_k, \ldots, \gamma^x_1)$$

si

$$D^k f(x; \gamma_1, \ldots, \gamma_k) = D^k_r f(x; \gamma^{x^{-1}}_k, \ldots, \gamma^{x^{-1}}_1).$$

Demonstraţie. a) Fie $\gamma \in \Lambda(G)$. Avem

$$\begin{aligned} Df(x; \gamma^x) &= \lim_{t \to 0} \frac{f(x\gamma^x(t)) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{f(\gamma(t)x) - f(x)}{t} \\ &= D_r f(x; \gamma) \end{aligned}$$

Deasemenea

$$\begin{aligned} D_r f(x;\gamma^{x^{-1}}) &= \lim_{t\to 0} \frac{f(\gamma^{x^{-1}}(t)x) - f(x)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{f(x\gamma(t)) - f(x)}{t} = Df(x;\gamma) \end{aligned}$$

b) Fie $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Lambda(G)$ si $x \in G$. Definim $\check{f}_x^{\gamma_1,\dots,\gamma_k} : \mathbb{R}^k \to \mathcal{Y}$ si $\hat{f}_x^{\gamma_1,\dots,\gamma_k} : \mathbb{R}^k \to \mathcal{Y}$ prin $\check{f}_x^{\gamma_1,\dots,\gamma_k}(t_1,\dots,t_k) := f(\gamma_1(t_1)\dots\gamma_k(t_k)x)$ si $\hat{f}_x^{\gamma_1,\dots,\gamma_k}(t_1,\dots,t_k) := f(x\gamma_1(t_1)\dots\gamma_k(t_k))$.

Avem

$$D^k f(x;\gamma_k,\dots,\gamma_1) = \frac{\partial^k \hat{f}_x^{\gamma_1,\dots,\gamma_k}}{\partial t_1 \dots \partial t_k}(0,0,\dots,0)$$

si

$$D_r^k f(x;\gamma_1,\dots,\gamma_k) = \frac{\partial^k \check{f}_x^{\gamma_1,\dots,\gamma_k}}{\partial t_1 \dots \partial t_k}(0,0,\dots,0).$$

Ca sa obtinem relatiile cerute este suficient sa aratam ca:

$$\check{f}_x^{\gamma_1,\dots,\gamma_k}(t_1,\dots,t_k) = \hat{f}_x^{\gamma_1^x,\dots,\gamma_k^x}(t_1,\dots,t_k).$$

Avem

$$\begin{aligned} \hat{f}_x^{\gamma_1^x,\dots,\gamma_k^x}(t_1,\dots,t_k) &= f(x\gamma_1^x(t_1)\dots\gamma_k^x(t_k)) \\ &= f(xx^{-1}\gamma_1(t_1)xx^{-1}\gamma_2(t_2)x\dots x^{-1}\gamma_k(t_k)x) \\ &= f(\gamma_1(t_1)\dots\gamma_k(t_k)x) \end{aligned}$$

ceea ce incheie demonstratia. □

Propozitia 1.2.3. *$C^\infty(X,\mathcal{Y}) = C^\infty_{dr}(X,\mathcal{Y})$ pentru orice submultime deschisa X a grupului topologic G.*

Demonstraţie. Definim functiile $\Phi, \Psi : G \times \Lambda^k(G) \to G \times \Lambda^k(G)$ prin $\Phi(x;\gamma_1,\dots,\gamma_k) := (x;\gamma_k^x,\dots,\gamma_1^x)$ si $\Psi(x;\gamma_1,\dots,\gamma_k) := (x;\gamma_k^{x^{-1}},\dots,\gamma_1^{x^{-1}})$ Deoarece aplicatia $(x,\gamma) \mapsto \gamma^x$ este continua de la $G \times \Lambda(G)$ la $\Lambda(G)$ si G este grup topologic, rezulta ca functiile Φ si H sunt continue. Daca $f \in C^\infty(X,\mathcal{Y})$ atunci $D^k f$ este continua. Deoarece $D_r^k f = D^k f \circ \Phi$ rezulta ca $D_r^k f$ este continua, deci $C^\infty(X,\mathcal{Y}) \subseteq C^\infty_{c,dr}(X,\mathcal{Y})$. Daca $f \in C^\infty_{c,dr}(X,\mathcal{Y})$ atunci $D_r^k f$ este continua. Deoarece $D^k f = D_r^k f \circ \Psi$ rezulta ca $D^k f$ este continua, deci $C^\infty_{c,dr}(X,\mathcal{Y}) \subseteq C^\infty(X,\mathcal{Y})$ de unde rezulta egalitatea ceruta. In plus avem $C^k(X,\mathcal{Y}) = C^k_{c,dr}(X,\mathcal{Y})$ pentru orice $k \geq 1$. □

Pentru $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in \Lambda^n(G)$ si $x \in G$ definim

$$\gamma^x := (\gamma_n^x,\dots,\gamma_1^x).$$

Introducem notatiile

$$(D_\gamma f)(x) := D^n f(x;\gamma_1,\ldots,\gamma_n) \text{ si } (D^r_\gamma f)(x) := D^n_r f(x;\gamma_1,\ldots,\gamma_n).$$

Pentru orice multimi compacte $K_2 \subseteq G$ si $K_1 \subseteq \Lambda^n(G)$ definim seminormele

$$p_{K_1,K_2} : C^\infty(G) \to [0,\infty), \quad p_{K_1,K_2}(f) := \sup\{|(D_\gamma f)(x)|, \gamma \in K_1, x \in K_2\}$$

si

$$q_{K_1,K_2} : C^\infty(G) \to [0,\infty), \quad q_{K_1,K_2}(f) := \sup\{|(D^r_\gamma f)(x)|, \gamma \in K_1, x \in K_2\}.$$

Mai definim

$$p_{K_1,K_2}(f) = q_{K_1,K_2}(f) = \sup\{|f(x)|, x \in K_2\}$$

pentru $K_2 \subseteq G$ compacta si $K_1 = \emptyset$.

Propozitia 1.2.4. *Seminormele p_{K_1,K_2} si q_{K_1,K_2} definesc pe $C^\infty(G)$ doua topologii de spatiu local convex egale.*

Demonstrație. Fie $K_2 \subseteq G$ si $K_1 \subseteq \Lambda^n(G)$ multimi compacte. Din relatia $(D_\gamma f)(x) = (D^r_{\gamma^x} f)(x)$ rezulta ca $p_{K_1,K_2}(f) \leq q_{K_3,K_2}(f)$ unde

$$K_3 := \{\gamma^x | \gamma \in K_1, x \in K_2\}.$$

Din $(D^r_\gamma f)(x) = (D_{\gamma^{x^{-1}}} f)(x)$ rezulta ca $q_{K_1,K_2}(f) \leq p_{K_4,K_2}(f)$ unde

$$K_4 := \{\gamma^{x^{-1}} | \gamma \in K_1, x \in K_2\}.$$

Pentru a incheia demonstratia trebuie sa arata ca multimile K_3 si K_4 sunt compacte in $\Lambda^n(G)$. Multimea K_3 este compacta pentru ca este imaginea multimii compacte $K_2 \times K_1$ prin functia continua data prin $(x,\gamma) \mapsto \gamma^x$ de la $G \times \Lambda^n(G)$ la $\Lambda^n(G)$. Multimea K_4 este compacta pentru ca este imaginea multimii compacte $K_2 \times K_1$ prin functia continua data prin $(x,\gamma) \mapsto \gamma^{x^{-1}}$ de la $G \times \Lambda^n(G)$ la $\Lambda^n(G)$. $\square$

1.3 Grupuri pre-Lie

Definitia 1.3.1. ([BR80], [BCR81]). Spunem ca grupul topologic G este *grup pre-Lie* daca sunt satisfacute urmatoarele conditii:

a) Spatiul topologic $\Lambda(G)$ are o structura de algebra Lie topologica peste $\mathbb{R}$ cu operatiile algebrice satisfacand urmatoarele conditii pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$ si $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda(G)$:

$$\begin{aligned}(t \cdot \gamma_1)(s) &= \gamma_1(ts);\\ (\gamma_1 + \gamma_2)(t) &= \lim_{n\to\infty} (\gamma_1(t/n)\gamma_2(t/n))^n;\\ [\gamma_1, \gamma_2](t^2) &= \lim_{n\to\infty} (\gamma_1(t/n)\gamma_2(t/n)\gamma_1(-t/n)\gamma_2(-t/n))^{n^2},\end{aligned}$$

unde convergenta este uniforma pe multimile compacte din $\mathbb{R}$.

b) Pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ neconstant exista o functie cu valori reale f de clasa C^∞ pe o vecinatate a lui $1 \in G$ astfel incat $Df(1;\gamma) \neq 0$.

Observatia 1.3.2. Daca G este grup pre-Lie, atunci rezulta din [BCR81, Th 1.3.2.2 si subsect 1.1.2], sau alternativ [BR80, Th si Sect 1], ca aplicatia $m : G\times G \to G, m(x,y) := xy$ este de clasa C^∞ in sensul Definitiei 1.4.1.

Exemplul 1.3.3. Orice grup local compact (in particular, orice grup Lie finit-dimensional) este un grup pre-Lie ([BCR81, pag. 41–42]; a se vedea si Lemele 5.2.3 si 5.2.4 de mai jos).

Exemplul 1.3.4. Orice grup Lie-Banach este un grup pre-Lie ([BCR81, pag. 41–42]).

Exemplul 1.3.5. Daca $\mathcal{X}$ este spatiu local convex, atunci grupul Lie local convex abelian $(\mathcal{X}, +)$ este un grup pre-Lie ([BCR81, pag. 41–42]).

1.4 Abordare axiomatica a diferentiabilitatii pe grupuri pre-Lie

Definitia 1.4.1. Fie G_1, G_2 doua grupuri pre-Lie, X_1, X_2 doua submultimi deschise in G_1, G_2 si $f : X_1 \to G_2$ o functie continua. Spunem ca f este *continuu diferentiabila de k-ori pe* X_1, daca exista aplicatia $D^{k'}f : X_1 \times \Lambda^{k'}(G_1) \to \Lambda(G_2)$, $D^0 f = f$, $k' = 1, \dots, k$, astfel incat pentru orice spatiu local convex $\mathcal{Y}$ si orice $\varphi \in C^{k'}(X_2, \mathcal{Y}), 0 \le k' \le k$ functia $\varphi \circ f \in C^{k'}(X_1 \cap f^{-1}(X_2), \mathcal{Y})$ si pentru orice $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_{k'}) \in \Lambda^{k'}(G_1)$ are loc regula lantului

$$D^{k'}(\varphi \circ f)(x;\gamma) = \sum_{(a_1,\dots,a_n)} D^{D^{a_1(\gamma)}f(x)} \dots D^{D^{a_j(\gamma)}f(x)}\varphi(f(x)) \tag{1.4.1}$$

unde $a_j = (i_1^j, \dots, i_{l_j}^j)$ este o submultime ordonata a multimii $\{1, 2, \dots, k'\}$. Suma din (1.4.1) se face dupa toate descompunerile $(a_1, \dots, a_j)$ ale multimii $\{1, 2, \dots, k'\}$ in submultimii nevide ordonate cu $i_1^1 > \dots > i_1^j$. In plus, am notat

$$a_j(\gamma) := (\gamma_{i_1^j}, \dots, \gamma_{i_{l_j}^j}) \text{ si } D^{a_j(\gamma)}f(x) = D^{l_j}f(x; a_j(\gamma)) \in \Lambda^{l_j}(G_2).$$

Conditia b) din definitia unui grup pre-Lie impreuna cu regula lantului implica unicitatea derivatei $D^k f$. Notam cu $C^k(X_1, G_2)$ multimea functiilor $f : X_1 \to G_2$ de k ori continuu diferentiabile pe X_1 si

$$C^\infty(X_1, G_2) := \bigcap_{n \geq 1} C^n(X_1, G_2).$$

Axiomele diferentiabilitatii

In continuare prezentam o serie de axiome pe care va trebui sa le verificam cand definim o notiune de diferentiabilitate pe grupuri topologice in Teorema 1.4.2 de mai jos.

Fie Γ categoria grupurilor topologice. Vom formula axiomele pentru o notiune de diferentiabilitate pentru aplicatii intre obiectele categoriei Γ.

(1) Orice morfism continuu de grup $f : G \to H$ este de clasa C^k.

(2) Compunerea a doua functii de clasa C^k este de clasa C^k.

(3) Fie U deschis in G si $f : U \to H, g : U \to L$ de clasa C^k. Atunci aplicatia de la $U \to H \times L$ data prin $x \mapsto (f(x), g(x))$ este de clasa C^k.

(4) Functiile constante de la G la H sunt de clasa C^k.

(5) Operatiile algebrice privite ca aplicatii pe G sunt de clasa C^k.

(6) Exista o subcategorie $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$ pe care este cunoscuta o notiune de diferentiabilitate.

(7) Orice functie de clasa C^k este de clasa $C^j, j \leq k$. Orice functie diferentiabila este continua.

Teorema 1.4.2. *Notiunea de continuu diferentiabilitate pe categoria PLIEG a grupurilor pre-Lie indeplineste axiomele (1)-(7) de mai sus. Subcategoria din axioma (6) este categoria LIEG a grupurilor Lie.*

Demonstraţie. Pentru prima axioma fie $g : G_1 \to G_2$ un morfism continuu.

Pentru $x \in G_1, D^1 g(x;\gamma) = Dg(x;\gamma) = g \circ \gamma$ si $D^k g(x;\gamma) = 0, k \geq 2$.

Pentru orice $\varphi \in C^k(X_2, \mathcal{Y}), X_2 \subseteq G_2$ avem regula lantului

$$\begin{aligned} D^j(\varphi \circ g)(x;\gamma_1,\ldots,\gamma_j) &= D^j\varphi(g(x); g\circ\gamma_1,\ldots,g\circ\gamma_j) \\ &= D^j\varphi(g(x); Dg(x;\gamma_1),\ldots,Dg(x;\gamma_j)) \end{aligned}$$

pentru $j \leq k$, deci $g \in C^\infty(G_1, G_2)$.

Pentru axioma 2 trebuie sa aratam $f \circ g$ este clasa C^k pentru orice f, g de clasa C^k. Fie $\varphi \in C^k(X_2, \mathcal{Y})$ si $\gamma \in \Lambda(G)$. Avem $D(\varphi \circ f \circ g)(x;\gamma) = D\varphi(f(g(x)); Df(g(x); Dg(x;\gamma)))$ si $D(f \circ g)(x;\gamma) = Df(g(x); Dg(x;\gamma))$ si cu regula lantului rezulta ca $f \circ g$ este de clasa C^k.

Pentru axioma 3 consideram G, G_1, G_2 grupuri pre-Lie si U deschisa in G. Fie $f : U \to G_1$ si $g : U \to G_2$ functii de clasa C^k. Definim $\langle f, g\rangle : U \to G_1 \times G_2, \langle f, g\rangle(x) := (f(x), g(x)), x \in U$. Trebuie sa aratam ca $\langle f, g\rangle$ este de clasa C^k. In acest scop observam ca pentru x_1, x_2 doua puncte intr-o vecinatate a lui $x \in G$ si $\varphi \in C^k(X, \mathcal{Y})$, $(f(x), g(x)) \in X \subseteq G_1 \times G_2$ si pentru $\gamma_1, \gamma_2 \in \Lambda(G)$ avem

$$\begin{aligned}\varphi(f(x_1\gamma_1(t_1)), g(x_2\gamma_2(t_2))) =& \varphi(f(x_1), g(x_2)) \\ &+ t_1\partial^{Df(x_1,\gamma_1)}\varphi(f(x_1), g(x_2)) \\ &+ t_2\partial^{Dg(x_2,\gamma_2)}\varphi(f(x_1\gamma_1(t_1)), g(x_2)) \\ &+ r_1 + r_2.\end{aligned}$$

Daca $x_1 = x_2 = x, \gamma_1 = \gamma_2 = \gamma, t_1 = t_2 = t \in \mathbb{R}$ si trecand la limita cand $t \to 0$ obtinem

$$D(\varphi \circ \langle f, g\rangle)(x;\gamma) = D\varphi((f(x), g(x)), (Df(x;\gamma), Dg(x;\gamma)))$$

si de aici rezulta ca $D\langle f, g\rangle(x;\gamma) = \langle Df, Dg\rangle(x;\gamma)$. Prin inductie obtinem ca

$$D^j\langle f, g\rangle(x;\gamma_1, \ldots, \gamma_j) = \langle D^j f, D^j g\rangle(x;\gamma_1, \ldots, \gamma_j)$$

pentru $j \leq k$ de unde rezulta ca $\langle f, g\rangle$ este de clasa C^k.

Pentru axioma 4, daca f este o functie constanta atunci functia f este de k ori continuu diferentiabila si $D^k f = 0, k \geq 1$.

Pentru axioma 5 trebuie sa studiem aplicatiile

$$m : G \times G \to G, m(x, y) := xy \text{ si } \iota : G \to G, \iota(x) := x^{-1}.$$

Avem $D\iota(x;\gamma) = (-\gamma)^{x^{-1}}$ si

$$D^j\iota(x;\gamma_1, \ldots, \gamma_j) = [\ldots[(-\gamma_1)^{x^{-1}}, (-\gamma_2)^{x^{-1}}], \ldots, (-\gamma_j)^{x^{-1}}]$$

pentru $j \leq k$. Daca $\varphi \in C^k(X, \mathcal{Y}), j \leq k$ si $x^{-1} \in X$ avem (a se vedea demonstratia Propozitiei 2.3.9)

$$\begin{aligned}D^j(\varphi \circ \iota)(x;\gamma_1, \ldots, \gamma_j) &= D^j\varphi(x^{-1}; (-\gamma_j)^{x^{-1}}, \ldots, (-\gamma_1)^{x^{-1}}) \\ &= D^{(-\gamma_1)^{x^{-1}}} \ldots D^{(-\gamma_j)^{x^{-1}}}\varphi(x^{-1})\end{aligned}$$

de unde rezulta regula lantului si ca $\iota : G \to G$ este de clasa C^k.

Pentru functia $m : G \times G \to G$ avem

$$Dm((x,y);(\alpha,\beta)) = \alpha^y + \beta$$

si

$$D^j m((x,y);(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_j,\beta_j)) = [\ldots[\alpha_1^y,\beta_j],\ldots,\beta_2].$$

Pentru orice $\varphi \in C^k(X,\mathcal{Y}), j \leq k, xy \in X \subseteq G$ avem (Propozitia 3.2.3)

$$\begin{aligned} D^j(\varphi\circ m)((x,y);(\alpha_1,\beta_1),\ldots,(\alpha_j,\beta_j)) \\ &= \sum_{\ell=1}^{j} \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_\ell \\ i_{\ell+1}<\cdots<i_j}} D^j\varphi(xy;\beta_{i_1},\ldots,\beta_{i_l},\alpha^y_{i_{l+1}},\ldots,\alpha^y_{i_j}) \\ &= \sum_{\ell=1}^{j} \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_\ell \\ i_{\ell+1}<\cdots<i_j}} D^{\alpha^y_{i_j}}\ldots D^{\alpha^y_{i_{l+1}}} D^{\beta_{i_l}}\ldots D^{\beta_{i_1}}\varphi(xy) \end{aligned}$$

de unde rezulta regula lantului si ca m este de clasa C^k. Precizam ca suma de mai sus se mai face si dupa conditia suplimentara

$$\{i_1,\ldots,i_l\}\cup\{i_{l+1},\ldots,i_j\} = \{1,\ldots,j\}$$

Pentru $j \leq k$ orice functie de clasa C^k este clasa C^j direct din definitie si axioma 7 este valabila.

Pentru axioma 6 se ia categoria $\Gamma_0 = LIEG$ categoria grupurilor Lie. □

1.5 Note bibliografice

Notiunea de diferentiabilitate din Definitia 1.2.1 a fost introdusa in [BCR81]. Pentru Lema 1.1.3 a se vedea [BCR81, Lema 0.1.4.1, pag. 15–16]. Propozitia 1.2.3 si Teorema 1.4.2 apar de asemenea in [BCR81], dar cu demonstratii mai putin detaliate.

Propozitia 1.2.4 este un rezultat original (inclus in articolul nostru [BNi14a]), ce va fi generalizat in Propozitia5.2.2. Am considerat util sa-l prezentam aici in mod independent pentru functii cu valori scalare, vand in vedere caracterul introductiv al acestui capitol.

Capitolul 2

Algebre anvelopante pentru grupuri topologice

In acest capitol vom pune in evidenta avantajele uneia dintre principalele noutati cu caracter tehnic introduse in aceasta teza, si anume constructia unei topologii convenabile pe spatiul functiilor diferentiabile pe un grup topologic arbitrar cu valori intr-un spatiu local convex $\mathcal{Y}$. Mai concret, vom demonstra ca pentru orice grupuri topologice G si H este valabila legea exponentiala slaba pentru spatii de functii diferentiabile, si anume exista scufundarea canonica *algebrica si topologica*

$$C^\infty(H \times G, \mathcal{Y}) \hookrightarrow C^\infty(H, C^\infty(G, \mathcal{Y}))$$

(a se vedea Teorema 2.4.19 si Observatia 2.4.20 de mai jos). Pe baza acestui fapt, vom demonstra apoi ca pentru orice grup topologic G, convolutia cu distributii cu suport compact (adica functionale liniare continue in raport cu topologia mentionata anterior) lasa invariant spatiul functiilor diferentiabile $C^\infty(G)$ (Propozitia 2.5.1). Daca ne restrangem atentia doar la distributiile cu suportul in $1 \in G$, putem sa le identificam astfel cu operatorii liniari continui pe $C^\infty(G)$ care comuta cu translatiile la stanga si sunt locali, in sensul ca nu maresc suportul functiilor (Teorema 2.5.2). Reamintim ca teorema lui Peetre din [Pe60] stabileste ca operatorii locali pe varietati diferentiabile sunt exact operatorii diferentiali, nu neaparat de ordin finit. Daca G este un grup Lie finit dimensional, recuperam astfel corespondenta dintre distributiile cu suportul in $1 \in G$ si operatorii diferentiali invarianti la stanga pe G.

Mai facem observatia ca topologia pe care o introducem aici pe spatiul de functii $C^\infty(G, \mathcal{Y})$ coincide cu topologia convergentei uniforme pe compacti a functiilor si a derivatelor lor. Dar, spre deosebire de alte constructii de topologii pe spatii de functii test care apar in literatura, constructia noastra (Definition 2.3.1) nu are nevoie ca grupul G sa fie local compact.

Acest capitol este impartit in 5 sectiuni. In prima sectiune introducem unele notatii legate de diferentiabilitatea pe grupuri topologice. In Sectiunea 2.2 introducem multimea operatorilor locali $\mathrm{Loc}\,(G)$ si multimea operatorilor locali invarianti la stanga $\mathcal{U}(G)$. Apoi se prezinta relatii intre $\mathcal{U}(G)$ si submultimea sa notata $\mathcal{U}_0(G)$ cand grupul G este grup Lie finit dimensional sau local compact. In sectiunea 2.3 introducem pe $C^\infty(G)$ o topologie de spatiu local convex si spatiul obtinut va fi notat cu $\mathcal{E}(G)$. Vom nota cu $\mathcal{E}'(G)$ dualul topologic al lui $\mathcal{E}(G)$ si elementele sale vor fi numite distributii cu suport compact. Definim suportul unei distributii si precizam ca este compact. Introducem aplicatia $\check{f}$ si distributia $\check{u}$ si prezentam cateva proprietati ale acestora. In Sectiunea 2.3 introducem convolutia dintre o functie si o distributie, in Sectiunea 2.4 demonstram legea exponentiala mentionata anterior, iar in Sectiunea 2.5 vom aplica aceasta lege exponentiala in studiul structurii operatorilor locali invarianti pe un grup topologic.

2.1 Preliminarii

Fie G un grup topologic cu multimea vecinatatilor lui $1 \in G$ notata cu $\mathcal{V}_G(1)$. Reamintim din Capitolul 1 multimea

$$\Lambda(G) = \{\gamma : \mathbb{R} \to G \text{ cont.} \mid (\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad \gamma(s+t) = \gamma(s)\gamma(t)\}$$

inzestrata cu topologia uniform convergentei pe submultimile compacte din $\mathbb{R}$.

Pentru $x \in G$ si $\gamma \in \Lambda(G)$ am notat $\gamma^x : \mathbb{R} \to G, \quad \gamma^x(t) := x^{-1}\gamma(t)x$.

Notatia 2.1.1. Vom utiliza notatia

$$D^\lambda_\gamma \varphi := ((D^\lambda)^n \varphi)(\,\cdot\,; \gamma_1, \dots, \gamma_n)$$

unde $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \Lambda^n(G)$ si $\varphi \in C^n(G, F)$.

2.2 Algebra operatorilor locali

Definitia 2.2.1. Fie G un grup topologic. Un *operator local* pe G este un operator liniar $D : C^\infty(G) \to C^\infty(G)$ cu proprietatea

$$(\forall f \in C^\infty(G)) \qquad \mathrm{supp}(Df) \subseteq \mathrm{supp}(f)$$

Vom nota cu $\mathrm{Loc}(G)$ multimea operatorilor locali pe G.

Este usor de vazut ca $\mathrm{Loc}(G)$ este o algebra asociativa unitara de operatori liniari pe $C^\infty(G)$.

Observatia 2.2.2. Din [Pe60] rezulta ca daca G este un grup Lie finit dimensional, atunci $\mathrm{Loc}\,(G)$ este multimea operatorilor liniari diferentiali(posibil de ordin infinit) pe G. O generalizare a acestui fapt pe grupuri local compacte a fost obtinuta in [Ak95]. Vezi si [WD73] si [LW11] pentru o generalizare a situatiei cand $G = (X, +)$ pentru un spatiu Banach X.

Definitia 2.2.3. Fie G un grup topologic si definim

$$(\forall x \in G)\ L_x : G \to G, L_x(y) := xy$$

Operatorii locali invarianti la stanga sunt elementele multimii

$$\mathcal{U}(G) = \{D \in \mathrm{Loc}\,(G) \mid (\forall x \in G)(\forall f \in C^\infty(G)) \quad D(f \circ L_x) = (Df) \circ L_x\}.$$

Este usor de vazut ca $\mathcal{U}(G)$ este o subalgebra asociativa unitara a lui $\mathrm{Loc}\,(G)$. Pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ avem $D^\lambda_\gamma \in \mathcal{U}(G)$. Notam cu $\mathcal{U}_0(G)$ subalgebra asociativa unitara a lui $\mathcal{U}(G)$ generata de familia $\{D^\lambda_\gamma \mid \gamma \in \Lambda(G)\}$.

Problema 2.2.4. Pentru orice grup topologic G avem incluziunea

$$\mathcal{U}_0(G) \subseteq \mathcal{U}(G) \subseteq \mathrm{Loc}\,(G).$$

Sa se determine conditii necesare sau suficiente asupra lui G ca sa avem $\mathcal{U}_0(G) = \mathcal{U}(G)$.

Observatia 2.2.5. Daca G este un grup Lie finit dimensional, egalitatea $\mathcal{U}_0(G) = \mathcal{U}(G)$ rezulta din teorema Poincare-Birkhoff-Witt (a se vedea si Observatia 2.2.2). Un rezultat de acest tip a fost obtinut in [Ak95] in cazul cand G este un grup local compact.

2.3 Distributii cu suport compact

Spatiul functiilor test pe grupuri topologice

In prima parte a definitiei urmatoare reamintim seminormele p_{K_1,K_2} introduse inainte de Propozitia 1.2.4.

Definitia 2.3.1. Fie G un grup topologic, o multime deschisa $V \subseteq G$, si un spatiu local convex $\mathcal{Y}$. Pentru orice $n \geq 1$, reamintim notatia

$$\Lambda^n(G) := \underbrace{\Lambda(G) \times \cdots \times \Lambda(G)}_{n \text{ ori}}.$$

Pentru orice seminorma continua $|\cdot|$ pe $\mathcal{Y}$ si orice submultimi compacte $K_2 \subseteq G$ si $K_1 \subseteq \Lambda^n(G)$ definim seminorma

$$p^{|\cdot|}_{K_1,K_2} : C^\infty(G) \to [0,\infty), \quad p^{|\cdot|}_{K_1,K_2}(f) \ := \sup\{|(D^\lambda_\gamma f)(x)|, \gamma \in K_1, x \in K_2\}.$$

Mai definim $p^{|\cdot|}_{K_1,K_2}(f) := \sup\{|f(x)|, x \in K_2\}$ pentru $K_2 \subseteq G$ compacta si $K_1 = \emptyset$. Pentru simplitate vom omite seminorma $|\cdot|$ pe $\mathcal{Y}$ din notatia de mai sus, scriind simplu p_{K_1,K_2} in loc de $p^{|\cdot|}_{K_1,K_2}$. Vom nota cu $\mathcal{E}(V,\mathcal{Y})$ spatiul de functii $C^\infty(V,\mathcal{Y})$ inzestrat cu topologia local convexa definita de familia tuturor acestor seminorme p_{K_1,K_2}.

In particular, pentru $\mathcal{Y} = \mathbb{C}$, inzestram spatiul $C^\infty(G)$ cu topologia local convexa definita de familia de seminorme p_{K_1,K_2} si spatiul local convex obtinut va fi notat cu $\mathcal{E}(G)$. Notam cu $\mathcal{E}'(G)$ dualul topologic al lui $\mathcal{E}(G)$ inzestrat cu topologia duala tare. Avem

$$\mathcal{E}'(G) := \{u : \mathcal{E}(G) \to \mathbb{C} \mid u \text{ este liniara si continua}\}$$

ca spatiu liniar si acest spatiu de functionale liniare este inzestrat cu topologia local convexa definita de familia de seminorme $\{q_B \mid B \textit{ marginita in } \mathcal{E}(G)\}$ unde

$$q_B : \mathcal{E}'(G) \to \mathbb{C}, \quad q_B(f) := \sup\{|u(f)|, f \in B\}.$$

Elementele lui $\mathcal{E}'(G)$ vor fi numite *distributii cu suport compact.*

Problema 2.3.2. Sa se determine conditii asupra lui G care sa asigure ca orice submultime inchisa si marginita in $\mathcal{E}(G)$ este compacta. Reamintim din [Eh56] ca aceasta problema are un raspuns afirmativ daca G este un grup Lie finit dimensional.

Definitia 2.3.3. In conditiile din Definitia 2.3.1, *suportul unei distributii* $u \in \mathcal{E}'(G)$ este definit prin

$$\mathrm{supp}\,(u) := \{x \in G \mid (\forall U \in \mathcal{V}(x))(\exists f \in \mathcal{E}(G)) \quad \mathrm{supp}\,(f) \subseteq U \text{ si } u(f) \neq 0\}.$$

Avem $x \notin \mathrm{supp}\,(u)$ daca exista $U \in \mathcal{V}(x)$ astfel incat $(\forall) f \in \mathcal{E}(G)$ cu $\mathrm{supp}\,(f) \subseteq U$ avem $u(f) = 0$.

Pentru orice $u \in \mathcal{E}'(G)$, folosind continuitatea sa in raport cu topologia lui $\mathcal{E}(G)$ introdusa in Definitia 2.3.1, rezulta ca exista o constanta pozitiva $C > 0$, un intreg $k \geq 1$, si submultimile compacte $K_1 \subseteq \Lambda^k(G)$ si $K_2 \subseteq G$ pentru care

$$(\forall f \in \mathcal{E}(G)) \quad |u(f)| \leq C p_{K_1,K_2}(f).$$

Aceasta implica $\operatorname{supp} u \subseteq K_2$, deci multimea $\operatorname{supp} u$ este compacta in G.

Observatia 2.3.4. Se arata usor ca $(\forall) u \in \mathcal{E}'(G), \operatorname{supp}(u)$ este compact in G si aceasta motiveaza terminologia introdusa in Definitia 2.3.1.

Pentru orice compact $K \subseteq G$ notam

$$\mathcal{E}'_K(G) := \{u \in \mathcal{E}'(G) \mid \operatorname{supp}(u) \subseteq K\}.$$

Pentru $K = \{1\}$ notam $\mathcal{E}'_1(G) := \mathcal{E}'_K(G)$.

Convolutii

Definitia 2.3.5. Fie G un grup topologic. Pentru orice $f \in \mathcal{E}(G)$ definim $\check{f} \in \mathcal{E}(G)$ prin

$$(\forall x \in G) \quad \check{f}(x) := f(x^{-1}).$$

Pentru orice $u \in \mathcal{E}'(G)$ definim $\check{u} \in \mathcal{E}'(G)$ prin

$$(\forall f \in \mathcal{E}(G)) \quad \check{u}(f) := u(\check{f}).$$

Pentru orice $f \in \mathcal{E}(G)$ si $u \in \mathcal{E}'(G)$ definim *convolutia* lor ca fiind functia

$$f * u : G \to \mathbb{C}, \quad (f * u)(x) := \check{u}(f \circ L_x).$$

Definitia de mai sus este in mod clar corecta pentru grupuri Lie, in sensul ca $\check{f}, f \circ L_x \in \mathcal{E}(G)$ pentru orice $x \in G$ si $f \in \mathcal{E}(G)$, daca G este un grup Lie (a se vedea si [Eh56]). Vom arata in Propozitiile 2.3.9 si 2.3.7 ca definitia aceasta este de fapt corecta pentru grupuri topologice generale.

Observatia 2.3.6. Daca $f \in C^1(G), x, g \in G$ si $\gamma \in \Lambda(G)$ atunci

$$(D^\lambda_\gamma(f \circ L_x))(g) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(xg\gamma(t)) = (D^\lambda_\gamma f)(xg).$$

In plus $D^\lambda_\gamma(f \circ L_x) = (D^\lambda_\gamma f) \circ L_x$.

Propozitia 2.3.7. *Fie G un grup topologic. Daca $f \in \mathcal{E}(G)$ si $x \in G$, atunci $f \circ L_x \in \mathcal{E}(G)$.*

Demonstraţie. Pentru $n \geq 1$ avem homeomorfismul

$$F_n^x : G \times \Lambda^n(G) \to G \times \Lambda^n(G), F_n^x(g; \gamma_1, \ldots, \gamma_n) := (xg; \gamma_1, \ldots, \gamma_n).$$

Rezulta usor din Observatia 2.3.6 ca

$$(D^\lambda)^n (f \circ L_x) = ((D^\lambda)^n f) \circ F_n^x$$

deci $(D^\lambda)^n (f \circ L_x)$ este continua. Cum $n \geq 1$ este arbitrar, obtinem ca $f \circ L_x \in \mathcal{E}(G)$ si demonstratia se incheie. □

Observatia 2.3.8. Daca $f \in C^1(G), x \in G, \gamma \in \Lambda(G)$ atunci

$$\begin{aligned}(D_\gamma^\lambda \check{f})(x) &= \frac{d}{dt}|_{t=0} \check{f}(x\gamma(t)) = \frac{d}{dt}|_{t=0} f(\gamma(-t)x^{-1}) = -\frac{d}{ds}|_{s=0} f(\gamma(s)x^{-1}) \\ &= -\frac{d}{ds}|_{s=0} f(x^{-1}\gamma^{x^{-1}}(s)) = -(D_{\gamma^{x^{-1}}}^\lambda f)(x^{-1}).\end{aligned}$$

Propozitia 2.3.9. *Fie G un grup topologic, atunci pentru orice $f \in \mathcal{E}(G)$ avem $\check{f} \in \mathcal{E}(G)$. In plus aplicatia $\mathcal{E}(G) \to \mathcal{E}(G)$, $f \mapsto \check{f}$, este un izomorfism de spatii local convexe.*

Demonstraţie. Aplicatia liniara $f \mapsto \check{f}$ este inversabila si este egala cu propria ei inversa, deci este suficient sa aratam ca este continua. In acest scop, pentru $n \geq 1$ definim $\Psi_n : G \times \Lambda^n(G) \to G \times \Lambda^n(G)$,

$$\Psi_n(x; \gamma_1, \ldots, \gamma_n) := (x^{-1}; \gamma_n^{x^{-1}}, \ldots, \gamma_1^{x^{-1}}).$$

Din Lema 1.1.3 rezulta ca Ψ_n este un homeomorfism. In plus similar cu Observatia 2.3.8 pentru orice $f \in C^n(G)$ avem

$$(D^\lambda)^n \check{f} = (-1)^n ((D^\lambda)^n f) \circ \Psi_n \tag{2.3.1}$$

deci $\check{f} \in C^n(G)$. Cum $n \geq 1$ este arbitrar, obtinem ca $\check{f} \in \mathcal{E}(G)$.

Fie $n \geq 1$ si multimile compacte $K_2 \subseteq G$ si $K_1 \subseteq \Lambda^n(G)$. Definim

$$K_1' := \{(\gamma_n^{x^{-1}}, \ldots, \gamma_1^{x^{-1}}) \mid x \in K_2, (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in K_1\}$$

si

$$K_2' := \{x^{-1}, x \in K_2\}.$$

Din Lema 1.1.3. rezulta ca K_1' si K_2' sunt compacte. Din relatia (2.3.1) avem ca $p_{K_1,K_2}(\check{f}) \leq p_{K_1',K_2'}(f)$ valabila si cand $K_1 = K_1' = \emptyset$. Deci aplicatia $f \mapsto \check{f}$ de la $\mathcal{E}(G)$ la $\mathcal{E}(G)$ este liniara si continua. □

2.4 Legea exponentiala pentru functii netede pe grupuri topologice

Rezultatul principal al acestei sectiuni este Teorema 2.4.19, care este o lege exponentiala pentru spatii de functii diferentiabile pe grupuri topologice. A se vedea de exemplu [KM97, Ch. I, §3] pentru o discutie aprofundata a legilor exponentiale pentru functii diferentiabile pe submultimi deschise in spatii local convexe.

Notatia 2.4.1. Fie G si H grupuri topologice arbitrare. Pentru orice spatiu local convex $\mathcal{Y}$ si orice functie $\varphi \in C^\infty(G \times H, \mathcal{Y})$ definim

$$\widetilde{\varphi}\colon G \to C^\infty(H, \mathcal{Y}), \quad \widetilde{\varphi}(x)(y) = \varphi(x, y).$$

Aceasta notatie va fi pastrata pe tot parcursul acestei sectiuni.

Cateva formule de baza pentru derivate partiale

Incepem cu o definitie a carei corectitudine rezulta din Lema 2.4.4 de mai jos.

Definitia 2.4.2. Fie $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$. Pentru $n \geq 1$ definim derivatele partiale $(D_1^\lambda)^n\varphi\colon H \times G \times \Lambda^n(H) \to \mathcal{Y}$ si $(D_2^\lambda)^n\varphi\colon H \times G \times \Lambda^n(G) \to \mathcal{Y}$ astfel:

Pentru $n = 1$, $\beta \in \Lambda(H)$, $\alpha \in \Lambda(G)$,

$$\begin{aligned}(D_1^\lambda\varphi)(x, g; \beta) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\varphi(x\beta(t), g),\\ (D_2^\lambda\varphi)(x, g; \alpha) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}\varphi(x, g\alpha(t)).\end{aligned}$$

Mai departe, definim inductiv

$$\begin{aligned}&((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x, g; \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})\\ &\qquad\qquad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}((D_1^\lambda)^n\varphi)(x\beta_{n+1}(t), g; \beta_1, \dots, \beta_n)\\ &((D_2^\lambda)^{n+1}\varphi)(x, g; \alpha_1, \dots, \alpha_n, \alpha_{n+1})\\ &\qquad\qquad = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}((D_2^\lambda)^n\varphi)(x, g\alpha_{n+1}(t); \alpha_1, \dots, \alpha_n).\end{aligned}$$

Notatia 2.4.3. Prin $1 \in \Lambda(G)$ notam functia constanta, definita de la $\mathbb{R}$ la G prin $1(t) = 1 \in G$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

Lema urmatoare asigura existenta si continuitatea aplicatiilor $(D_1^\lambda)^n\varphi$ si $(D_2^\lambda)^n\varphi$ din Definitia 2.4.2.

Lema 2.4.4. *Daca $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$, atunci pentru orice $x \in H$, $g \in G$, $n \geq 1$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Lambda(H)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda(G)$, avem:*

(a) $((D_1^\lambda)^n \varphi)(x, g; \beta_1, \dots, \beta_n) = ((D^\lambda)^n \varphi)(x, g; (\beta_1, 1), (\beta_2, 1), \dots, (\beta_n, 1))$

(b) $((D_2^\lambda)^n \varphi)(x, g; \alpha_1, \dots, \alpha_n) = ((D^\lambda)^n \varphi)(x, g; (1, \alpha_1), (1, \alpha_2), \dots, (1, \alpha_n))$

(c) Aplicatiile $(D_1^\lambda)^n \varphi \colon H \times G \times \Lambda^n(H) \to \mathcal{Y}$ si $(D_2^\lambda)^n \varphi \colon H \times G \times \Lambda^n(G) \to \mathcal{Y}$ sunt continue.

Demonstraţie. Afirmatiile (a) si (b) rezulta imediat, iar (c) se obtine din (a) si (b), pe baza ipotezei $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$. □

Propozitia 2.4.5. *Pentru orice $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$, $n \geq 1$, si $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Lambda(H)$, avem*

$$\begin{aligned}((D^\lambda)^n \widetilde{\varphi})(x; \beta_1, \dots, \beta_n)(g) &= ((D_1^\lambda)^n \varphi)(x, g; \beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= ((D^\lambda)^n \varphi)(x, g; (\beta_1, 1), (\beta_2, 1), \dots, (\beta_n, 1)).\end{aligned}$$

Demonstraţie. Ultima egalitate rezulta din Lema 2.4.4(a). Prima egalitate va fi demonstrata prin inductie dupa n.

Cazul$n = 1$: Pentru $x \in H$, $g \in G$ si $\beta \in \Lambda(H)$ avem

$$(D^\lambda \widetilde{\varphi})(x; \beta)(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \widetilde{\varphi}(x\beta(t))(g) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \varphi(x\beta(t), g) = (D_1^\lambda \varphi)(x, g; \beta).$$

Sa presupunem acum ca afirmatia a fost demonstrata deja pentru n. Pentru $n+1$ avem

$$\begin{aligned}((D^\lambda)^{n+1} \widetilde{\varphi})(x; \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})(g) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} ((D^\lambda)^n \widetilde{\varphi})(x\beta_{n+1}(t); \beta_1, \dots, \beta_n)(g) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} ((D_1^\lambda)^n \varphi)(x\beta_{n+1}(t), g; \beta_1, \dots, \beta_n) \\ &= ((D_1^\lambda)^{n+1} \varphi)(x, g; \beta_1, \dots, \beta_n, \beta_{n+1})\end{aligned}$$

si demonstratia se incheie. □

Observatia 2.4.6. Formula din Propozitia 2.4.5 ne da valorile punctuale ale derivatelor functiei $\widetilde{\varphi}$ introduse in Notatia 2.4.1. Mai trebuie sa verificam ca rapoartele diferentiale (din defnitia drivatelor) converg catre aceste valori in topologia lui $\mathcal{E}(G, \mathcal{Y})$. Acest obiectiv va fi atins in Propozitia 2.4.17.

Lema 2.4.7. *Daca $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$, atunci pentru orice $x \in H$, $g \in G$, $n \geq 1$, si $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Lambda(G)$ avem*

$$\begin{aligned}((D^\lambda)^n (\widetilde{\varphi}(x)))(g; \alpha_1, \dots, \alpha_n) &= ((D_2^\lambda)^n \varphi)(x, g; \alpha_1, \dots, \alpha_n) \\ &= ((D^\lambda)^n \varphi)(x, g; (1, \alpha_1), (1, \alpha_2), \dots, (1, \alpha_n)).\end{aligned}$$

Demonstrație. Demonstratia este similara cu cea a Propozitiei 2.4.5. □

Observatia 2.4.8. Din Lema 2.4.7 si Lemma 2.4.4(c) rezulta ca daca $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$, atunci pentru orice $x \in G$ avem $\widetilde{\varphi}(x) := \varphi(x, \cdot) \in C^\infty(G, \mathcal{Y})$, deci functia $\widetilde{\varphi}\colon H \to \mathcal{E}(G, \mathcal{Y})$ (a se vedea Notation 2.4.1) este bine definita.

Continuitatea functiei $\widetilde{\varphi}$

Lema 2.4.9. *Fie X si T spatii topologice, $\mathcal{Y}$ un spatiu local convex, iar $f : X \times T \to \mathcal{Y}$ o functie continua. Fixam un punct arbitrar $x_0 \in X$ si o multime compacta $K \subseteq T$. Atunci pentru orice seminorma continua $|\cdot|$ pe $\mathcal{Y}$ avem*

$$\lim_{x \to x_0} \sup_{t \in K} |f(x, t) - f(x_0, t)| = 0. \tag{2.4.1}$$

Demonstrație. Acest rezultat este legat de legea exponentiala pentru functii continue $\mathcal{C}(X \times T, \mathcal{Y}) \simeq \mathcal{C}(X, \mathcal{C}(T, \mathcal{Y}))$; a se vedea de exemplu Lema 3.2.4. □

Propozitia 2.4.10. *Daca $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$, atunci functia $\widetilde{\varphi}\colon H \to \mathcal{E}(G, \mathcal{Y})$ (a se vedea Notatia 2.4.1) este continua.*

Demonstrație. Vom arata ca pentru fiecare dintre seminormele $p = p_{K_1,K_2}$ pe $\mathcal{E}(G, \mathcal{Y})$ introduse in Definitia 2.3.1 avem $\lim\limits_{x \to x_0} p(\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(x_0)) = 0$, ceea ce este echivalent cu urmatoarea conditie:

$$(\forall x_0 \in H)(\forall \varepsilon > 0)(\exists U \in \mathcal{V}(x_0))(\forall x \in U) \quad p(\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(x_0)) \le \varepsilon.$$

Conform cu multimile compact K_1 si K_2 ce intervin in definitia seminormei p, vom analiza separat cele doua cazuri care pot sa apara. Fie $x_0 \in H$ si $\varepsilon > 0$ arbitrare, fixate pe parcursul intregii demonstratii.

Cazul (a): $p = p_{K_1,K_2}$, unde $K_2 \subseteq G$ este o multime compacta arbitrara, iar $K_1 = \emptyset$. daca notam $E(x) := p(\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(x_0))$, atunci

$$E(x) = \sup_{g \in K_2} |\widetilde{\varphi}(x)(g) - \widetilde{\varphi}(x_0)(g)| = \sup_{g \in K_2} |\varphi(x, g) - \varphi(x_0, g)|$$

deci concluzia se obtine imediat prin aplicarea Lemei 2.4.9 cu $x_0 \in X = H$, $T = G$, $K = K_2$ si $f = \varphi\colon H \times G \to \mathcal{Y}$, care este o functie continua deoarece $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$. Aceasta completeaza demonstratia in Cazul (a).

Cazul (b) $p = p_{K_1,K_2}$, pentru multmi compacte arbitrare $K_2 \subseteq G$ si $K_1 \subseteq \Lambda^n(G)$, unde $n \ge 1$.

Sa notam din nou $E(x) := p(\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(x_0))$. In acest caz avem

$$\begin{aligned} E(x) &= \sup\{|((D^\lambda)^n(\widetilde{\varphi}(x) - \widetilde{\varphi}(x_0)))(g;\gamma)| \mid g \in K_2, \gamma \in K_1\} \\ &= \sup\{|((D^\lambda)^n(\widetilde{\varphi}(x)))(g;\gamma) - ((D^\lambda)^n(\widetilde{\varphi}(x_0)))(g;\gamma)| \mid g \in K_2, \gamma \in K_1\}. \end{aligned}$$

Pe baza Lemei 2.4.7 obtinem

$$E(x) = \sup\{|((D_2^\lambda)^n\varphi)(x,g;\gamma) - ((D_2^\lambda)^n\varphi)(x_0,g;\gamma)| \mid g \in K_2, \gamma \in K_1\}$$

deci concluzia se obtine imediat prin aplicarea Lemei 2.4.9 cu $x_0 \in X = H$, $T = G\times\Lambda^n(G)$, si multimea compacta $K = K_2\times K_1 \subseteq T$, deoarece fuunctia $f = (D_2^\lambda)^n\varphi\colon H\times G \times \Lambda^n(G) \to \mathcal{Y}$ este continua pe baza Lemei 2.4.4(c).

Aceasta completeaza demonstratia. □

Diferentiabilitatea functiei $\widetilde{\varphi}$

Definitia 2.4.11. Fie G un grup topologic. Spunem ca $\alpha,\beta \in \Lambda(G)$ *comuta* daca

$$(\forall s,t \in \mathbb{R}) \quad \alpha(t)\beta(s) = \beta(s)\alpha(t).$$

Observatia 2.4.12. Daca G si H sunt grupuri topologice arbitrare, atunci orice $\alpha \in \Lambda(G)$ comuta cu $1 \in \Lambda(G)$, iar pentru orice $\alpha \in \Lambda(G)$ si $\beta \in \Lambda(H)$ elementele $(1,\alpha)$ si $(\beta,1)$ din $\Lambda(H\times G)$ comuta intre ele.

Lema 2.4.13. *Fie H un grup topologic arbitrar, $n \geq 2$, si $\gamma_1,\dots,\gamma_n \in \Lambda(H)$. Sa presupunem ca γ_i comuta cu γ_{i+1} pentru un anumit indice $i \in \{1,2,\dots,n-1\}$. Atunci pentru orice $f \in \mathcal{C}^n(H,\mathcal{Y})$ si $x \in H$ avem*

$$\begin{aligned} &((D^\lambda)^n f)(x;\gamma_n,\dots,\gamma_{i+2},\gamma_{i+1},\gamma_i,\gamma_{i-1},\dots,\gamma_1) \\ &\qquad = ((D^\lambda)^n f)(x;\gamma_n,\dots,\gamma_{i+2},\gamma_i,\gamma_{i+1},\gamma_{i-1},\dots,\gamma_1). \end{aligned}$$

Demonstrație. Functia

$$(t_1,\dots,t_n) \mapsto f(x\gamma_1(t_1)\gamma_2(t_2)\cdots\gamma_n(t_n))$$

apartine spatiului $\mathcal{C}^n(\mathbb{R}^n,\mathcal{Y})$, pe baza [BCR81, Prop. 1.2.2.1]. De aceea obtinem

$$\begin{aligned} &((D^\lambda)^n f)(x;\gamma_n,\dots,\gamma_{i+2},\gamma_{i+1},\gamma_i,\gamma_{i-1},\dots,\gamma_1) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t_1\cdots\partial t_{i-1}\partial t_i\partial t_{i+1}\partial t_{i+2}\dots\partial t_n}\Big|_{t_1=\dots=t_n=0} f(x\gamma_1(t_1)\cdots\gamma_n(t_n)) \\ &= \frac{\partial^n}{\partial t_1\cdots\partial t_{i-1}\partial t_{i+1}\partial t_i\partial t_{i+2}\cdots\partial t_n}\Big|_{t_1=\dots=t_n=0} f(x\gamma_1(t_1)\cdots\gamma_n(t_n)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{\partial^n}{\partial t_1 \cdots \partial t_{i-1}\partial t_{i+1}\partial t_i \partial t_{i+2}\cdots \partial t_n}\Big|_{t_1=\cdots=t_n=0} \\
&f(x\gamma_1(t_1)\cdots\gamma_{i-1}(t_{i-1})\gamma_{i+1}(t_{i+1})\gamma_i(t_i)\gamma_{i+2}(t_{i+2})\cdots\gamma_n(t_n)) \\
=&((D^\lambda)^n f)(x;\gamma_n,\dots,\gamma_{i+2},\gamma_i,\gamma_{i+1},\gamma_{i-1},\dots,\gamma_1)
\end{aligned}
$$

ceea ce este tocmai relatia ceruta. □

Lema 2.4.14. *Fie G si H grupuri topologice si $\varphi \in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$. Pentru $s\geq 1$ fixat, fie $\alpha_1,\dots,\alpha_s \in \Lambda(G)$. Atunci urmatoarele afirmatii sunt valabile pentru orice $x\in H$ si $g\in G$:*

(a) Pentru orice $\beta\in\Lambda(H)$ avem

$$
\begin{aligned}
&((D^\lambda)^{s+1}\varphi)(x,g;(\beta,1),(1,\alpha_1),\dots,(1,\alpha_s)) \\
&\quad = ((D^\lambda)^{s+1}\varphi)(x,g;(1,\alpha_1),\dots,(1,\alpha_s),(\beta,1)).
\end{aligned}
$$

(b) Pentru orice $n\geq 1$ si $\beta_1,\dots,\beta_n,\beta_{n+1}\in\Lambda(H)$ avem

$$
\begin{aligned}
&((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x,g;(\beta_1,1),\dots,(\beta_n,1),(\beta_{n+1},1),(1,\alpha_1),\dots,(1,\alpha_s)) \\
&\quad = ((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x,g;(\beta_1,1),\dots,(\beta_n,1),(1,\alpha_1),\dots,(1,\alpha_s),(\beta_{n+1},1)).
\end{aligned}
$$

Demonstraţie. Pentru fiecare dintre aceste afirmatii se poate porni din membrul drept al egalitatii care trebuie demonstrata, si se utilizeaza Observatia 2.4.12 si Lema 2.4.13 cu H inlocuit prin $H\times G$ pentru perechile $(1,\alpha_i)$ si $(\beta_{n+1},1)$. Astfel se obtie ordinea argumentelor din membrul stang al fiecareia dintre egalitatile din enunt. □

Lema 2.4.15. *Fie X un spatiu topologic, $\mathcal{Y}$ un spatiu local convex, $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, si o functie continua $f\colon X\times[a,b]\to\mathcal{Y}$ cu proprietatea ca pentru orice $x\in X$ exista integrala slaba $h(x)=\int\limits_a^b f(x,t)\mathrm{d}t$. Atunci functia astfel obtinuta $h\colon X\to\mathcal{Y}$ este continua.*

Demonstraţie. Pentru a demonstra ca functia h este continua, fie $|\cdot|$ o seminorma continua pe $\mathcal{Y}$ arbitrara. Din [Gl02a, Lema 1.7] rezulta ca avem

$$
(\forall x,y\in X)\quad |h(x)-h(y)|\leq (b-a)\sup_{t\in[a,b]}|f(x,t)-f(y,t)|
$$

deci pe baza Lemei 2.4.9 se vede usor ca functia $h\colon X\to\mathcal{Y}$ este continua. □

Lema 2.4.16. *Fie H un grup topologic si $h\in\mathcal{C}(H,\mathcal{Y})$. Daca $X\in\Lambda(H)$ si derivata $D^\lambda_X h\colon H\to\mathcal{Y}$ exista si este continua, atunci exista o functie continua $\chi\colon\mathbb{R}\times H\to\mathcal{Y}$ care pentru orice $g\in H$ indeplineste conditiile*

$$
(\forall t\in\mathbb{R})\quad h(gX(t))=h(g)+t(D^\lambda_X h)(g)+t\chi(t,g)
$$

si $\chi(0,g)=0$.

Demonstraţie. Aceasta rezulta din [NS12, Lema 2.5]; a se vedea si [BB11, Prop. 2.3]. $\square$

Acum suntem in masura sa rezolvam problema mentionata in Observatia 2.4.6.

Propozitia 2.4.17. *Fie G si H grupuri topologice, $\mathcal{Y}$ un spatiu local convex, si pentru o functie oarecare $\varphi\in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$ sa definim ca mai sus $\widetilde{\varphi}\colon H\to\mathcal{E}(G,\mathcal{Y})$, $\widetilde{\varphi}(x)(g)=\varphi(x,g)$. Atunc pentru orice $x_0\in G$ si $\beta_1^0,\dots,\beta_{n+1}^0\in\Lambda(H)$ avem*

$$\lim_{t\to 0}\frac{((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x_0\beta_{n+1}^0(t);\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)-((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x_0;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)}{t}$$
$$=((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x_0,\bullet;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0,\beta_{n+1}^0)$$

in topologia lui $\mathcal{E}(G,\mathcal{Y})$ din Definitia 2.3.1.

Demonstraţie. Definim $h\colon\mathbb{R}\to\mathcal{E}(G,\mathcal{Y})$ prin

$$h(t)=\begin{cases}\frac{((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x_0\beta_{n+1}^0(t);\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)-((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x_0;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)}{t} & \text{daca } t\neq 0,\\ ((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x_0,\bullet;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0,\beta_{n+1}^0) & \text{daca } t=0.\end{cases}$$

Trebuie sa demonstram ca $\lim\limits_{t\to 0}h(t)=h(0)$ in $\mathcal{E}(G,\mathcal{Y})$, deci ca pentru orice seminorma $p=p_{K_1,K_2}$ (a se vedea Definitia 2.3.1) avem $\lim\limits_{t\to 0}p(h(t)-h(0))=0$.

In raport cu seminorma p, distingem doua cazuri care pot sa apara.

Cazul 1: $p=p_{K_1,K_2}$ pentru o multime compacta arbitrara $K_2\subseteq G$ si $K_1=\emptyset$.

Notam $E(t)=p(h(t)-h(0))$ si atunci avem

$$\begin{aligned}E(t)&=\sup\{|h(t)(g)-h(0)(g)|\mid g\in K_2\}\\ &=\sup\{|\frac{((D_1^\lambda)^n\varphi)(x_0\beta_{n+1}^0(t),g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)-((D_1^\lambda)^n\varphi)(x_0,g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)}{t}\\ &\quad-((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x_0,g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0,\beta_{n+1}^0)|\mid g\in K_2\}\\ &=\sup\{|F(t,g)-F(0,g)|\mid g\in K_2\}\end{aligned}$$

unde $F\colon\mathbb{R}\times G\to\mathcal{Y}$ este definita prin

$$F(t,g)=\begin{cases}\frac{((D_1^\lambda)^n\varphi)(x_0\beta_{n+1}^0(t),g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)-((D_1^\lambda)^n\varphi)(x_0,g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)}{t} & \text{daca } t\neq 0,\\ ((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x_0,g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0,\beta_{n+1}^0) & \text{daca } t=0.\end{cases}$$

Proprietatea dorita $\lim_{t\to 0} E(t) = 0$ va rezulta printr-o aplicare a Lemei 2.4.9 pentru $X = \mathbb{R}$, $T = G$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$, $K = K_2 \subseteq G$ si $f = F\colon \mathbb{R}\times G \to \mathcal{Y}$, de indata ce vom fi verificat ca functia F este continua.

In acest scop, sa observam mai intai ca pentru orice $g \in G$ avem

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} F(t,g) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}((D_1^\lambda)^n\varphi)(x_0\beta_{n+1}^0(t), g; \beta_1^0,\dots,\beta_n^0)\\ &= ((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x_0, g; \beta_1^0,\dots,\beta_n^0,\beta_{n+1}^0) = F(0,g).\end{aligned}$$

Mai departe vom arata ca Lema 2.4.16 poate fi alicata cu H inlocuit prin $H\times G$, $(x_0,g)\in H\times G$, $X = (\beta_{n+1}^0, 1)\in \Lambda(H\times G)$, si $f\colon H\times G \to \mathcal{Y}$, $f(x,y) = ((D_1^\lambda)^n\varphi)(x,y;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)$, care este o functie continua deoarece $\varphi \in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$. Sa observam ca derivata $D_X^\lambda f\colon H\times G\to\mathcal{Y}$ este data de $(D_X^\lambda f)(x,y) = ((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x,y;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0,\beta_{n+1}^0)$, iar aceasta derivata este o functie continua deoarece $\varphi\in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$.

Prin urmare se poate aplica Lema 2.4.16 si astfel se obtine o functie continua $\chi\colon \mathbb{R}\times G\to\mathcal{Y}$ care indeplineste pentru orice $g\in G$ conditiile $\chi(0,g) = 0$ si $f(x_0\beta_{n+1}^0(t),g) = f(x_0,g) + t(D_X^\lambda f)(x_0,g) + t\chi(t,g)$. Avem

$$\begin{aligned}(D_X^\lambda f)(x_0,g) = (D^\lambda f)(x_0,g;\beta_{n+1}^0,1) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} f(x_0\beta_{n+1}^0(t),g)\\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}((D_1^\lambda)^n\varphi)(x_0\beta_{n+1}^0(t),g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)\\ &= ((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x_0,g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0,\beta_{n+1}^0)\\ &= F(0,g)\end{aligned}$$

si $F(t,g) = F(0,g) + \chi(t,g)$, deci F este suma a doua functii continue, deoarece χ este continua pe baza Lemei 2.4.16 iar functia

$$g\mapsto F(0,g) = ((D_1^\lambda)^{n+1}\varphi)(x_0,g;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0,\beta_{n+1}^0)$$

este continua deoarece $\varphi\in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$. De aceea functia F insasi este continua, si aceasta incheie analiza Cazului 1.

Cazul 2: $p = p_{K_1,K_2}$ cu multimile compacte arbitrare $K_2\subseteq G$ si $K_1\subseteq \Lambda^s(G)$, unde $s\geq 1$. Sa notam din nou $E(t) = p(h(t) - h(0))$ pentru $t\in\mathbb{R}$. atunci avem

$$E(t) = \sup_{g,\alpha}|((D^\lambda)^s(h(t))(g;\alpha_1,\dots,\alpha_s) - ((D^\lambda)^s(h(0))(g;\alpha_1,\dots,\alpha_s)|$$

unde $g\in K_2$, $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_s)\in K_1$. Rezulta atunci ca $E(t)$ este supremumul valorilor seminormei $|\cdot|$ din definitia lui $p = p_{K_1,K_2}$ (a se vedea Definitia 2.3.1) pe vectorii din $\mathcal{Y}$

de forma

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{t}\Big(((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x_0\beta^0_{n+1}(t), g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s)) \\
&\quad - ((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x_0, g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s))\Big) \\
&\quad - ((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x_0, g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (\beta^0_{n+1}, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s))
\end{aligned}$$

unde din nou $g \in K_2$ si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in K_1$.

Prin urmare $E(t) = \sup\{|F(t, g, \alpha) - F(0, g, \alpha)| \mid g \in K_2, \alpha \in K_1\}$ unde functia $F\colon \mathbb{R} \times G \times \Lambda^s(G) \to \mathcal{Y}$ este data de

$$F(t, g, \alpha) = \begin{cases}
\frac{1}{t}\Big(((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x_0\beta^0_{n+1}(t), g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s)) \\
\quad - ((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x_0, g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s))\Big), \\
\hfill \text{daca } t \neq 0, \\
((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x_0, g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (\beta^0_{n+1}, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s)), \\
\hfill \text{daca } t = 0.
\end{cases}$$

Proprietatea dorita $\lim\limits_{t\to 0} E(t) = 0$ rezulta atunci printr-o aplicare a Lemei 2.4.9 pentru $X = \mathbb{R}$, $T = G \times \Lambda^s(G)$, $x_0 = 0 \in \mathbb{R}$, multimea compacta $K = K_2 \times K_1 \subseteq G \times \Lambda^s(G)$ si functia $f = F$, de indata ce vom fi demonstrat ca functia F este continua.

Exact ca in Cazul 1, observam mai intai ca

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to 0} F(t, g, \alpha) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0}((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x_0\beta^0_{n+1}(t), g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s)) \\
&= ((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x_0, g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s), (\beta^0_{n+1}, 1)) \\
&= F(0, g, \alpha)
\end{aligned}$$

pe baza Lemei 2.4.14(b).

Acum fie

$$B\colon \mathbb{R} \to \mathcal{Y}, \quad B(t) = ((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x_0\beta^0_{n+1}(t), g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s)).$$

Cum $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$, avem $B \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathcal{Y})$, $B'(0) = F(0, g, \alpha)$ (Lema 2.4.14(b)) si $B'(t) = ((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x_0\beta^0_{n+1}(t), g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1, \alpha_1), \dots, (1, \alpha_s), (\beta^0_{n+1}, 1))$.

Din teorema fundamentala a calculului diferential pentru functii cu valori in spatiul $\mathcal{Y}$ care nu este neaparat complet (a se vedea [Gl02a, Th. 1.5]) obtinem

$$B(t) = B(0) + t\int_0^1 B'(tz)\mathrm{d}z = B(0) + tB'(0) + t\int_0^1 B'(tz)\mathrm{d}z - tB'(0)$$

si de aceea

$$F(t,g,\alpha) = F(0,g,\alpha) + \chi(g,t,\alpha) \tag{2.4.2}$$

unde functia $\chi\colon G \times \mathbb{R} \times \Lambda^s(G) \to \mathcal{Y}$ este data de

$$\begin{aligned}\chi(g,&t,\alpha)\\ &= \int_0^1 ((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x_0\beta^0_{n+1}(tz), g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1,\alpha_1), \dots, (1,\alpha_s), (\beta^0_{n+1}, 1))\mathrm{d}z\\ &\quad - ((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x_0, g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1,\alpha_1), \dots, (1,\alpha_s), (\beta^0_{n+1}, 1)).\end{aligned}$$

avem $\chi(g,0,\alpha) = 0$ iar functia χ este continua pe baza Lemei 2.4.15 aplicate pentru $X = G \times \mathbb{R} \times \Lambda^s(G)$ si $f\colon G \times \mathbb{R} \times \Lambda^s(G) \times [0,1] \to \mathcal{Y}$ definita prin

$$\begin{aligned}f(g,&t,\alpha,z)\\ &=((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x_0\beta^0_{n+1}(tz), g; (\beta^0_1, 1), \dots, (\beta^0_n, 1), (1,\alpha_1), \dots, (1,\alpha_s), (\beta^0_{n+1}, 1))\end{aligned}$$

care este o functie continua deoarece $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$.

In fine, pe baza egalitatii (2.4.2) de mai sus, obtine din nou ca F este suma a doua functii continue, deci este ea insasi functie continua, si aceasta incheie demonstratia. $\square$

Lema 2.4.18. *Daca $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$, atunci sunt valabile urmatoarele afirmatii.*

(a) Fie $x \in H$ si $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Lambda(H)$ fixate. Atunci functia

$$h := ((D^\lambda_1)^n\varphi)(x, \bullet\,; \beta_1, \dots, \beta_n)\colon G \to \mathcal{Y}$$

apartine spatiului $C^\infty(G, \mathcal{Y})$ iar pentru orice $s \geq 1$ si $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_s) \in \Lambda^s(G)$ avem

$$((D^\lambda)^s h)(g;\alpha) = ((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x, g; (\beta_1, 1), \dots, (\beta_n, 1), (1,\alpha_1), \dots, (1,\alpha_s)).$$

(b) Fie $x \in H$, $\beta_1, \dots, \beta_n \in \Lambda(H)$, si $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \Lambda(G)$ fixate. Atunci functia

$$h := ((D^\lambda)^n\varphi)(x, \bullet\,; (\beta_1, \gamma_1), \dots, (\beta_n, \gamma_n))\colon G \to \mathcal{Y}$$

apartine spatiului $C^\infty(G,\mathcal{Y})$ iar pentru orice $s \geq 1$ si $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_s) \in \Lambda^s(G)$ avem

$$((D^\lambda)^s h)(g;\alpha) = ((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x,g;(\beta_1,\gamma_1),\dots,(\beta_n,\gamma_n),(1,\alpha_1),\dots,(1,\alpha_s)).$$

Demonstraţie. Afirmatia (a) rezulta din Afirmatia (b) pentru $\gamma_1 = \cdots = \gamma_n = 1 \in \Lambda(G)$, pe baza Lemei 2.4.4(a).

Afirmatia (b) va fi demonstrata prin inductie dupa $s \geq 1$. Deoarece $\varphi \in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$ si $h(g) = ((D^\lambda)^n\varphi)(x,g;(\beta_1,\gamma_1),\dots,(\beta_n,\gamma_n))$, rezulta ca functia h este continua.

Cazul $s = 1$: Avem

$$\begin{aligned}(D^\lambda h)(g;\alpha) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} h(g\alpha(t)) \\ &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} ((D^\lambda)^n\varphi)(x,g\alpha(t);(\beta_1,\gamma_1),\dots,(\beta_n,\gamma_n)) \\ &= ((D^\lambda)^{n+1}\varphi)(x,g;(\beta_1,\gamma_1),\dots,(\beta_n,\gamma_n),(1,\alpha))\end{aligned}$$

si atunci, deoarece $\varphi \in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$, obtinem $h \in \mathcal{C}^1(G,\mathcal{Y})$.

Acum presupunem ca afirmatia a fost dmonstrata deja pentru s si o demonstram pentru $s+1$. Avem

$$\begin{aligned}&((D^\lambda)^{s+1}h)(g;\alpha_1,\dots,\alpha_s,\alpha_{s+1}) \\ &\quad= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} ((D^\lambda)^s h)(g\alpha_{s+1}(t);\alpha_1,\dots,\alpha_s) \\ &\quad= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} ((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x,g\alpha_{s+1}(t);(\beta_1,\gamma_1),\dots,(\beta_n,\gamma_n),(1,\alpha_1),\dots,(1,\alpha_s)) \\ &\quad= ((D^\lambda)^{n+s+1}\varphi)(x,g;(\beta_1,\gamma_1),\dots,(\beta_n,\gamma_n),(1,\alpha_1),\dots,(1,\alpha_s),(1,\alpha_{s+1}))\end{aligned}$$

si demonstratia prin inductie se incheie.

In plus, cum $\varphi \in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$, obtinem $h \in \mathcal{C}^s(G,\mathcal{Y})$ pentru orice $s \geq 1$. Aceasta arata ca $h \in C^\infty(G,\mathcal{Y})$, si demonstratia este completa. □

Teorema 2.4.19. *Fie G si H grupuri topologice si $\mathcal{Y}$ un spatiu local convex. Atunci pentru orice $\varphi \in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$, functia corespunzatoare*

$$\widetilde{\varphi}\colon H \to C^\infty(G,\mathcal{Y}),\quad \widetilde{\varphi}(x)(g) := \varphi(x,g).$$

se afla in spatiul $C^\infty(H,\mathcal{E}(G,\mathcal{Y}))$. In plus, aplicatia

$$\Phi\colon \mathcal{E}(H\times G,\mathcal{Y}) \to \mathcal{E}(H,\mathcal{E}(G,\mathcal{Y})),\quad \varphi \mapsto \widetilde{\varphi}$$

este scufundare topologica liniara de spatii local convexe.

Demonstraţie. Pentru a demonstra prima afirmatie, fie $\varphi \in C^\infty(H \times G, \mathcal{Y})$ arbitrara. Faptul ca $\widetilde{\varphi}$ este continua rezulta din Propozitia 2.4.10. Vom arata ca pentru orice $n \geq 1$ derivata $(D^\lambda)^n\widetilde{\varphi}\colon H \times \Lambda^n(H) \to \mathcal{E}(G, \mathcal{Y})$ exista si este continua. Existenta acestei derivate rezulta de fapt din Propozitia 2.4.17. Faptul ca derivata ia valori in $\mathcal{E}(G, \mathcal{Y})$ este o consecinta a Lemei 2.4.18(a).

Pentru continuitatea derivatei de mai sus, vom demonstra ca pentru orice seminorma $p = p_{K_1,K_2}$ pe $\mathcal{E}(G, \mathcal{Y})$ ca in Definitia 2.3.1 si orice $x_0 \in H$, $\beta_1^0, \ldots, \beta_n^0 \in \Lambda(H)$ si $\varepsilon > 0$ arbitrar, exista o vecinatate U a lui $(x; \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0) \in H \times \Lambda^n(H)$ astfel incat pentru orice $(x; \beta_1, \ldots, \beta_n) \in U$ sa avem $p(((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x; \beta_1, \ldots, \beta_n) - ((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x_0; \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)) \leq \varepsilon$.

Cazul (a): $p = p_{K_1,K_2}$, unde multimea compacta $K_2 \subseteq G$ este arbitrara si $K_1 = \emptyset$.

ca in demonstratia Propozitiei 2.4.10, notam

$$E(x; \beta_1, \ldots, \beta_n) := \sup_{g \in K_2} |((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x; \beta_1, \ldots, \beta_n)(g) - ((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x_0; \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)(g)|.$$

Printr-o aplicare a Propozitiei 2.4.5 obtinem

$$E(x; \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sup_{g \in K_2} |((D_1^\lambda)^n\varphi)(x, g; \beta_1, \ldots, \beta_n) - ((D_1^\lambda)^n\varphi)(x_0, g; \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0)|.$$

Acum concluzia rezulta prin aplicarea Lemei 2.4.9 pentru $(x_0; \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0) \in H \times \Lambda^n(H) = X$, $K = K_2$ compact in $T = G$ si

$$f\colon H \times \Lambda^n(H) \times G \to \mathcal{Y}, \quad f(x; \beta_1, \ldots, \beta_n, g) = ((D_1^\lambda)^n\varphi)(x, g; \beta_1, \ldots, \beta_n),$$

care este o functie continua deoarece functia $(D_1^\lambda)^n\varphi\colon H \times G \times \Lambda^n(H) \to \mathcal{Y}$ este continua pe baza Lemei 2.4.4(c).

Cazul (b): $p = p_{K_1,K_2}$ cu multimile compacte arbitrare $K_2 \subseteq G$ si $K_1 \subseteq \Lambda^s(G)$, unde $s \geq 1$.

Notam

$$\begin{aligned} E(x; \beta_1, \ldots, \beta_n) = \sup\{ &|((D^\lambda)^s((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x; \beta_1, \ldots, \beta_n))(g; \gamma_1, \ldots, \gamma_s) \\ &- ((D^\lambda)^s((D^\lambda)^n\widetilde{\varphi})(x_0; \beta_1^0, \ldots, \beta_n^0))(g; \gamma_1, \ldots, \gamma_s)| \\ &\mid g \in K_2, \gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_s) \in K_1\}. \end{aligned}$$

Pe baza Propozitiei 2.4.5 obtinem

$$
\begin{aligned}
E(x;\beta_1,\dots,\beta_n) = \sup\{|((D^\lambda)^s((D_1^\lambda)^n\varphi)(x,\bullet\,;\beta_1,\dots,\beta_n))(g;\gamma_1,\dots,\gamma_s) \\
- ((D^\lambda)^s((D_1^\lambda)^n\varphi)(x_0,\bullet\,;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0))(g;\gamma_1,\dots,\gamma_s)| \\
\mid g\in K_2, \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_s)\in K_1\}.
\end{aligned}
$$

Mai departe, pe baza Lemei 2.4.18(a) avem

$$
\begin{aligned}
E(x;\beta_1,\dots,\beta_n) = \sup\{|((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x,g;(\beta_1,1),\dots,(\beta_n,1),(1,\gamma_1),\dots,(1,\gamma_s)) \\
- ((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x_0,g;(\beta_1^0,1),\dots,(\beta_n^0,1),(1,\gamma_1),\dots,(1,\gamma_s))| \\
\mid g\in K_2, \gamma=(\gamma_1,\dots,\gamma_s)\in K_1\}.
\end{aligned}
$$

Acum concluzia rezulta pe baza Lemei 2.4.9 pentru $(x_0;\beta_1^0,\dots,\beta_n^0)\in H\times\Lambda^n(H)=X$, $T=G\times\Lambda^s(G)$, $K=K_2\times K_1$, si $f\colon H\times\Lambda^n(H)\times G\times\Lambda^s(G)\to\mathcal{Y}$ data de

$$
f(x,\beta_1,\dots,\beta_n,g,\gamma_1,\dots,\gamma_s) = ((D^\lambda)^{n+s}\varphi)(x,g;(\beta_1,1),\dots,(\beta_n,1),(1,\gamma_1),\dots,(1,\gamma_s)).
$$

Sa observam ca functia f este continua deoarece $(D^\lambda)^{n+s}\varphi$ este continua ca o consecinta a ipotezei $\varphi\in C^\infty(H\times G,\mathcal{Y})$, iar aceasta incheie demonstratia faptului ca $\widetilde{\varphi}\in\mathcal{E}(H,\mathcal{E}(G,\mathcal{Y}))$.

Pentru cea de-a doua afirmatie, sa observam ca aplicatia inversa

$$
\operatorname{Ran}\Phi\to\mathcal{E}(H\times G,\mathcal{Y}),\quad \widetilde{\varphi}\mapsto\varphi
$$

este bine definita. In plus, continuitatea ambelor aplicatii $\varphi\mapsto\widetilde{\varphi}$ si $\widetilde{\varphi}\mapsto\varphi$ rezulta usor pe baza relatiilor dintre derivatele functiilor φ and $\widetilde{\varphi}$ date in Propositia 2.4.5 si Lema 2.4.4 (a se vedea si [BCR81, Prop. 1.2.1.5]). Aceasta incheie demonstratia. □

Observatia 2.4.20. Se vede usor ca demonstratia Teoremei 2.4.19 are caracter local, in sensul ca ea conduce de fapt la un rezultat mai general, care se poate enunta astfel:

Fie G si H grupuri topologice iar $\mathcal{Y}$ un spatiu local convex. Fixam multimile deschise arbitrare $V\subseteq G$ si $W\subseteq H$. Atunci pentru orice $\varphi\in C^\infty(W\times V,\mathcal{Y})$, functia corespunzatoare $\widetilde{\varphi}\colon W\to C^\infty(V,\mathcal{Y})$, $\widetilde{\varphi}(x)(g):=\varphi(x,g)$, se afla in spatiul $C^\infty(W,\mathcal{E}(V,\mathcal{Y}))$. In plus, aplicatia

$$
\mathcal{E}(W\times V,\mathcal{Y})\to\mathcal{E}(W,\mathcal{E}(V,\mathcal{Y})),\quad \varphi\mapsto\widetilde{\varphi}
$$

este o scufundare topologica liniara de spatii local convexe.

2.5 Structura operatorilor locali invarianti

Propozitia 2.5.1. *Fie G un grup topologic. Atunci $f * u \in \mathcal{E}(G)$ pentru orice $f \in \mathcal{E}(G)$ si orice $u \in \mathcal{E}'(G)$.*

Demonstraţie. Demonstratie. Fie $m : G \times G \to G, m(x, y) := xy$. Notam $\check{u} = v \in \mathcal{E}'(G)$ si avem $\check{v} = u$ si $(f * u)(x) = \check{u}(f \circ L_x) = v(f \circ L_x)$. Sa definim acum $\varphi : G \times G \to \mathbb{C}$, $\varphi(x, y) := f(xy)$. Din $\varphi = f \circ m$ rezulta $\varphi \in C^\infty(G \times G)$ pe baza Propozitiei 3.2.3. Daca definim $\widetilde{\varphi} : G \to C^\infty(G)$, $\widetilde{\varphi}(x)(y) := \varphi(x, y)$ ca in Notatia 2.4.1, atunci din Teorema 2.4.19 rezulta $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(G, \mathcal{E}(G))$.

Deoarece $\widetilde{\varphi}(x)(y) = f(xy) = (f \circ L_x)(y)$, avem $\widetilde{\varphi}(x) = f \circ L_x$ pentru orice $x \in G$, si deci $f * u = v \circ \widetilde{\varphi}$. Pe baza faptulu ca functia $\widetilde{\varphi}$ este de clasa C^∞ (Teorema 2.4.19) rezulta $f * u \in \mathcal{E}(G)$, si aceasta incheie demonstratia. □

Teorema 2.5.2. *Fie G un grup topologic. Pentru orice $u \in \mathcal{E}'(G)$ definim operatorul liniar $D_u : C^\infty(G) \to C^\infty(G), D_u f := f * u$. Atunci aplicatia $\Psi : \mathcal{E}'_1(G) \to \mathcal{U}(G)$, $\Psi(u) := D_u$ este bine definita,inversabila si inversa ei este $\Psi^{-1} : \mathcal{U}(G) \to \mathcal{E}'_1(G)$ data prin*

$$(\Psi^{-1}(D))(f) := (D\check{f})(1), (\forall)f \in C^\infty(G), (\forall)D \in \mathcal{U}(G).$$

Demonstraţie. Facem demonstratia in 3 pasi.

Pasul 1-Aratam ca Ψ este bine definita.

Pasul 2-Aratam ca Ψ^{-1} este bine definita.

Pasul 3-Aratam ca $\Psi \circ \Psi^{-1} = 1_{\mathcal{U}(G)}$ si $\Psi^{-1} \circ \Psi = 1_{\mathcal{E}'_1(G)}$.

Pasul 1-Aratam ca $D_u \in \mathcal{U}(G)$ pentru orice $u \in \mathcal{E}'_1(G)$. Avem

$$\begin{aligned} D_u(f \circ L_x)(y) &= ((f \circ L_x) * u)(y) = \check{u}(f \circ L_x \circ L_y) \\ &= (D_u(f) \circ L_x)(y) = (f * u)(xy) = \check{u}(f \circ L_{xy}) \\ &= \check{u}(f \circ L_x \circ L_y) = D_u(f \circ L_x)(y) \end{aligned}$$

de unde obtinem ca $D_u(f \circ L_x) = D_u(f) \circ L_x$.

Din $u \in \mathcal{E}'_1(G)$ rezulta ca $\operatorname{supp}(u) \subseteq \{1\} \subseteq G$, deci

$$\operatorname{supp}(D_u f) = \operatorname{supp}(f * u) \subseteq \operatorname{supp}(f)\operatorname{supp}(u).$$

si de aceea $\operatorname{supp}(D_u f) \subseteq \operatorname{supp}(f)\{1\} = \operatorname{supp}(f)$. Din toate acestea obtinem ca $D_u \in \mathcal{U}(G)$ si Ψ este bine definita.

Pasul 2. Aratam ca functionala $u : \mathcal{E}(G) \to \mathbb{C}$, $u(f) := (D\check{f})(1)$, este in $\mathcal{E}'_1(G)$ pentru orice $D \in \mathcal{U}(G)$.

Pentru aceasta sa observam ca daca $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$, atunci $G \setminus U \subseteq \{x \in G \mid f(x) = 0\}$. Fie acum $x \in G$ arbitrar cu $x \neq 1$. Alegem o vecinatate deschisa U a lui x cu $1 \notin U$. Multimea U cu proprietatile anterioare exista deoarece grupul G este separat. Pentru orice $f \in C^\infty(G)$ cu $\operatorname{supp}(f) \subseteq U$ avem $\operatorname{supp}(\check{f}) = \operatorname{supp}(f)^{-1} \subseteq U^{-1}$, si atunci $\operatorname{supp}(D\check{f}) \subseteq \operatorname{supp}(\check{f}) \subseteq U^{-1}$. Astfel obtinem $G \setminus U^{-1} \subseteq \{y \in G \mid (D\check{f})(y) = 0\}$.

Din $1 \notin U$ si $1 \notin U^{-1}$ obtinem ca $(D\check{f})(1) = 0$ de unde rezulta ca $x \notin \operatorname{supp}(u)$ pentru $x \in G \setminus \{1\}$ arbitrar, si astfel $\operatorname{supp}(u) \subseteq \{1\}$. Deci $u \in \mathcal{E}'_1(G)$.

Sa aratam mai detaliat ca pentru orice $x \in G$, $x \neq 1$ exista $U \in \mathcal{V}(x)$ astfel incat $1 \notin U$. Presupunem prin reducere la absurd ca exista $x \in G$, $x \neq 1$ astfel incat pentru orice $U \in \mathcal{V}(x)$ sa avem $1 \in U$. Atunci

$$1 \in \bigcap_{U \in \mathcal{V}(x)} U = \bigcap_{V \in \mathcal{V}(1)} xV = x \bigcap_{V \in \mathcal{V}(1)} V = x\{1\} = \{x\}.$$

Deci $1 \in \{x\}$, de unde rezulta $x = 1$, ceea ce este o contradictie, si obtinem ca presupunerea facuta este falsa. Rezulta ca pentru orice $x \in G$, $x \neq 1$ exista $U \in \mathcal{V}(x)$ astfel incat $1 \notin U$, si demonstratia pasului 2 se incheie.

Pasul 3. Fie $D \in \mathcal{U}(G)$. Notam $\Psi^{-1}(D) = u$. Avem $u(f) = (D\check{f})(1)$ si $\Psi(u) = D_u$, iar

$$\begin{aligned}(D_u f)(x) &= (f * u)(x) = \check{u}(f \circ L_x) = D(f \circ L_x)(1) \\ &= ((Df) \circ L_x)(1) = (Df)(x).\end{aligned}$$

Deci $D_u f = Df$ si $D_u = D$ de unde obtinem ca

$$\Psi \circ \Psi^{-1} = 1_{\mathcal{U}(G)}.$$

Fie acum $u \in \mathcal{E}'_1(G)$. Avem $\Psi(u) = D_u$. Notam $\Psi^{-1}(D_u) = v \in \mathcal{E}'_1(G)$. Avem

$$\begin{aligned}v(f) &= (D_u\check{f})(1) = (\check{f} * u)(1) \\ &= \check{u}(\check{f} \circ L_1) = \check{u}(\check{f}) = u(f)\end{aligned}$$

Deci $v = u$ si $\Psi^{-1} \circ \Psi = 1_{\mathcal{E}'_1(G)}$ si demonstratia se incheie. □

Daca G este un grup topologic, folosim Teorema 2.5.2 pentru a inzestra $\mathcal{U}(G)$ cu o topologie naturala pentru care aplicatia Ψ este un homeomorfism daca $\mathcal{E}'_1(G)$ este inzestrat cu topologia dual slaba prin care devine $\mathcal{E}'_1(G)$ subspatiu liniar inchis al lui $\mathcal{E}'(G)$

(vezi Definitia 2.3.1). Aceasta topologie a lui $\mathcal{U}(G)$ poate fi descrisa ca topologia local convexa determinata de familia de seminorme $\{D \mapsto |(Df)(1)|\}_{f\in\mathcal{E}(G)}$.

In situatia din urmatorul corolar, spunem ca un spatiu Banach $\mathcal{X}$ admite functii de trunchiere daca exista $\varphi \in C^\infty(\mathcal{X})$ care este egala cu 1 pe o vecinatate a lui $0 \in \mathcal{X}$, are suportul continut intr-o bila, si pentru orice $k \geq 1$ satisface conditia $\sup\limits_{x\in\mathcal{X}} \|\mathrm{d}_x^k\widetilde{\varphi}\| < \infty$. Orice spatiu Hilbert admite functii de trunchere; vezi [WD73] si [LW11] pentru mai multe detalii si exemple. In aceast cadru, vom obtine urmatorul raspuns partial la Problema 2.2.4.

Corolarul 2.5.3. *Fie G un grup Banach-Lie a carei algebra Lie admite functii de trunchiere. Atunci $\mathcal{U}_0(G)$ este o subalgebra densa a lui $\mathcal{U}(G)$.*

Demonstraţie. Din teorema Hahn-Banach, este suficient sa aratam ca daca $\theta\colon \mathcal{U}(G) \to \mathbb{C}$ este o functionala liniara continua care se anuleaza pe $\mathcal{U}_0(G)$, atunci $\theta = 0$. Pentru aceasta sa notam ca, folosind familia de seminorme de mai sus care descrie topologia lui $\mathcal{U}(G)$, putem gasi $f \in \mathcal{E}(G)$ cu $|\theta(D)| \leq |(Df)(1)|$ pentru orice $D \in \mathcal{U}(G)$. Atunci nucleul functionalei liniare $D \mapsto (Df)(1)$ este continut in $\operatorname{Ker}\theta$ si, deoarece ambele nuclee sunt subspatii inchise 1-codimensionale ale lui $\mathcal{U}(G)$, rezulta ca, inlocuind f cu cf pentru o constanta $c \in \mathbb{C}$, avem $\theta(D) = (Df)(1)$ pentru orice $D \in \mathcal{U}(G)$.

Presupunerea $\theta(D) = 0$ pentru orice $D \in \mathcal{U}_0(G)$ este echivalenta cu faptul ca pentru orice $k \geq 1$ avem $(\mathrm{d}^k(f\circ\exp_G))(0) = 0$, unde $\exp_G\colon \mathfrak{g} \to G$ este aplicatia exponentiala a lui G, care este un difeomorfism local in $0 \in \mathfrak{g}$. Ipoteza ca algebra Lie $\mathfrak{g}$ admite functii de trunchere ne permite sa folosim [LW11, Prop. 3], care asigura ca pentru orice operator local T pe $\mathfrak{g}$ avem $(T(f\circ\exp_G))(0) = 0$.

Verificam ca $(Df)(1) = 0$ pentru orice operator local D on G. Pentru aceasta alegem multimile deschse U si V pentru orice $\exp_G\colon V \to U$ este un difeomorfism cu inversa notata prin $\log_G$, unde $1 \in U \subseteq G$ si $0 \in V \subseteq \mathfrak{g}$. Folosind ipoteza pe $\mathfrak{g}$ ca sa gasim $\psi \in C^\infty(\mathfrak{g})$ cu $\operatorname{supp}\psi \subseteq V$ si $\psi = 1$ pe o vecinatate a lui $0 \in \mathfrak{g}$. Notam $\widetilde{\varphi} := \psi\circ\log_G \in C^\infty(U)$ si o extindem cu valoarea 0 pe $G\setminus U$. Atunci $\widetilde{\varphi} \in C^\infty(G)$, $\operatorname{supp}\widetilde{\varphi} \subseteq U$, $\widetilde{\varphi} = 1$ pe o vecinatate a lui $1 \in U \subseteq G$, si $\psi = \widetilde{\varphi}\circ\exp_G$. Definim

$$T\colon C^\infty(\mathfrak{g}) \to C^\infty(\mathfrak{g}), \quad Th = D(((\psi h)\circ\log_G)\widetilde{\varphi})$$

unde functia $(\psi h)\circ\log_G \in C^\infty(V)$ este extinsa cu valoarea 0 pe $\mathfrak{g}\setminus V$. Deoarece D este operator local, rezulta ca si T este operator local, si din observatia de mai sus obtinem $(T(f\circ\exp_G))(0) = 0$, care este echivalenta cu $(Df)(1) = 0$. Deci $\theta(D) = 0$ pentru orice $D \in \mathcal{U}(G)$, si demonstratia se incheie. $\square$

2.6 Note bibliografice

Continutul acestui capitol este original si se bazeaza pe articolul [BNi14a] aflat in curs de publicare.

Capitolul 3

Grupul tangent al unui grup topologic nilpotent de pas 2

Acest capitol constituie un prim pas in studiul aplicatiilor moment ale reprezentarilor de grupuri topologice, care se va incheia in Capitolul 5 prin Teorema 5.5.2. Aplicatia moment a unei reprezentari de grup Lie (Definitia 3.1.3) face apel la derivata reprezentarii respective, iar aceasta derivata este definita pe spatiul tangent al grupului Lie studiat. De aceea este clar ca, pentru a generaliza acest cerc de idei la grupuri topologice arbitrare, este necesar sa dezvoltam variante adecvate ale notiunilor de spatiu tangent si fibrat tangent in cazul grupurilor topologice ce nu sunt neaparat grupuri Lie. Baza acestor dezvoltari a fost pusa in Capitolul 2, iar aici vom studia unele probleme legate de "fibratul tangent" al unui grup topologic nilpotent. Deoarece aceasta notiune este inca destul de putin inteleasa si este obiectul unor probleme deschise (a se vedea [Ne06], [HM07], si de asemenea Problema 3.1.6 de mai jos) ne vom concentra aici pe cazul grupurilor topologice nilpotente de pas 2, si anume vom caracteriza grupurile al caror grup tangent este un grup pre-Lie (Teoremele 3.1.10 si 3.4.4).

Pentru inceput vom prezenta in Sectiunea 3.1 o motivatie mai detaliata a ideilor de mai sus. Apoi, in Sectiunea 3.2 vom demonstra Propozitia 3.2.3. Aceasta da o formula de calcul care a fost indicata fara demonstratie in [BCR81] si din care rezulta ca inmultirea pe grupuri pre-Lie este aplicatie diferentiabila. Prezentam apoi doua leme de continuitate care caracterizeaza topologia compact deschisa. Aceasta subsectiune contine unele rezultate din [Fo45], pentru care am considerat util sa dam si detaliile demonstratiilor, deoarece variante ale ideilor respective vor fi utilizate in continuare.

In Sectiunea 3.3 prezentam elemente de teorie Lie pentru grupuri topologice nilpotente de pas 2 si anume: cateva proprietati ale aplicatiei comutator; formule pentru paranteza

Lie pentru subgrupuri continue cu un parametru; calculul sumei pentru subgrupuri continue cu un parametru; unele proprietati ale subgrupurilor cu un parametru in grupuri topologice generale (Lemele 3.3.12- 3.3.15 sunt valabile pentru grupuri topologice generale, deci nu utilizeaza ipoteza ca grupul G ar fi nilpotent de pas 2). Acestea ne permit sa construim algebra Lie topologica a unui grup nilpotent de pas 2, ceea ce da in particular o demonstratie detaliata a Teoremei 3.3.23, a carei demonstratie a fost doar schitata in [Ne06]. Pe parcurs vom obtine si alte cateva rezultate utile, de interes independent (de exemplu Propozitia 3.3.20). In Sectiunea 3.4 introducem grupul tangent al unui grup topologic cu algebra Lie, notat cu $T(G)$. La acest nivel de generalitate, aceasta este o notiune noua, care a fost considerata in [HM07] doar pentru grupuri pro-Lie si care generalizeaza faptul ca fibratul tangent al oricarui grup Lie are o structura naturala de grup Lie (a se vedea de exemplu [Be06]). Aratam ca grupul tangent al unui grup topologic nilpotent de pas 2 este grup nilpotent de pas 2, iar in final caracterizam grupurile nilpotente de pas 2 pentru care grupul tangent este grup pre-Lie (Teorema 3.4.4).

3.1 Motivatie

Vom utiliza urmatoarele notatii:

- G este un grup topologic;
- $\mathcal{H}$ este un spatiu Hilbert cu grupul unitar $U(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid TT^* = TT^* = 1\}$;
- $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ este o *reprezentare unitara*, deci un homomorfism de grupuri pentru care aplicatia $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(g, y) \mapsto \pi(g)y$ este continua.

Vom spune ca reprezentarea π este *ireductibila* daca nu exista nici un subspatiu liniar inchis $\mathcal{H}_0$ al lui $\mathcal{H}$ astfel incat $\{0\} \subsetneqq \mathcal{H}_0 \subsetneqq \mathcal{H}$ si $\pi(g)\mathcal{H}_0 \subseteq \mathcal{H}_0$ pentru orice $g \in G$.

Definitia 3.1.1. Spatiul vectorilor de clasa C^∞ pentru reprezentarea π este

$$\mathcal{H}_\infty := \{y \in \mathcal{H} \mid \pi(\cdot)y \in C^\infty(G, \mathcal{H})\}.$$

Observatia 3.1.2. Multimea $\mathcal{H}_\infty$ este un subspatiu liniar (care nu este neaparat inchis daca $\dim \mathcal{H} = \infty$) al lui $\mathcal{H}$ si este invariant in raport cu familia de operatori unitari $\pi(G)$, adica pentru orice $g \in G$ avem $\pi(g)\mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{H}_\infty$.

Spatiul $\mathcal{H}_\infty$ este binecunoscut pentru reprezentari de grupuri Lie finit dimensionale. El a fost introdus pentru reprezentari de grupuri topologice generale in [Bos76], iar pentru reprezentari de grupuri topologice local compacte in [Mag81, Def. 1].

Definitia 3.1.3. *Derivata reprezentarii* $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ este

$$\mathrm{d}\pi\colon \Lambda(G) \to \mathrm{End}\,(\mathcal{H}_\infty), \quad \mathrm{d}\pi(\gamma)y := \lim_{t\to 0} \frac{\pi(\gamma(t))y - y}{t}$$

pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ si $y \in \mathcal{H}$, iar *aplicatia moment* a lui π este

$$\Phi_\pi\colon \mathcal{H}_\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{\Lambda(G)}, \quad \Phi_\pi(y) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{(\mathrm{d}\pi(\cdot)y \mid y)}{(y \mid y)}.$$

Inzestram multimea $\mathbb{R}^{\Lambda(G)}$ a tuturor functiilor $\Lambda(G) \to \mathbb{R}$ cu topologia convergentei uniforme pe submultimile compacte din $\Lambda(G)$, si definim *multimea moment inchisa* I_π a reprezentarii π ca fiind inchiderea in $\mathbb{R}^{\Lambda(G)}$ a imaginii aplicatiei moment, deci $I_\pi := \overline{\Phi_\pi(\mathcal{H}_\infty)}$.

Observatia 3.1.4. Pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ si $t \in \mathbb{R}$ avem $\pi(\gamma(t)) \in U(\mathcal{H})$, deci pentru orice $y \in \mathcal{H}$ avem si $(\pi(\gamma(t))y \mid \pi(\gamma(t))y) = (y \mid y)$. Putem deriva aceasta egalitate in $t = 0$ daca $y \in \mathcal{H}_\infty$, si obtinem

$$(\mathrm{d}\pi(\gamma)y \mid y) + (y \mid \mathrm{d}\pi(\gamma)y) = 0.$$

De aici rezulta imediat ca functia $\Phi_\pi(y)\colon \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ intr-adevar ia valori reale pentru orice $y \in \mathcal{H}_\infty$.

Definitia 3.1.5. Fie H un grup arbitrar. Definim $H_0 := H$, iar pentru orice $n \geq 0$ definim H_{n+1} ca fiind subgrupul lui H generat de elementele de forma $hxh^{-1}x^{-1}$ cu $h \in H$ si $x \in H_n$. Avem $H = H_0 \supseteq H_1 \supseteq \cdots$, si daca există $n_0 \geq 1$ astfel incat $H_{n_0} = \{1\}$, atunci spunem că grupul H este *nilpotent*. Daca n_0 este cel mai mic numar cu aceasta proprietate (adica $H_{n_0-1} \supsetneqq \{1\} = H_{n_0}$), atunci spunem ca H este grup *nilpotent de pas* n_0.

Problema 3.1.6 ([Ne06, Probl. IV.7])**.** Orice grup topologic nilpotent este grup topologic cu algebra Lie?

Cel mai bun rezultat cunoscut in acest sens este urmatorul, pentru care a fost publicata doar o schita de demonstratie.

Teorema 3.1.7 ([Ne06, Th. IV.1.24])**.** *Orice grup topologic nilpotent de pas 2 este grup topologic cu algebra Lie.*

Dupa cum am mentionat in introducerea acestui capitol, studiem teorie Lie pentru grupuri topologice deoarece ne este utila in studiul aplicatiilor moment. In particular suntem interesati de proprietati de convexitate ale multimilor moment, iar un rezultat de acest tip este urmatorul:

Teorema 3.1.8. *Fie G un grup Lie nilpotent si $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ o reprezentare unitara ireductibila. Atunci multimea moment I_π este o submultime convexa a spatiului vectorial $\Lambda(G)^*$.*

Demonstraţie. Aceasta rezulta imediat din [Wi89, Th. 4.2]. □

Problema 3.1.9. Se poate extinde Teorema 3.1.8 la reprezentari de grupuri topologice nilpotente, cel putin pentru grupuri nilpotente de pas 2?

Vom oferi in Teorema 5.5.2 un raspus afirmativ la aceasta problema in cazul grupurilor local compacte separabile. Pentru a facilita formularea mai precisa a problemei de mai sus, este util sa studiem in prealabil teoria Lie pentru grupuri topologice nilpotente de pas 2. Principalul rezultat nou pe care il obtinem in acest sens este urmatorul:

Teorema 3.1.10. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2. Urmatoarele afirmatii sunt echivalente:*

1. *Grupul tangent $T(G)$ este grup pre-Lie.*
2. *G este grup pre-Lie si topologia de dual slaba a spatiului $\Lambda(G)^*$ este separata.*

Notiunea de grup tangent este introdusa mai jos in Definitia 3.4.1 iar teorema de mai sus este demonstrata sub o forma echivalenta in Teorema 3.4.4.

3.2 O formula de calcul diferential pe grupuri topologice

O formula de calcul diferential

Pentru inceput vom demonstra Propozitia 3.2.3. Aceasta da o formula de calcul care a fost indicata fara demonstratie in [BCR81].

Lema 3.2.1. *Fie G un grup topologic, $\pi : G \times G \to G, \pi(x, y) := xy$ $f : G \to \mathbb{C}, f \in C^k(G), k \geq 1$, $\lambda_{1i_1}, \lambda_{2i_2}, \ldots, \lambda_{ki_k} \in \Lambda(G)$, $i_1, \ldots, i_k \in \{1, 2\}$,$m = i_1 + i_2 + \ldots + i_k - k$. m arata cati de 2 sunt in multimea $\{i_1, \ldots, i_k\}$. Egalitatea $i_l = 2$ are m solutii notate $a_1 < \ldots < a_m$. Egalitatea $i_l = 1$ are $(k - m)$ solutii notate $a_{m+1} < \ldots < a_k$. Atunci are loc relatia*

$$\partial^{\lambda_{1i_1}\lambda_{2i_2}\ldots\lambda_{ki_k}}(f \circ \pi)(x, y) = D^k f(xy; \lambda_{a_1 2}, \ldots, \lambda_{a_m 2}, \lambda^y_{a_{m+1} 1}, \ldots, \lambda^y_{a_k 1}).$$

Demonstrație. Vom face demonstratia prin inductie dupa $k \geq 1$. In cazul $k = 1$ trebuie sa demonstram urmatoarele doua relatii:

$$\partial^{\lambda_{11}}(f \circ \pi)(x, y) = Df(xy; \lambda_{11}^{y}) \text{ si } \partial^{\lambda_{12}}(f \circ \pi)(x, y) = Df(xy; \lambda_{12}).$$

Avem

$$\begin{aligned}
\partial^{\lambda_{12}}(f \circ \pi)(x, y) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \pi)(x; y\lambda_{12}(t)) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(xy\lambda_{12}(t)) \\
&= Df(xy; \lambda_{12}).
\end{aligned}$$

Pe de alta parte

$$\begin{aligned}
\partial^{\lambda_{11}}(f \circ \pi)(x, y) &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}(f \circ \pi)(x\lambda_{11}(t); y) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(x\lambda_{11}(t)y) \\
&= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} f(xy\lambda_{11}^{y}(t)) \\
&= Df(xy; \lambda_{11}^{y})
\end{aligned}$$

si analiza cazului $k = 1$ se incheie.

Pentru trecerea de la k la $k + 1$, calculam

$$\partial^{\lambda_{1i_1}\lambda_{2i_2}\ldots\lambda_{ki_k}\lambda_{k+1,i_{k+1}}}(f \circ \pi)(x, y) = \partial^{\lambda_{k+1,i_{k+1}}}(\partial^{\lambda_{1i_1}\lambda_{2i_2}\ldots\lambda_{ki_k}}(f \circ \pi))(x, y).$$

Avem doua cazuri posibile: $i_{k+1} = 1$ sau $i_{k+1} = 2$.

• Cazul $i_{k+1} = 1$. In acest caz $i_1 + i_2 + \ldots + i_k + i_{k+1} - (k+1) = i_1 + i_2 + \ldots + i_k - k = m$ deci m ramane constant. Avem

$$\begin{aligned}
&\partial^{\lambda_{1i_1}\ldots\lambda_{ki_k}\lambda_{k+1,i_{k+1}}}(f \circ \pi)(x, y) \\
&\qquad = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \partial^{\lambda_{1i_1}\ldots\lambda_{ki_k}}(f \circ \pi)(x\lambda_{k+1,1}(t), y) \\
&\qquad = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} D^k f(x\lambda_{k+1,1}(t)y; \lambda_{a_1 2}, \ldots, \lambda_{a_m 2}, \lambda^{y}_{a_{m+1}1}, \ldots, \lambda^{y}_{a_k 1}) \\
&\qquad = D^{k+1} f(xy; \lambda_{a_1 2}, \ldots, \lambda_{a_m 2}, \lambda^{y}_{a_{m+1}1}, \ldots, \lambda^{y}_{a_k 1}, \lambda^{y}_{k+1,1})
\end{aligned}$$

si analiza cazului $i_{k+1} = 1$ se incheie.

• Cazul $i_{k+1} = 2$. In acest caz avem

$$i_1 + i_2 + \ldots + i_k + i_{k+1} - (k+1) = i_1 + i_2 + \ldots + i_k - k + 1 = m + 1.$$

Avem

$$\begin{aligned}
&\partial^{\lambda_{1i_1}\dots\lambda_{ki_k}\lambda_{k+1,i_{k+1}}}(f\circ\pi)(x,y)\\
&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\partial^{\lambda_{1i_1}\dots\lambda_{ki_k}}(f\circ\pi)(x;y\lambda_{k+1,2}(t))\\
&=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}D^k f(xy\lambda_{k+1,2}(t);\lambda_{a_12},\dots,\lambda_{a_m2},\lambda_{a_{m+1}1}^{y\lambda_{k+1,2}(t)},\dots,\lambda_{a_k1}^{y\lambda_{k+1,2}(t)})
\end{aligned}$$

si trebuie sa verificam ca aceasta ultima expresie este egala cu

$$D^{k+1}f(xy;\lambda_{a_12},\dots,\lambda_{a_m2},\lambda_{k+1,2},\lambda_{a_{m+1}1}^y,\dots,\lambda_{a_k1}^y).$$

Este suficient sa demonstram acest fapt pentru $y=1\in G$. Definim $g:\mathbb{R}^k\to\mathbb{C}$ prin

$$\begin{aligned}
&g(t_1,\dots,t_k)\\
&:=f(y\lambda_{k+1,2}(s)\lambda_{a_k1}^{y\lambda_{k+1,2}(s)}(t_1)\dots\lambda_{a_{m+1}1}^{y\lambda_{k+1,2}(s)}(t_{k-m})\lambda_{a_m2}(t_{k+1-m})\dots\lambda_{a_12}(t_k))\\
&=f(\lambda_{a_k1}(t_1)\dots\lambda_{a_{m+1}1}(t_{k-m})y\lambda_{k+1,2}(s)\lambda_{a_m2}(t_{k+1-m})\dots\lambda_{a_12}(t_k)).
\end{aligned}$$

Definim $h:\mathbb{R}^{k+1}\to\mathbb{C}$ prin

$$\begin{aligned}
&h(t_1,\dots,t_k,t_{k+1})\\
&=f(y\lambda_{a_k1}^y(t_1)\dots\lambda_{a_{m+1}1}^y(t_{k-m})\lambda_{k+1,2}(t_{k+1-m})\lambda_{a_m2}(t_{k+2-m})\dots\lambda_{a_12}(t_{k+1}))\\
&=f(\lambda_{a_k1}(t_1)\dots\lambda_{a_{m+1}1}(t_{k-m})y\lambda_{k+1,2}(t_{k+1-m})\lambda_{a_m2}(t_{k+2-m})\dots\lambda_{a_12}(t_{k+1})).
\end{aligned}$$

Avem $h\in C^{k+1}(\mathbb{R}^{k+1},\mathbb{C})$, $g\in C^k(\mathbb{R}^k,\mathbb{C})$, si legatura dintre aceste functii este

$$g(t_1,\dots,t_k)=h(t_1,\dots,t_{k-m},s,t_{k-m+1},\dots,t_k).$$

Relatia dorita este echivalenta cu

$$\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{\partial^k g}{\partial t_1\dots\partial t_k}(0,0,\dots,0)=\frac{\partial^{k+1}h}{\partial t_1\dots\partial t_k\partial t_{k+1}}(0,0,\dots,0).$$

Pentru $t:=(t_1,\dots,t_k)$ avem succesiv relatiile

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial t_k}(t)&=\frac{\partial h}{\partial t_{k+1}}(t_1,\dots,t_{k-m},s,t_{k-m+1},\dots,t_k)\\
\frac{\partial^m g}{\partial t_{k-m+1}\dots\partial t_k}(t)&=\frac{\partial^m h}{\partial t_{k-m+2}\dots\partial t_{k+1}}(t_1,\dots,t_{k-m},s,t_{k-m+1},\dots,t_k)\\
\frac{\partial^{m+1} g}{\partial t_{k-m}\dots\partial t_k}(t)&=\frac{\partial^{m+1} h}{\partial t_{k-m}\partial t_{k-m+2}\dots\partial t_{k+1}}(t_1,\dots,t_{k-m},s,t_{k-m+1},\dots,t_k)\\
\frac{\partial^k g}{\partial t_1\dots\partial t_k}(t)&=\frac{\partial^k h}{\partial t_1\dots\partial t_{k-m}\partial t_{k-m+2}\dots\partial t_{k+1}}(t_1,\dots,t_{k-m},s,t_{k-m+1},\dots,t_k)\\
\frac{\partial^k g}{\partial t_1\dots\partial t_k}(0,0,\dots,0)&=\frac{\partial^k h}{\partial t_1\dots\partial t_{k-m}\partial t_{k-m+2}\dots\partial t_{k+1}}(0,\dots,0,s,0,\dots,0).
\end{aligned}$$

Rezulta

$$\begin{aligned}\frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{\partial^k g}{\partial t_1\ldots\partial t_k}(0,\ldots,0) &= \frac{d}{ds}\Big|_{s=0}\frac{\partial^k h}{\partial t_1\ldots\partial t_{k-m}\partial t_{k-m+2}\ldots\partial t_{k+1}}(0,\ldots,0,s,0,\ldots,0)\\ &= \frac{\partial^{k+1} h}{\partial t_{k-m+1}\partial t_1\ldots\partial t_{k-m}\partial t_{k-m+2}\ldots\partial t_{k+1}}(0,\ldots,0)\\ &= \frac{\partial^{k+1} h}{\partial t_1\ldots\partial t_k\partial t_{k+1}}(0,\ldots,0)\end{aligned}$$

si demonstratia prin inductie se incheie. □

Lema 3.2.2. *Fie G_1, G_2 doua grupuri topologice si X o multime deschisa din $G_1 \times G_2$ si $h : X \to \mathbb{C}$ o functie din $C^k(X), k \geq 1$. Atunci derivatele partiale de ordin $\leq k$ ale lui h sunt continue de la X la $\mathbb{C}$ si are loc relatia*

$$D^k h((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(\lambda_{k1},\lambda_{k2})) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1,2}\partial^{\lambda_{1i_1}\lambda_{2i_2}\ldots\lambda_{ki_k}}h(x,y)$$

pentru orice $(x,y) \in X$.

Demonstrație. Cazul $k = 1$. Trebuie aratat ca

$$Dh((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12})) = \partial^{\lambda_{11}}h(x,y) + \partial^{\lambda_{12}}h(x,y)$$

Avem

$$\partial^{\lambda_{11}}h(x,y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}h(x\lambda_{11}(t),y) = Dh((x,y);(\lambda_{11},0))$$

deci functia $\partial^{\lambda_{11}}h : X \to \mathbb{C}$ este continua. Pe de alta parte

$$\partial^{\lambda_{12}}h(x,y) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}h(x,y\lambda_{11}(t)) = Dh((x,y);(0,\lambda_{12}))$$

deci si functia $\partial^{\lambda_{12}}h : X \to \mathbb{C}$ este continua.

In plus, $(\lambda_{11},0)(t)(0,\lambda_{12})(t) = (\lambda_{11}(t),\lambda_{12}(t)) = (\lambda_{11},\lambda_{12})(t)$. Din

$$Dh((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12})) = Dh((x,y);(\lambda_{11},0)) + Dh((x,y);(0,\lambda_{12}))$$

obtinem

$$Dh((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12})) = \partial^{\lambda_{11}}h(x,y) + \partial^{\lambda_{12}}h(x,y)$$

si analiza cazului $k = 1$ se incheie.

Cazul $k = 2$. Trebuie aratat ca

$$\begin{aligned}D^2h((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),(\lambda_{21},\lambda_{22})) =&\partial^{\lambda_{11}\lambda_{21}}h(x,y) + \partial^{\lambda_{11}\lambda_{22}}h(x,y)\\ &+ \partial^{\lambda_{12}\lambda_{21}}h(x,y) + \partial^{\lambda_{12}\lambda_{22}}h(x,y).\end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned}\partial^{\lambda_{11}\lambda_{21}} h(x,y) &= \partial^{\lambda_{11}}(\partial^{\lambda_{21}} h)(x,y) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \partial^{\lambda_{11}} h(x\lambda_{21}(t), y) \\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Dh(x\lambda_{21}(t), y); (\lambda_{11}, 0)) \\ &= D^2 h((x,y); (\lambda_{11}, 0), (\lambda_{21}, 0)).\end{aligned}$$

Similar obtinem

$$\begin{aligned}\partial^{\lambda_{11}\lambda_{22}} h(x,y) &= D^2 h((x,y); (\lambda_{11}, 0), (0, \lambda_{22})) \\ \partial^{\lambda_{12}\lambda_{22}} h(x,y) &= D^2 h((x,y); (0, \lambda_{12}), (0, \lambda_{22})) \\ \partial^{\lambda_{12}\lambda_{21}} h(x,y) &= D^2 h((x,y); (0, \lambda_{12}), (\lambda_{21}, 0)).\end{aligned}$$

Din relatiile de mai sus rezulta ca derivatele partiale de ordin 2 ale lui h sunt continue.

Avem

$$\begin{aligned}D^2 h((x,y);&(\lambda_{11}, \lambda_{12}), (\lambda_{21}, \lambda_{22})) \\ =&D^2 h((x,y); (\lambda_{11}, \lambda_{12}), (\lambda_{21}, 0)) + D^2 h((x,y); (\lambda_{11}, \lambda_{12}), (0, \lambda_{22})) \\ =&D^2 h((x,y); (\lambda_{11}, 0), (\lambda_{21}, 0)) + D^2 h((x,y); (0, \lambda_{12}), (\lambda_{21}, 0)) \\ &+ D^2 h((x,y); (\lambda_{11}, 0), (0, \lambda_{22})) + D^2 h((x,y); (0, \lambda_{12}), (0, \lambda_{22})) \\ =&\partial^{\lambda_{11}\lambda_{21}} h(x,y) + \partial^{\lambda_{11}\lambda_{22}} h(x,y) + \partial^{\lambda_{12}\lambda_{21}} h(x,y) + \partial^{\lambda_{12}\lambda_{22}} h(x,y)\end{aligned}$$

si analiza cazului $k = 2$ se incheie.

Cazul $k \geq 3$. Avem

$$\partial^{\lambda_{1i_1}\lambda_{2i_2}\ldots\lambda_{ki_k}} h(x,y) = D^k h((x,y); \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$$

unde $\gamma_j = (\lambda_{j1}, 0)$ daca $i_j = 1$ sau $\gamma_j = (0, \lambda_{j2})$ daca $i_j = 2$.

Din relatiile de mai sus rezulta ca derivatele partiale de ordin k ale lui h sunt continue.

Ca la cazul $k = 2$ avem

$$\begin{aligned}
D^k h((x,y);&(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(\lambda_{k-1,1},\lambda_{k-1,2}),(\lambda_{k1},\lambda_{k2})) \\
&= D^k h((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(\lambda_{k-1,1},\lambda_{k-1,2}),(\lambda_{k1},0)) \\
&\quad + D^k h((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(\lambda_{k-1,1},\lambda_{k-1,2}),(0,\lambda_{k2})) \\
&= D^k h((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(\lambda_{k-1,1},0),(\lambda_{k1},0)) \\
&\quad + D^k h((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(0,\lambda_{k-1,2}),(\lambda_{k1},0)) \\
&\quad + D^k h((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(\lambda_{k-1,1},0),(0,\lambda_{k2})) \\
&\quad + D^k h((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(0,\lambda_{k-1,2}),(0,\lambda_{k2})) \\
&= \sum_{i_1,\ldots,i_k=1,2} \partial^{\lambda_{1i_1}\lambda_{2i_2}\ldots\lambda_{ki_k}} h(x,y)
\end{aligned}$$

si demonstratia este completa. $\square$

Propozitia 3.2.3. *Fie $f \in C^k(G), k \geq 1$. Atunci are loc relatia*

$$\begin{aligned}
D^k(f\circ\pi)((x,y);&(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(\lambda_{k1},\lambda_{k2})) \\
&= \sum_{\ell=0}^{k} \sum_{\substack{i_1<\cdots<i_\ell \\ i_{\ell+1}<\cdots<i_k}} D^k f(xy;\lambda_{i_1 2},\ldots,\lambda_{i_\ell 2},\lambda^y_{i_{\ell+1}1},\ldots,\lambda^y_{i_k 1})
\end{aligned}$$

unde indicii din suma de mai sus indeplinesc conditia suplimentara

$$\{i_1,\ldots,i_l\} \cup \{i_{l+1},\ldots,i_k\} = \{1,\ldots,k\}.$$

In plus de aici rezulta ca daca $f \in C^\infty(G)$, atunci $f\circ\pi \in C^\infty(G\times G)$.

Demonstrație. Aplicand Lema 3.2.2 obtinem

$$D^k(f\circ\pi)((x,y);(\lambda_{11},\lambda_{12}),\ldots,(\lambda_{k1},\lambda_{k2})) = \sum_{i_1,\ldots,i_k=1,2} \partial^{\lambda_{1i_1}\lambda_{2i_2}\ldots\lambda_{ki_k}}(f\circ\pi)(x,y)$$

Inlocuind cele 2^k derivate partiale din membrul drept cu valorile lor date de Lema 3.2.1 obtinem suma din relatia ceruta. $\square$

Doua leme de continuitate

Aceasta subsectiune contine unele rezultate din [Fo45]. Reproducem si detaliile demonstratiilor lor, deoarece variante ale ideilor respective vor fi utilizate in continuare.

Fie X, Y, T spatii topologice si multimea $C(X,Y)$ a functiilor continue de la X la Y.

Consideram functiile $h : X \times T \to Y$ pentru care $H : T \to C(X, Y)$, $H(t) := h_t$, este o functie corect definita. Pentru $t \in T$ definim $h_t : X \to Y$, $h_t(x) := h(x, t)$.

Pe $C(X, Y)$ vom introduce topologia compact deschisa. Pentru $A \subseteq X, W \subseteq Y$ definim

$$M(A, W) = \{f \in C(X, Y); f(A) \subseteq W\}.$$

Topologia compact deschisa pe $C(X, Y)$ este aceea topologie in care o subbaza este formata din multimile $M(A, W)$ unde A este compacta in X si W este deschisa in Y adica cea mai mica topologie care contine multimile $M(A, W)$ unde A este compacta in X si W este deschisa in Y.

Lema 3.2.4. *Daca $h : X \times T \to Y$ este continua atunci $H : T \to C(X, Y)$ este continua.*

Demonstraţie. Fie A este compacta in X si W este deschisa in Y. Aratam ca multi mea $H^{-1}(M(A, W))$ este deschisa in T.

Fie $t_0 \in T$ astfel incat $t_0 \in H^{-1}(M(A, W))$. Este suficient sa aratam ca $H^{-1}(M(A, W))$ este vecinatate pentru t_0.

Avem $H(t_0) \in M(A, W)$, de unde rezulta $h_{t_0} \in M(A, W)$, adica $h_{t_0}(A) \subseteq W$.

Deci pentru orice $x \in A$ avem $h_{t_0}(x) \in W$, si $h(x, t_0) \in W, (\forall)x \in A$. Obtinem $A \times \{t_0\} \subseteq h^{-1}(W)$ si $h(A \times \{t_0\}) \subseteq W$. Cum $h^{-1}(W)$ este deschisa in $X \times T$ rezulta ca este o reuniune de multimi de forma $U_i \times V_i$ unde U_i este deschisa in X si V_i este deschisa in Y.

Deci

$$h^{-1}(W) = \bigcup_i (U_i \times V_i) \implies A \times \{t_0\} \subseteq \bigcup_i (U_i \times V_i).$$

Cum A este compacta rezulta ca $A \times \{t_0\}$ este compacta in $X \times T$ si obtinem o subacoperire finita adica

$$A \times \{t_0\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \times V_i).$$

Cum $\{t_0\} \subseteq V_i$, rezulta $t_0 \in V_i$, deci V_i este vecinatate deschisa a lui t_0.

Notam $V = \bigcap\limits_{i=1}^{n} V_i$ si V este vecinatate deschisa a lui t_0. Pentru a incheia demonstratia este suficient sa aratam ca $V \subseteq H^{-1}(M(A, W))$ ceea ce este echivalent cu $H(V) \in M(A, W)$, adica $h(x, t) \in W$ pentru orice $x \in A$ si $t \in V$.

Fie $t \in V$ si $x \in A$. Avem $t \in V_i$ pentru $i = 1, \ldots, n$. Avem $A \times \{t_0\} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_i \times V_i) \subseteq h^{-1}(W)$ si $(U_i \times V_i) \subseteq h^{-1}(W)$ si $h(U_i \times V_i) \subseteq W$. Din $x \in A$ si $A \times \{t_0\} \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{n} (U_i \times V_i)$ rezulta ca exista $i_0 \in \{1, \ldots, n\}$ astfel incat $x \in U_{i_0}$ si avem ca $(x, t) \in U_{i_0} \times V_{i_0}$.

Deci $h(x,t) \in h(U_{i_0} \times V_{i_0}) \subseteq W$ si se obtine $h(x,t) \in W$ si $V \subseteq H^{-1}(M(A,W))$ si demonstratia se incheie. $\square$

Lema 3.2.5. *Daca X este spatiu topologic regulat si local compact atunci are loc echivalenta: $h : X \times T \to Y$ este continua daca si numai daca $H : T \to C(X,Y)$ este continua. Afirmatia este adevarata daca $X = K$ un corp topologic separat local compact si $Y = G$ un grup topologic.*

Demonstraţie. Este suficient sa aratam ca daca H este continua atunci h este continua. Fie W este deschisa in Y si $(x_0, t_0) \in h^{-1}(W)$. Trebuie sa aratam ca $h^{-1}(W)$ este deschisa in $X \times T$ adica este vecinatate a lui (x_0, t_0). Deoarece $H(t_0) = h_{t_0}$ este continua in x_0 rezulta ca exista U vecinatate deschisa a lui x_0 astfel incat $H(t_0) \in M(U,W)$ si $h_{t_0}(U) \subseteq W$. Deoarece X este local compact rezulta ca exista R vecinatate deschisa a lui x_0 cu $\overline{R}$ compacta si $x_0 \in R \subseteq \overline{R} \subseteq U$.

Cum $M(\overline{R}, W)$ este deschisa in $C(X,Y)$ si contine $H(t_0)$ rezulta ca exista V o vecinatate deschisa a lui t_0 astfel incat

$$H(V) \subseteq M(\overline{R}, W) \subseteq M(R, W).$$

Deci $R \times V$ este o vecinatate deschisa a lui (x_0, t_0). Pentru a termina demonstratia mai trebuie aratat ca $R \times V \subseteq h^{-1}(W)$ ceea ce este echivalent cu $h(x,t) \in W, (\forall)x \in R, (\forall)t \in V$. Avem $H(t) = h_t \in H(V) \subseteq M(R,W)$ de unde obtinem ca $h_t(R) \subseteq W$ adica $h_t(x) = h(x,t) \in W, (\forall)x \in R$ ceea ce incheie demonstratia. $\square$

3.3 Grupuri topologice nilpotente de pas 2 vs. grupuri pre-Lie

Definitia 3.3.1. Fie G un grup. Notam

$$[G,G] = \{xyx^{-1}y^{-1}; x, y \in G\}$$

si

$$Z(G) = \{g \in G; xg = gx, (\forall)x \in G\}$$

numit *centrul* lui G si este un subgrup comutativ al lui G.

Spunem ca grupul G este *nilpotent de pas 2* daca $[G,G] \subseteq Z(G)$.

Definim aplicatia comutator

$$c : G \times G \to Z(G), \quad c(x,y) := xyx^{-1}y^{-1}.$$

Peste tot in cele ce urmeaza vom presupune ca G este grup nilpotent de pas 2, daca nu se mentioneaza explicit ca G este grup arbitrar.

Proprietati ale aplicatiei comutator

Lema 3.3.2. *Aplicatia comutator c este bi-morfism, adica:*

(a) $c(y,x) = (c(x,y))^{-1}$

(b) $c(x,ab) = c(x,a)c(x,b)$

(c) $c(ab,x) = c(a,x)c(b,x)$.

Demonstraţie. Demonstratia se bazeaza pe calcule directe, astfel:

a) $(c(x,y))^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = c(y,x)$.

b) Avem:

$$\begin{aligned} c(x,ab) = c(x,b)c(x,a) &\iff xabx^{-1}b^{-1}a^{-1} = xbx^{-1}b^{-1}xax^{-1}a^{-1} \\ &\iff abx^{-1}b^{-1} = (bx^{-1}b^{-1}x)ax^{-1} \\ &\iff abx^{-1}b^{-1} = abx^{-1}b^{-1}xx^{-1} \end{aligned}$$

ceea ce este adevarat.

c) In acest caz avem

$$\begin{aligned} c(ab,x) &= (c(x,ab))^{-1} \\ &= (c(x,a)c(x,b))^{-1} \\ &= (c(x,b))^{-1}(c(x,a))^{-1} \\ &= c(b,x)c(a,x) \\ &= c(a,x)c(b,x) \end{aligned}$$

Demonstratia se incheie. $\square$

Lema 3.3.3. *Fie G un grup nilpotent de pas 2 si $a,b \in G$. Atunci avem*

(a) $c(a^{-1},b^{-1}) = c(a,b)$

(b) $c(a, b^{-1}) = c(b, a)$

(c) $c(a^{-1}, b) = c(b, a)$

(d) $c(a^m, b^n) = (c(a, b))^{mn}$ *pentru orice* m, n *numere naturale.*

(e) $abba = baab = ab^2a = ba^2b$.

Demonstraţie. Si aceasta demonstratie se bazeaza pe calcule directe:

a) Avem

$$\begin{aligned} c(a^{-1}, b^{-1}) = c(a, b) &\iff a^{-1}b^{-1}ab = aba^{-1}b^{-1} \\ &\iff (ba)^{-1}ab = ab(ba)^{-1} \\ &\iff abba = baab \\ &\iff ab(bab^{-1}a^{-1})a^{-1}b^{-1} = 1 \\ &\iff aba^{-1}b^{-1}bab^{-1}a^{-1} = 1 \\ &\iff c(a, b)c(b, a) = 1 \end{aligned}$$

ceea ce este adevarat, si se demonstreaza si punctul e).

b) $c(a, b^{-1}) = c(b, a) \iff c(a, b^{-1})c(a, b) = 1 \iff c(a, 1) = 1$ ceea ce este adevarat.

c) $c(a^{-1}, b) = c((a^{-1})^{-1}, b^{-1}) = c(a, b^{-1}) = c(b, a)$.

d) Avem

$$\begin{aligned} c(a^m, b^n) &= c(a^m, b)c(a^m, b)\dots c(a^m, b) = (c(a^m, b))^n = (c(a, b)c(a, b)\dots c(a, b))^n \\ &= (c(a, b)^m)^n = (c(a, b))^{mn} \end{aligned}$$

si demonstratia este completa. □

Paranteza Lie pentru subgrupuri continue cu un parametru

Lema 3.3.4. *Fie* G *un grup topologic nilpotent de pas 2 si* $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ *doua morfisme continue de grupuri (din* $\Lambda(G)$*). Atunci avem*

$$(\forall t \in \mathbb{R}) \quad c(\alpha(1), \beta(t^2)) = c(\alpha(t), \beta(t)).$$

Demonstraţie. Relatia este evidenta pentru $t = 0$.

Pentru $t = \frac{m}{n}$ cu m, n numere naturale nenule. Daca notam

$\alpha(\frac{1}{n}) = a, \beta(\frac{m}{n^2}) = b$ relatia $c(\alpha(1), \beta(t^2)) = c(\alpha(t), \beta(t))$ este echivalenta cu $c(a^n, b^m) = c(a^m, b^n) \iff (c(a,b))^{nm} = (c(a,b))^{mn}$ ceea ce este adevarat. Deci am aratat ca $c(\alpha(1), \beta(t^2)) = c(\alpha(t), \beta(t))$ pentru orice t numar rational pozitiv.

Fie $t \in \mathbb{R}, t > 0$. Exista sirul t_n de numere rationale pozitive astfel incat $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$. Deoarece α, β sunt continue obtinem

$$c(\alpha(1), \beta(t^2)) = \lim_{n\to\infty} c(\alpha(1), \beta(t_n^2)) = \lim_{n\to\infty} c(\alpha(t_n), \beta(t_n)) = c(\alpha(t), \beta(t))$$

In final fie $t \in \mathbb{R}, t < 0$. Avem

$$c(\alpha(1), \beta(t^2)) = c(\alpha(-t), \beta(-t)) = c((\alpha(-t))^{-1}, (\beta(-t))^{-1}) = c(\alpha(t), \beta(t))$$

si demonstratia se incheie. □

Lema 3.3.5. *Fie G un grup nilpotent de pas 2, $a \in G$ si $\beta : \mathbb{R} \to G$ un morfism de grupuri. Definim $\lambda : \mathbb{R} \to G, \lambda(t) := c(a, \beta(t))$. Atunci λ este morfism.*

Demonstraţie. Trebuie demonstrat ca $(\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad \lambda(s+t) = \lambda(s)\lambda(t)$

Relatia $\lambda(s+t) = \lambda(t)\lambda(s)$ este echivalenta succesiv cu

$$\begin{aligned}
c(a, \beta(t+s)) &= c(a, \beta(t))c(a, \beta(s)) \\
&\iff a\beta(t)\beta(s)a^{-1}\beta(-t)\beta(-s) = a\beta(t)a^{-1}\beta(-t)a\beta(s)a^{-1}\beta(-s) \\
&\iff \beta(s)a^{-1}\beta(-t) = a^{-1}\beta(-t)a\beta(s)a^{-1} \\
&\iff \beta(s)a^{-1}\beta(-t)a\beta(-s)a^{-1}\beta(t)a = 1 \\
&\iff \beta(s)a^{-1}\beta(-t)a\beta(-s)\beta(t)c(\beta(-t), a^{-1}) = 1 \\
&\iff \beta(s)c(a^{-1}, \beta(-t))\beta(-s)c(\beta(-t), a^{-1}) = 1 \\
&\iff \beta(s)\beta(-s)c(a^{-1}, \beta(-t))c(\beta(-t), a^{-1}) = 1 \\
&\iff c(a, \beta(t))c(\beta(t), a) = 1
\end{aligned}$$

ceea ce este adevarat, si demonstratia se incheie.

Mai simplu, $\lambda(t)\lambda(s) = c(a, \beta(t))c(a, \beta(s)) = c(a, \beta(t)\beta(s)) = c(a, \beta(t+s)) = \lambda(t+s)$. □

Lema 3.3.6. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2 si $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ doua elemente din $\Lambda(G)$. Atunci avem*

$$(\forall t \in \mathbb{R})[\alpha, \beta](t) = c(\alpha(1), \beta(t))$$

si $[\alpha, \beta] \in \Lambda(G)$.

Demonstraţie. Din

$$\begin{aligned}(\alpha(\frac{t}{n})\beta(\frac{t}{n})\alpha(-\frac{t}{n})\beta(-\frac{t}{n}))^{n^2} &= (c(\alpha(\frac{t}{n}), \beta(\frac{t}{n}))^{n^2} \\ &= c((\alpha(\frac{t}{n}))^n, (\beta(\frac{t}{n}))^n) \\ &= c(\alpha(\frac{t}{n}n), \beta(\frac{t}{n}n)) \\ &= c(\alpha(t), \beta(t)) \\ &= c(\alpha(1), \beta(t^2))\end{aligned}$$

obtinem $[\alpha, \beta](t^2) = c(\alpha(1), \beta(t^2))$ si $[\alpha, \beta](t) = c(\alpha(1), \beta(t))$ pentru orice $t \geq 0$.

Pe de alta parte, din

$$\begin{aligned}(-t^2) &= ([\alpha, \beta](t^2))^{-1} \\ &= (c(\alpha(1), \beta(t^2)))^{-1} \\ &= c(\beta(t^2), \alpha(1)) \\ &= c(\alpha(1), (\beta(t^2))^{-1}) \\ &= c(\alpha(1), \beta(-t^2))\end{aligned}$$

obtinem $[\alpha, \beta](t) = c(\alpha(1), \beta(t))$ pentru $t < 0$.

Din Lema 3.3.5 rezulta ca $[\alpha, \beta] : \mathbb{R} \to G$ este morfism de grupuri. Deoarece G este grup topologic obtinem ca $[\alpha, \beta]$ este continua deci in $\Lambda(G)$. $\square$

Suma pentru subgrupuri continue cu un parametru

Lema 3.3.7. *Fie G un grup nilpotent de pas 2 si $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ doua morfisme de grupuri. Atunci $(\alpha(s)\beta(s))^n = \alpha(ns)\beta(ns)c(\alpha(-s), \beta(\frac{n(n-1)}{2}s))$ pentru orice $s \in \mathbb{R}$ si orice numar natural $n \geq 2$.*

Demonstraţie. Vom face demonstratia prin inductie dupa $n \geq 2$.

In cazul $n = 2$ avem

$$\begin{aligned}(\alpha(s)\beta(s))^2 = \alpha(s)\beta(s)\alpha(s)\beta(s) &= \alpha(s)\alpha(s)\alpha(-s)\beta(s)\alpha(s)\beta(-s)\beta(2s) \\ &= \alpha(2s)c(\alpha(-s), \beta(s))\beta(2s) = \alpha(2s)\beta(2s)c(\alpha(-s), \beta(s))\end{aligned}$$

Pentru trecerea de la n la $n+1$ avem

$$\begin{aligned}
(\alpha(s)\beta(s))^{n+1} &= (\alpha(s)\beta(s))^n\alpha(s)\beta(s) \\
&= \alpha(ns)\beta(ns)\alpha(s)\beta(s)c(\alpha(-s),\beta(\frac{n(n-1)}{2}s)) \\
&= \alpha(ns)\alpha(s)\alpha(-s)\beta(ns)\alpha(s)\beta(-ns)\beta((n+1)s)c(\alpha(-s),\beta(\frac{n(n-1)}{2}s)) \\
&= \alpha((n+1)s)c(\alpha(-s),\beta(ns))c(\alpha(-s),\beta(\frac{n(n-1)}{2}s))\beta((n+1)s) \\
&= \alpha((n+1)s)\beta((n+1)s)c(\alpha(-s),\beta(ns+\frac{n(n-1)}{2}s)) \\
&= \alpha((n+1)s)\beta((n+1)s)c(\alpha(-s),\beta(\frac{n(n+1)}{2}s))
\end{aligned}$$

si demonstratia se incheie. □

Lema 3.3.8. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2 si $\alpha,\beta:\mathbb{R}\to G$ doua morfisme continue de grupuri. Atunci avem*

$$c(\beta(s),\alpha(t)) = c(\beta(t),\alpha(s)), (\forall)s,t\in\mathbb{R}$$

Demonstraţie. Relatia este evidenta pentru $s=0$ sau $t=0$. In cazul in care s,t sunt numere rationale pozitive le luam de forma $s=\frac{m}{n}, t=\frac{p}{q}$ unde m,n,p,q sunt numere naturale nenule.

Relatia $c(\beta(s),\alpha(t)) = c(\beta(t),\alpha(s))$ este echivalenta succesiv cu

$$\begin{aligned}
c(\beta(\frac{m}{n}),\alpha(\frac{p}{q})) = c(\beta(\frac{p}{q}),\alpha(\frac{m}{n})) &\iff (c(\beta(\frac{1}{n}),\alpha(\frac{1}{q})))^{mp} = c(\beta(\frac{1}{q}),\alpha(\frac{1}{n}))^{mp} \\
&\iff (c(\beta(\frac{1}{nq}),\alpha(\frac{1}{q})))^{mpq} = c(\beta(\frac{1}{nq}),\alpha(\frac{1}{n}))^{mnp} \\
&\iff (c(\beta(\frac{1}{nq}),\alpha(\frac{1}{nq})))^{mnpq} = c(\beta(\frac{1}{nq}),\alpha(\frac{1}{nq}))^{mnpq}
\end{aligned}$$

ceea ce este adevarat.

Astfel am aratat ca $c(\beta(s),\alpha(t)) = c(\beta(t),\alpha(s))$ este adevarata pentru s,t numere rationale pozitive. Fie $s,t\in\mathbb{R}$, $s,t>0$. Exista sirurile s_n,t_n de numere rationale pozitive astfel incat $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = t$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$. Deoarece α,β sunt continue obtinem

$$c(\beta(s),\alpha(t)) = \lim_{n\to\infty} c(\beta(s_n),\alpha(t_n)) = \lim_{n\to\infty} c(\beta(t_n),\alpha(s_n)) = c(\beta(t),\alpha(s))$$

Raman cazurile $(s<0,t>0)$, $(s<0,t<0)$, $(s>0,t<0)$.

In cazul $(s<0,t>0)$ avem

$$c(\beta(s),\alpha(t)) = c(\alpha(t),\beta(-s)) = c(\alpha(-s),\beta(t)) = c(\beta(t),\alpha(s))$$

In cazul $(s < 0, t < 0)$ avem

$$c(\beta(s), \alpha(t)) = c(\beta(-s), \alpha(-t)) = c(\beta(-t), \alpha(-s)) = c(\beta(t), \alpha(s))$$

In cazul $(s > 0, t < 0)$ avem

$$c(\beta(s), \alpha(t)) = c(\alpha(-t), \beta(s)) = c(\alpha(s), \beta(-t)) = c(\beta(t), \alpha(s))$$

Din toate acestea rezulta

$$(\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad c(\beta(s), \alpha(t)) = c(\beta(t), \alpha(s)).$$

si demonstratia se incheie. □

Lema 3.3.9. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2 si $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ doua morfisme continue de grupuri. Atunci avem*

$$(\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad c(\beta(s), \alpha(t)) = c(\beta(1), \alpha(st)).$$

Demonstraţie. Ca in Lema 3.3.8 este suficient sa demonstram relatia ceruta pentru s, t sunt numere rationale pozitive pe care le luam de forma $s = \frac{m}{n}, t = \frac{p}{q}$ unde m, n, p, q sunt numere naturale nenule.

Daca notam $\alpha(\frac{1}{nq}) = a, \beta(\frac{1}{nq}) = b$ ramane sa demostram ca $c(a^{mq}, b^{np}) = c(a^{nq}, b^{mp})$, iar aceasta este echivalent cu $(c(a, b))^{mqnp} = (c(a, b))^{nqmp}$, ceea ce este adevarat si demonstratia se incheie. □

Lema 3.3.10. *Fie G un grup nilpotent de pas 2 si $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ doua morfisme de grupuri. Definim $\lambda : \mathbb{R} \to G, \lambda(t) := \alpha(t)\beta(t)c(\alpha(t), \beta(-\frac{t}{2}))$. Atunci λ este morfism.*

Demonstraţie. Trebuie demonstrat ca $(\forall s, t \in \mathbb{R}) \quad \lambda(s + t) = \lambda(s)\lambda(t)$

Relatia $\lambda(s + t) = \lambda(t)\lambda(s)$ este echivalenta cu

$$\begin{aligned}
&\alpha(t)\alpha(s)\beta(t)\beta(s)c(\alpha(t)\alpha(s), \beta(-\frac{t}{2})\beta(-\frac{s}{2})) \\
&= \alpha(t)\beta(t)c(\alpha(t), \beta(-\frac{t}{2}))\alpha(s)\beta(s)c(\alpha(s), \beta(-\frac{s}{2}))
\end{aligned}$$

Aceasta egalitate este echivalenta cu urmatoarea:

$$\begin{aligned}
&\alpha(s)\beta(t)\beta(s)c(\alpha(t), \beta(-\frac{t}{2}))c(\alpha(t), \beta(-\frac{s}{2}))c(\alpha(s), \beta(-\frac{t}{2}))c(\alpha(s), \beta(-\frac{s}{2})) \\
&= \beta(t)c(\alpha(t), \beta(-\frac{t}{2}))\alpha(s)\beta(s)c(\alpha(s), \beta(-\frac{s}{2}))
\end{aligned}$$

Aceasta echivalenta de egalitati poate fi continuata astfel:

$$\begin{aligned}
&\alpha(s)\beta(t)\beta(s)c(\alpha(t),\beta(-\frac{s}{2}))c(\alpha(s),\beta(-\frac{t}{2})) = \beta(t)\alpha(s)\beta(s)\\
\iff\ & \alpha(s)\beta(t)c(\alpha(t),\beta(-\frac{s}{2}))c(\alpha(s),\beta(-\frac{t}{2})) = \beta(t)\alpha(s)\\
\iff\ & c(\alpha(s),\beta(t))c(\alpha(t),\beta(-\frac{s}{2}))c(\alpha(s),\beta(-\frac{t}{2})) = 1\\
\iff\ & c(\alpha(s),\beta(\frac{t}{2}))c(\alpha(t),\beta(-\frac{s}{2})) = 1\\
\iff\ & c(\beta(\frac{s}{2}),\alpha(t)) = c(\beta(\frac{t}{2}),\alpha(s))\\
\iff\ & (c(\beta(\frac{s}{2}),\alpha(\frac{t}{2})))^2 = (c(\beta(\frac{t}{2}),\alpha(\frac{s}{2})))^2
\end{aligned}$$

ceea ce este adevarat, si incheie demonstratia. □

Lema 3.3.11. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2 si $\alpha,\beta:\mathbb{R}\to G$ doua elemente din $\Lambda(G)$. Atunci avem*

$$(\alpha+\beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)c(\alpha(t),\beta(-\frac{t}{2})), (\forall)t\in\mathbb{R}$$

si $\alpha+\beta\in\Lambda(G)$.

Demonstraţie. Avem

$$\begin{aligned}
c(\alpha(-\frac{t}{n}),\beta(\frac{n-1}{2}t)) &= (c(\alpha(-\frac{t}{2n}),\beta(\frac{(n-1)}{2}t))^2\\
&= (c(\alpha(-\frac{t}{2n}),\beta(\frac{n(n-1)}{2}\frac{t}{n}))^2\\
&= (c(\alpha(-\frac{t}{2n}),\beta(\frac{t}{n})))^{n(n-1)}\\
&= c(\alpha(-\frac{t}{2n}n),\beta(\frac{t}{n}(n-1)))\\
&= c(\alpha(-\frac{t}{2}),\beta(\frac{t(n-1)}{n}))
\end{aligned}$$

Mai departe

$$\begin{aligned}
(\alpha+\beta)(t) &= \lim_{n\to\infty}(\alpha(\frac{t}{n})\beta(\frac{t}{n}))^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\alpha(n\frac{t}{n})\beta(n\frac{t}{n})c(\alpha(-\frac{t}{n}),\beta(\frac{n-1}{2}t)) \\
&= \lim_{n\to\infty}\alpha(t)\beta(t)c(\alpha(-\frac{t}{2}),\beta(\frac{t(n-1)}{n})) \\
&= \alpha(t)\beta(t)c(\alpha(-\frac{t}{2}),\beta(t)) \\
&= \alpha(t)\beta(t)c(\beta(t),\alpha(\frac{t}{2})) \\
&= \alpha(t)\beta(t)(c(\beta(\frac{t}{2}),\alpha(\frac{t}{2})))^2 \\
&= \alpha(t)\beta(t)c(\beta(\frac{t}{2}),\alpha(t)) \\
&= \alpha(t)\beta(t)c(\alpha(-t),\beta(\frac{t}{2})) \\
&= \alpha(t)\beta(t)c(\alpha(t),\beta(-\frac{t}{2})).
\end{aligned}$$

Precizam ca am folosit continuitatea morfismelor α,β cand am trecut la limita. Din Lema 3.3.10 rezulta ca $\alpha+\beta:\mathbb{R}\to G$ este morfism. Deoarece G este grup topologic obtinem ca $\alpha+\beta$ este continua deci in $\Lambda(G)$. □

Subgrupuri cu un parametru in grupuri topologice generale

Urmatoarele patru leme(3.3.12–3.3.15) sunt valabile pentru grupuri topologice generale, deci nu vom utiliza ipoteza ca grupul G ar fi nilpotent de pas 2.

Lema 3.3.12. *Fie G un grup topologic, $\alpha,\beta:\mathbb{R}\to G$ doua morfisme continue de grupuri. Definim $\lambda:\mathbb{R}\to G, \lambda(t):=\alpha(t)\beta(t)$. Atunci λ este morfism daca si numai daca α,β comuta si in acest caz $\lambda=\alpha+\beta$.*

Demonstraţie. Aplicatia $\lambda:\mathbb{R}\to G$ este morfism de grupuri daca si numai daca pentru orice $s,t\in\mathbb{R}$ avem $\lambda(t+s)=\lambda(t)\lambda(s)$, ceea ce este echivalent cu $\alpha(t)\alpha(s)\beta(t)\beta(s)=\alpha(t)\beta(t)\alpha(s)\beta(s)$, deci cu $\alpha(s)\beta(t)=\beta(t)\alpha(s)$, adica α si β comuta.

Avem

$$(\alpha+\beta)(t)=\lim_{n\to\infty}(\alpha(\frac{t}{n})\beta(\frac{t}{n}))^n=\lim_{n\to\infty}(\alpha(\frac{t}{n}))^n(\beta(\frac{t}{n}))^n=\lim_{n\to\infty}\alpha(n\frac{t}{n})\beta(n\frac{t}{n})=\alpha(t)\beta(t)$$

deci $\lambda=\alpha+\beta$. □

Lema 3.3.13. *Fie G un grup topologic, $\alpha:\mathbb{R}\to G$ un morfism continuu de grupuri. Atunci*

$$\alpha+\alpha+\ldots+\alpha=n\alpha,(\forall)n\geq 2$$

Demonstraţie. Vom face demonstratia prin inductie dupa $n \geq 2$.

In cazul $n = 2$ deoarece α si α comuta obtinem pentru orice $t \in \mathbb{R}$

$$(\alpha + \alpha)(t) = \alpha(t)\alpha(t) = \alpha(t + t) = \alpha(2t) = 2\alpha(t),$$

de unde rezulta $\alpha + \alpha = 2\alpha$.

Trecerea de la n la $n + 1$: deoarece $n\alpha$ si α comuta obtinem pentru orice $t \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(\alpha + \alpha + \ldots + \alpha)(t) &= (n\alpha + \alpha)(t) = n\alpha(t)\alpha(t)\\ &= \alpha(nt)\alpha(t) = \alpha(nt + t) = \alpha((n + 1)t) = (n + 1)\alpha(t),\end{aligned}$$

de unde rezulta ca $\alpha + \alpha + \ldots + \alpha = (n + 1)\alpha$ si demonstratia se incheie. □

Lema 3.3.14. *Fie G un grup, $a, b \in \mathbb{R}$ si $\alpha : \mathbb{R} \to G$ un morfism de grupuri. Atunci $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$ si $a(b\alpha) = (ab)\alpha$.*

Demonstraţie. Deoarece $a\alpha, b\alpha$ comuta obtinem

$$(a\alpha + b\alpha)(t) = a\alpha(t)b\alpha(t) = \alpha(at)\alpha(bt) = \alpha(at + bt) = \alpha((a + b)t) = (a + b)\alpha(t)$$

pentru orce $t \in \mathbb{R}$ deci $(a + b)\alpha = a\alpha + b\alpha$.

Avem $a(b\alpha)(t) = b\alpha(at) = \alpha(bat) = (ab)\alpha(t)$ deci $a(b\alpha) = (ab)\alpha$. □

Lema 3.3.15. *Fie G un grup topologic, $a \in \mathbb{R}$ si $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to G$ doua morfisme continue de grupuri. Atunci*

$a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$ daca $\alpha + \beta : \mathbb{R} \to G$ exista.

Demonstraţie. Avem $(a(\alpha + \beta))(t) = (\alpha + \beta)(at) = \lim_{n\to\infty} (\alpha(\frac{at}{n})\beta(\frac{at}{n}))^n =$

$\lim_{n\to\infty} (a\alpha(\frac{t}{n})a\beta(\frac{t}{n}))^n = (a\alpha + a\beta)(t), (\forall)t \in \mathbb{R}$ deci $a(\alpha + \beta) = a\alpha + a\beta$.

Precizam ca am folosit doar existenta in G a limitei care defineste $\alpha + \beta$ si nu faptul ca $\alpha + \beta$ ar fi morfism sau aplicatie continua. □

Algebra Lie topologica a unui grup nilpotent de pas 2

In cele ce urmeaza vom demonstra detaliat Teorem 3.3.23, a carei demonstratie a fost doar schitata in [Ne06]. Pe parcurs vom obtine si alte cateva rezultate utile, de interes independent (de exemplu Propozitia 3.3.20).

Lema 3.3.16. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2 si $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(G)$. Atunci $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ si $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$.*

Demonstrație. Avem $\alpha + \beta = \beta + \alpha \iff (\alpha + \beta)(t) = (\beta + \alpha)(t) \iff$

$$\alpha(t)\beta(t)c(\beta(\frac{t}{2}), \alpha(t)) = \beta(t)\alpha(t)c(\alpha(\frac{t}{2}), \beta(t))$$

Notam $\alpha(\frac{t}{2}) = a$, $\beta(\frac{t}{2}) = b$ relatia anterioara este echivalenta succesiv cu

$$a^2b^2c(b, a^2) = b^2a^2c(a^2, b) \iff a^{-2}b^{-2}a^2b^2(c(b, a))^2 = (c(a, b))^2$$

deci cu $c(a^{-2}, b^{-2}) = (c(a, b))^2(c(a, b))^2$, adica $c(a^2, b^2) = (c(a, b))^4$, care este adevarata si obtinem $\alpha + \beta = \beta + \alpha$.

Avem $((\alpha + \beta) + \gamma)(t) = (\alpha + \beta)(t)\gamma(t)c(\gamma(\frac{t}{2}), (\alpha + \beta)(t)) =$

$\alpha(t)\beta(t)\gamma(t)c(\beta(\frac{t}{2}), \alpha(t))c(\gamma(\frac{t}{2}), \alpha(t))c(\gamma(\frac{t}{2}), \beta(t))$

Avem

$$\begin{aligned}
(\alpha + (\beta + \gamma))(t) &= \alpha(t)(\beta + \gamma)(t)c((\beta + \gamma)(\frac{t}{2}), \alpha(t)) \\
&= \alpha(t)\beta(t)\gamma(t)c(\gamma(\frac{t}{2}), \beta(t))c(\beta(\frac{t}{2}), \alpha(t))c(\gamma(\frac{t}{2}), \alpha(t)) \\
&= ((\alpha + \beta) + \gamma)(t)
\end{aligned}$$

deci $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$. □

Lema 3.3.17. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2 si $\alpha, \beta, \gamma \in \Lambda(G)$. Atunci avem*

(a) $[\beta, \alpha] = -[\alpha, \beta]$

(b) $[[\alpha, \beta], \gamma] + [[\beta, \gamma], \alpha] + [[\gamma, \alpha], \beta] = 0 \in \Lambda(G)$

(c) $[\alpha + \beta, \gamma] = [\alpha, \gamma] + [\beta, \gamma]$

(d) $[a\alpha, \gamma] = a[\alpha, \gamma]$ *pentru orice* $a \in \mathbb{R}$

Demonstrație. La punctul a) avem

$$\begin{aligned}
[\beta, \alpha] = -[\alpha, \beta] &\iff [\beta, \alpha](t) = (-[\alpha, \beta])(t) \\
&\iff c(\beta(1), \alpha(t)) = [\alpha, \beta](-t) = c(\alpha(1), \beta(-t)) \\
&\iff c(\beta(1), \alpha(t)) = c(\beta(t), \alpha(1))
\end{aligned}$$

ceea ce este adevarat.

Pentru punctul b) este suficient sa aratam ca $[[\alpha,\beta],\gamma] = 0 \in \Lambda(G)$. Avem

$$[[\alpha,\beta],\gamma](t) = c([\alpha,\beta](1),\gamma(t)) = c(c(\alpha(1),\beta(1)),\gamma(t)) = 1$$

pentru orice $t \in \mathbb{R}$ de unde obtinem $[[\alpha,\beta],\gamma] = 0 \in \Lambda(G)$.

La punctul c) avem

$$\begin{aligned}[\alpha+\beta,\gamma](t) &= c((\alpha+\beta)(1),\gamma(t))\\ &= c(\alpha(1)\beta(1)c(\beta(\frac{1}{2}),\alpha(1)),\gamma(t))\\ &= c(\alpha(1)\beta(1),\gamma(t))\\ &= c(\alpha(1),\gamma(t))c(\beta(1),\gamma(t))\end{aligned}$$

Avem

$$\begin{aligned}([\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma])(t) &= [\alpha,\gamma](t)[\beta,\gamma](t)c([\beta,\gamma](\frac{t}{2}),[\alpha,\gamma](t))\\ &= c(\alpha(1),\gamma(t))c(\beta(1),\gamma(t))\\ &= [\alpha+\beta,\gamma](t)\end{aligned}$$

de unde obtinem $[\alpha+\beta,\gamma] = [\alpha,\gamma]+[\beta,\gamma]$.

La punctul d) avem $[a\alpha,\gamma](t) = c(a\alpha(1),\gamma(t)) = c(\alpha(a),\gamma(t))$. Dar

$$a[\alpha,\gamma](t) = c(\alpha(1),\gamma(at)) = c(\alpha(a),\gamma(t)) = [a\alpha,\gamma](t)$$

de unde obtinem $[a\alpha,\gamma] = a[\alpha,\gamma]$ □

Fie X un spatiu topologic si G un grup topologic. Pe multimea $C(X,G)$ introducem topologia convergentei uniforme pe compactii din X in care multimile

$$\begin{aligned}E(\beta,K,V) &= \{\gamma \in C(X,G); (\beta(t))^{-1}\gamma(t) \in V, (\forall)t \in K\}\\ &= \{\gamma \in C(X,G); \gamma(t) \in \beta(t)V, (\forall)t \in K\}\end{aligned}$$

pentru orice submultime compacta $K \subseteq X$ si $V \in V_G(1)$ formeaza un sistem fundamental de vecinatati ale lui β. Pe multimea $\Lambda(G)$ consideram topologia indusa de pe $C(\mathbb{R},G)$.

Lema 3.3.18. *Fie G un grup topologic si $a \in \mathbb{R}$. Atunci aplicatia*

$$f : C(\mathbb{R},G) \to C(\mathbb{R},G), \quad f(\beta) := a\beta$$

este continua.

Demonstraţie. Daca $a = 0$ este evident deoarece f este constanta. Daca $a \neq 0$ continuitatea rezulta din $E(a\beta, aK, V) = E(\beta, K, V)$. $\square$

Lema 3.3.19. *Fie X, Y, T spatii topologice, $y_0 \in Y, t_0 \in T$ si K compacta in X, $f : X \times Y \to T$ o functie continua pentru care $f(K \times \{y_0\}) = \{t_0\}$. Atunci oricare ar fi V o vecinatate a lui t_0 exista U o vecinatate a lui y_0 astfel incat $f(K \times U) \subseteq V$.*

Demonstraţie. Fie $x \in K$. Deoarece f este continua in (x, y_0) si $f(x, y_0) = t_0$ rezulta ca exista D o vecinatate deschisa a lui (x, y_0) astfel incat $f(D) \subseteq V$. Multimea D poate fi luata de forma $D = S_x \times U_x$ unde S_x este o vecinatate deschisa a lui x si U_x este o vecinatate deschisa a lui y_0 si avem $f(S_x \times U_x) \subseteq V$. Din $K \subseteq \cup_{t \in K} S_t$ folosind K compacta obtin o subacoperire finita, adica exista $n \geq 1$ si $x_1, \ldots, x_n \in K$ astfel incat $K \subseteq S_{x_1} \cup S_{x_2} \cup \ldots \cup S_{x_n}$. Notam $U = U_{x_1} \cap \ldots \cap U_{x_n}$ si U este deschisa in Y si $y_0 \in U$, deci U este o vecinatate a lui y_0. Vreau sa arat ca $f(K \times U) \subseteq V$. Fie $x \in K$ si $y \in U$. Exista $j \in \{1, \ldots, n\}$ astfel incat $x \in S_{x_j}$ si $y \in U_{x_j}$. Din $f(x, y) \in f(S_{x_j} \times U_{x_j}) \subseteq V$ de unde rezulta ca $f(K \times U) \subseteq V$ si demonstratia se incheie. $\square$

Propozitia 3.3.20. *Fie X un spatiu topologic si G un grup topologic. Atunci aplicatia $\phi : C(X, G) \times C(X, G) \to C(X, G), \phi(\alpha, \beta) := \alpha\beta$ este continua, unde $\alpha\beta \in C(X, G), \alpha\beta(t) := \alpha(t)\beta(t)$.*

Demonstraţie. Fixam $\alpha, \beta \in C(X, G)$, K compacta in X si $V \in V_G(1)$. Trebuie sa gasim K_1, K_2 compacte in X si $V_1, V_2 \in V_G(1)$ astfel incat

$$\phi(E(\alpha, K_1, V_1) \times E(\beta, K_2, V_2)) \subseteq E(\alpha\beta, K, V)$$

Vom lua $K_1 = K_2 = K$. Consideram $\alpha_0 \in E(\alpha, K_1, V_1)$ si

$\beta_0 \in E(\beta, K_2, V_2)$ si fixam $t \in K$. Exista $v_1 \in V_1$ si $v_2 \in V_2$ astfel incat $\alpha_0(t) = \alpha(t)v_1$ si $\beta_0(t) = \beta(t)v_2$. Avem $\alpha_0(t)\beta_0(t) = \alpha(t)v_1\beta(t)v_2 =$

$\alpha(t)\beta(t)(\beta(t))^{-1}v_1\beta(t)v_2$.

Ramane sa aratam ca $(\beta(t))^{-1}v_1\beta(t)v_2 \in V$ pentru orice $v_1 \in V_1$ si $v_2 \in V_2$ si orice $t \in K$. Fie $f : G \times G \times G \to G, f(x, y, z) := x^{-1}yxz$. Aplicand lema anterioara pentru functia continua f si $X = G, Y = G \times G$, $y_0 = (1, 1), t_0 = 1$ si multimea compacta $\beta(K) \subseteq G$ obtinem ca exista U vecinatate deschisa a lui $(1, 1)$ astfel incat $f(\beta(K) \times U) \subseteq V$. Cum U vecinatate deschisa a lui $(1, 1)$ in $G \times G$ poate fi luata de forma $V_1 \times V_2$ cu $V_1, V_2 \in V_G(1)$. Din $f(\beta(K) \times V_1 \times V_2) \subseteq V$ rezulta ca $(\beta(t))^{-1}v_1\beta(t)v_2 \in V$ pentru orice $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ si orice $t \in K$ si demonstratia se incheie. $\square$

Propozitia 3.3.21. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2. Atunci*

1. *aplicatia* $\phi : \Lambda(G) \times \Lambda(G) \to \Lambda(G), \phi(\alpha, \beta) := \alpha + \beta$ *este continua.*

2. *aplicatia* $\psi : \Lambda(G) \times \Lambda(G) \to \Lambda(G), \psi(\alpha, \beta) := [\alpha, \beta]$ *este continua.*

Demonstrație. La punctul (1) deoarece G un grup topologic nilpotent de pas 2 rezulta ca are loc relatia $(\alpha + \beta)(t) = \alpha(t)\beta(t)c(\alpha(t), \beta(-\frac{t}{2})) =$

$\alpha(t)\beta(t)\alpha(t)\beta(-\frac{t}{2})\alpha(-t)\beta(\frac{t}{2})$ deci ϕ este un produs de 3 functii de la $\Lambda(G) \times \Lambda(G)$ la $C(\mathbb{R}, G)$ care sunt continue din propozitia anterioara. Deci si ϕ este continua. Aici am folosit si faptul ca $C(\mathbb{R}, G)$ este grup topologic. Pentru punctul (2) folosim relatia $[\alpha, \beta](t) = c(\alpha(1), \beta(t))$ si continuitatea aplicatiei ψ se obtine ca in propozitia anterioara si cu acelasi rationament ca la punctul (1). $\square$

Definitia 3.3.22 ([BCR81],[HM07])**.** Spunem ca grupul topologic G este *grup cu algebra Lie* daca spatiul topologic $\Lambda(G)$ are o structura de algebra Lie topologica peste $\mathbb{R}$ cu operatiile algebrice satisfacand urmatoarele conditii pentru orice $t, s \in \mathbb{R}$ si $\lambda, \gamma \in \Lambda(G)$,

$$\begin{aligned}(t\lambda)(s) &= \lambda(ts);\\ (\lambda + \gamma)(t) &= \lim_{n\to\infty} (\lambda(\frac{t}{n})\gamma(\frac{t}{n}))^n;\\ [\lambda, \gamma](t^2) &= \lim_{n\to\infty} (\lambda(\frac{t}{n})\gamma(\frac{t}{n})\lambda(-\frac{t}{n})\gamma(-\frac{t}{n}))^{n^2},\end{aligned}$$

unde convergenta este uniforma pe multimile compacte din $\mathbb{R}$.

Grupul topologic G este *grup pre-Lie* daca este grup cu algebra Lie si pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ neconstant exista o functie cu valori reale f de clasa C^∞ pe o vecinatate a lui $1 \in G$ astfel incat $Df(1; \gamma) \neq 0$.

Din rezultatele anterioare pentru grupuri topologice nilpotente de pas 2 obtinem urmatoarea teorema.

Teorema 3.3.23 ([Ne06])**.** *Orice grup topologic nilpotent de pas 2 este grup topologic cu algebra Lie.*

3.4 Grupul tangent al unui grup topologic cu algebra Lie

In aceasta subsectiune vom introduce urmatoarea notiune, care generalizeaza faptul ca fibratul tangent al oricarui grup Lie are o structura naturala de grup Lie (a se vedea de exemplu [Be06] si [HM07, Ex. 4.29(c)]).

Definitia 3.4.1. Fie G un grup topologic cu algebra Lie. *Grupul tangent* al lui G este notat cu $T(G)$ si este multimea $G \ltimes \Lambda(G)$ pe care introducem legea de compozitie $(x, \alpha)(y, \beta) = (xy, \alpha^y + \beta)$.

Propozitia 3.4.2. *Fie G un grup topologic cu algebra Lie. Atunci $T(G)$ este grup topologic.*

Schita demonstratiei. Asociativitatea rezulta din relatia

$$(\forall x \in G)(\forall \alpha, \beta \in \Lambda(G)) \quad (\alpha + \beta)^x = \alpha^x + \beta^x$$

care se poate verifica prin calcul direct.

Elementul neutru al lui $T(G)$ este $(1, 0) \in T(G)$ si simetricul lui (x, α) este $(x^{-1}, -\alpha^{x^{-1}})$. Continuitatea operatiilor pe $T(G)$ rezulta din faptul ca G este grup topologic, algebra Lie $\Lambda(G)$ este o algebra topologica, iar actiunea lui G pe $\Lambda(G)$ este continua. □

Propozitia 3.4.3. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2. Atunci $T(G) = G \ltimes \Lambda(G)$ este grup nilpotent de pas 2.*

Demonstrație. Fie $(g, \alpha), (h, \beta) \in T(G)$. Avem

$$\begin{aligned}
c((g, \alpha), (h, \beta)) &= (g, \alpha)(h, \beta)(g, \alpha)^{-1}(h, \beta)^{-1} \\
&= (gh, \alpha^h + \beta)(g^{-1}h^{-1}, -\beta^{h^{-1}} - \alpha^{g^{-1}h^{-1}}) \\
&= (c(g, h), (\alpha^h + \beta)^{g^{-1}h^{-1}} - \beta^{h^{-1}} - \alpha^{g^{-1}h^{-1}}) \\
&= (c(g, h), \alpha^{hg^{-1}h^{-1}} + \beta^{g^{-1}h^{-1}} - \beta^{h^{-1}} - \alpha^{g^{-1}h^{-1}}) \\
&= (c(g, h), (\alpha^{hg^{-1}h^{-1}} - \alpha^{g^{-1}h^{-1}}) + (\beta^{g^{-1}h^{-1}} - \beta^{h^{-1}})).
\end{aligned}$$

Aratam ca

$$Z(T(G)) = \{(x, \alpha) \in T(G); x \in Z(G), Im(\alpha) \subseteq Z(G)\}.$$

Daca $(x, \alpha) \in Z(T(G))$ atunci $(x, \alpha)(g, \lambda) = (g, \lambda)(x, \alpha)$ pentru orice $(g, \lambda) \in T(G)$.

Deci $x \in Z(G)$ si $\alpha^g + \lambda = \lambda^x + \alpha, (\forall)g \in G, (\forall)\lambda \in \Lambda(G)$. Din $x \in Z(G)$ obtinem ca $\lambda^x = \lambda$ si $\alpha^g = \alpha, (\forall)g \in G$ de unde rezulta ca $Im(\alpha) \subseteq Z(G)$ si se obtine relatia ceruta. Deoarece G este grup nilpotent de pas 2 avem ca daca $\alpha, \beta \in \Lambda(G)$ si $Im(\alpha), Im(\beta) \subseteq Z(G)$ atunci $Im(\alpha + \beta) \subseteq Z(G)$. Pentru a incheia demonstratia mai trebuie aratat ca daca $x, y \in G$ si $\beta \in \Lambda(G)$ atunci $Im(\beta^x - \beta^y) \subseteq Z(G)$.

Avem

$$\begin{aligned}(\beta^x - \beta^y)(t) &= \beta^x(t)\beta^y(-t)c(\beta^x(t), \beta^y(\frac{t}{2})) \\ &= x^{-1}\beta(t)xy^{-1}\beta(-t)yc(\beta^x(t), \beta^y(\frac{t}{2})) \\ &= c(x^{-1}, \beta(t))c(\beta(t), y^{-1})c(\beta^x(t), \beta^y(\frac{t}{2}))\end{aligned}$$

care este in $Z(G)$ deoarece G este grup nilpotent de pas 2. Rezulta ca $Im(\beta^x - \beta^y) \subseteq Z(G)$ si demonstratia se incheie. $\square$

Teorema 3.4.4. *Fie G un grup topologic nilpotent de pas 2. Atunci $T(G) = G \ltimes \Lambda(G)$ este grup pre-Lie daca si numai daca G este grup pre-Lie si oricare ar fi $\alpha \in \Lambda(G), \alpha \neq 0$ exista $\psi : \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ liniara si continua astfel incat $\psi(\alpha) \neq 0$.*

Demonstraţie. Pentru inceput sa demonstram ca $T(G) = G \ltimes \Lambda(G)$ este grup pre-Lie. Consideram elementul $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Lambda(T(G))$ cu $\gamma_1 \neq 0 \in \Lambda(G)$. Deoarece G este grup pre-Lie rezulta ca exista $f : G \to \mathbb{R}$ de clasa C^∞ pe o vecinatate U a lui $1 \in G$ astfel incat $Df(1; \gamma_1) \neq 0$.

Definim $h : T(G) \to \mathbb{R}$ prin $h(x, \lambda) := f(x)$ care este de clasa C^∞ pe

$U \times \Lambda(G)$ vecinatate a lui $(1, 0) \in T(G)$. Avem egalitatea

$$Dh((1, 0); (\gamma_1, \gamma_2)) = Df(1; \gamma_1) \neq 0.$$

Consideram elementul $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Lambda(T(G))$ cu $\gamma_1 = 0 \in \Lambda(G)$ si $\gamma_2 : \mathbb{R} \to \Lambda(G)$ pentru care exista $t_0 \in \mathbb{R}$ astfel incat $\gamma_2(t_0) \neq 0 \in \Lambda(G)$. In plus γ_2 verifica relatia $\gamma_2(t + s) = \gamma_2(t) + \gamma_2(s), (\forall)t, s \in \mathbb{R}$ adica γ_2 este morfism continuu de grupuri si avem $\gamma_2(t) = t\gamma_2(1), (\forall)t \in \mathbb{R}$.

Din $\gamma_2(t_0) \neq 0 \in \Lambda(G)$ rezulta ca exista $\psi : \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ liniara si continua astfel incat $\psi(\gamma_2(t_0)) \neq 0$. Definim $h : T(G) \to \mathbb{R}$ prin $h(x, \lambda) := \psi(\lambda)$ care este de clasa C^∞ pe $T(G)$.

Avem

$$\begin{aligned}Dh((1, 0); (\gamma_1, \gamma_2)) &= \lim_{t\to 0} \frac{h(1, \gamma_2(t)) - h(1, 0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\psi(\gamma_2(t)) - \psi(0)}{t} \\ &= \lim_{t\to 0} \frac{t\psi(\gamma_2(1))}{t} = \psi(\gamma_2(1)) = \frac{\psi(\gamma_2(t_0))}{t_0} \neq 0\end{aligned}$$

deci $T(G) = G \ltimes \Lambda(G)$ este grup pre-Lie.

Presupunem ca $T(G) = G \ltimes \Lambda(G)$ este grup pre-Lie si demonstram ca G este grup pre-Lie. Fie $\alpha \in \Lambda(G), \alpha \neq 0$. Deoarece $T(G) = G \ltimes \Lambda(G)$ este grup pre-Lie pentru $(\alpha, 0) \in$

$\Lambda(T(G))$ exista $h : T(G) \to \mathbb{R}$ de clasa C^∞ pe $U \times V$ vecinatate a lui $(1, 0) \in T(G)$ si $Dh((1, 0); (\alpha, 0)) \neq 0$.

Definim $f : G \to \mathbb{R}$ prin $f(x) := h(x, 0)$.

Deoarece $Df(1; \alpha) = Dh((1, 0); (\alpha, 0))$ rezulta ca $Df(1; \alpha) \neq 0$ de unde obtinem ca G este grup pre-Lie.

Fie $\alpha \in \Lambda(G), \alpha \neq 0$. Trebuie sa gasim $\psi : \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ liniara si continua astfel incat $\psi(\alpha) \neq 0$. Deoarece G este grup pre-Lie rezulta ca exista

$f : G \to \mathbb{R}$ de clasa C^∞ pe o vecinatate U a lui $1 \in G$ astfel incat $Df(1, \alpha) \neq 0$. Fie $\psi : \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ data prin $\psi(\lambda) := Df(1, \lambda)$. Deoarece

$\psi(\alpha) = Df(1, \alpha) \neq 0$ si derivata lui f este liniara si continua rezulta ca ψ verifica cerinta si demonstratia se incheie. $\square$

3.5 Note bibliografice

Propozitia 3.2.3 a fos enuntata fara demonstratie in [BCR81]. Demonstratia pe care o prezentam aici este inclusa in articolul nostru [Nic14].

Lemele 3.2.4–3.2.5 de continuitate sunt preluate din [Fo45].

Toate rezultatele despre grupuri nilpotente de pas 2 sunt originale cu exceptia Teoremei 3.3.23 care apare in [Ne06] doar cu ideea demonstratiei.

Capitolul 4

Momente pentru reprezentari finit dimensionale

In acest capitol stabilim cateva proprietati elementare ale aplicatiei moment pentru reprezentari unitare de grupuri topologice, in cazul reprezentarilor pe spatii Hilbert finit dimensionale. Reprezentarile pe spatii Hilbert infinit dimensionale vor fi studiate in Capitolul 5. Deoarece aceasta teza de doctorat este locul in care se studiaza pentru prima oara momentele reprezentarilor de grupuri topologice arbitrare, am considerat necesar sa incepem acest studiu prin a considera cu atentie reprezentarile finit dimensionale.

In Teorema 4.1.6 si Teorema 4.1.7 stabilim proprietati de convexitate ale imaginii aplicatiei moment pentru produse tensoriale de reprezentari. Propozitia 4.1.3 arata cum se comporta multimea moment la compuneri cu morfisme de grupuri topologice. Propozitia 4.2.2 arata ca pentru grupurile topologice care au proprietatea Trotter valorile aplicatiei moment sunt functionale liniare, exact ca si in cazul reprezentarilor de grupuri Lie.

4.1 Proprietati de baza ale aplicatiei moment

Fie G un grup topologic, V un spatiu Hilbert complex cu grupul unitar notat cu $U(V) := \{T \in B(V); TT^* = T^*T = 1\}$. Consideram $\rho : G \to U(V)$ reprezentare unitara, adica un morfism de grupuri pentru care aplicatia $G \times V \to V, (g, y) \mapsto \rho(g)y$ este continua. Reamintim ca spatiul vectorilor de clasa C^∞ pentru reprezentarea ρ este

$$V_\infty := \{y \in V \mid \rho(\cdot)y \in C^\infty(G, V)\}.$$

Derivata reprezentarii $\rho : G \to U(V)$ este

$$d\rho : \Lambda(G) \to \mathrm{End}\,(V_\infty), \quad d\rho(\gamma)y = \lim_{t\to 0} \frac{\rho(\gamma(t))y - y}{t}$$

pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ si $y \in V_\infty$, iar aplicatia moment a lui ρ este

$$\Psi_\rho : V_\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{\Lambda(G)}, \quad \Psi_\rho(y) = \frac{1}{i}\frac{(d\rho(\cdot)y, y)}{(y, y)}.$$

Inzestram multimea $\mathbb{R}^{\Lambda(G)}$ a tuturor functiilor $\Lambda(G) \to \mathbb{R}$ cu topologia convergentei uniforme pe submultimile compacte din $\Lambda(G)$. Definim

$$I_\rho^0 := \Psi_\rho(V_\infty \setminus \{0\})$$

si *multimea moment* I_ρ este inchiderea multimii I_ρ^0.

Notam cu $\Omega := \{v \in V \mid (v, v) = 1\}$ sfera unitate din V. Sa observam ca $I_\rho^0 = \Psi_\rho(\Omega)$. Daca spatiul Hilbert V este finit dimensional, sfera unitate Ω este compacta si cum Ψ_ρ este continua, rezulta ca I_ρ^0 este compacta deci si inchisa in $\mathbb{R}^{\Lambda(G)}$ si in acest caz $I_\rho = I_\rho^0$.

Daca spatiul Hilbert V este finit dimensional atunci $V_\infty = V$ (a se vedea Corolarul 5.3.8). In acest capitol toate spatiile Hilbert sunt presupuse finit dimensionale.

Propozitia 4.1.1. *Fie G un grup topologic, V un spatiu Hilbert complex si V_1 un subspatiu liniar inchis in V si notam*

$$V_2 = V_1^\perp = \{w \in V \mid (\forall v \in V_1) \quad (w, v) = 0\}.$$

Fie $\rho_1 : G \to U(V_1)$ si $\rho_2 : G \to U(V_2)$ doua reprezentari unitare ale lui G si definim $\rho := \rho_1 \oplus \rho_2 : G \to B(V)$ prin $\rho(g)(v_1 + v_2) := \rho_1(g)(v_1) + \rho_2(g)(v_2)$. Atunci ρ este reprezentare unitara a lui G si

$$I_\rho^0 = \{tf_1 + (1-t)f_2 \mid t \in [0, 1], f_1 \in I_{\rho_1}^0, f_2 \in I_{\rho_2}^0\}.$$

Demonstraţie. Reamintim ca $V = V_1 \oplus V_2$, $(v_1, v_2) = 0$ si $\|v_1 + v_2\|^2 = \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2$ pentru $v_1 \in V_1$ si $v_2 \in V_2$. Pentru $v \in V$ si $w \in V$ avem

$$\begin{aligned}
\rho(g)(v + w) &= \rho(g)(v_1 + v_2 + w_1 + w_2) \\
&= \rho_1(g)(v_1 + w_1) + \rho_2(g)(v_2 + w_2) \\
&= \rho_1(g)(v_1) + \rho_1(g)(w_1) + \rho_2(g)(v_2) + \rho_2(g)(w_2) \\
&= \rho(g)(v) + \rho(g)(w).
\end{aligned}$$

Pentru $z \in \mathbb{C}$, $v \in V$ avem $\rho(g)(zv) = \rho(g)(zv_1 + zv_2) = \rho_1(g)(zv_1) + \rho_2(g)(zv_2) = z\rho_1(g)(v_1) + z\rho_2(g)(v_2) = z\rho(g)(v)$. Pentru $z \in V$ avem

$$\begin{aligned}\|\rho(g)(v)\|^2 &= \|\rho_1(g)(v_1) + \rho_2(g)(v_2)\|^2\\ &= \|\rho_1(g)(v_1)\|^2 + \|\rho_2(g)(v_2)\|^2\\ &= \|v_1\|^2 + \|v_2\|^2\\ &= \|v_1 + v_2\|^2\\ &= \|v\|^2\end{aligned}$$

de unde rezulta ca $\rho(g) \in U(V), (\forall)g \in G$ si ρ este reprezentare unitara a lui G.

Fie Ω_1, Ω_2 si Ω sferele unitate din V_1, V_2 si V. Notam cu Ψ_1, Ψ_2 si Ψ aplicatiile moment pentru ρ_1, ρ_2 si ρ.

Pentru $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si $v_1 \in V_1, v_2 \in V_2$ notam cu $v = z_1v_1 + z_2v_2$. Aratam ca

$$d\rho(\gamma)v = z_1 d\rho_1(\gamma)v_1 + z_2 d\rho_2(\gamma)v_2$$

Avem

$$\begin{aligned}d\rho(\gamma)v &= \lim_{t\to 0}\frac{\rho(\gamma(t))v - v}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{z_1\rho_1(\gamma(t))v_1 + z_2\rho_2(\gamma(t))v_2 - z_1v_1 - z_2v_2}{t}\\ &= z_1 d\rho_1(\gamma)v_1 + z_2 d\rho_2(\gamma)v_2.\end{aligned}$$

Mai departe avem

$$\begin{aligned}(d\rho(\gamma)v, v) &= (z_1 d\rho_1(\gamma)v_1 + z_2 d\rho_2(\gamma)v_2, z_1v_1 + z_2v_2)\\ &= (z_1 d\rho_1(\gamma)v_1, z_1v_1) + (z_2 d\rho_2(\gamma)v_2, z_2v_2)\\ &= |z_1|^2(d\rho_1(\gamma)v_1, v_1) + |z_2|^2(d\rho_2(\gamma)v_2, v_2).\end{aligned}$$

Din cele de mai sus obtinem ca

$$\Psi(v)(\gamma) = |z_1|^2\Psi_1(v_1)(\gamma) + |z_2|^2\Psi_2(v_2)(\gamma)$$

si

$$\Psi(v) = |z_1|^2\Psi_1(v_1) + |z_2|^2\Psi_2(v_2)$$

Pentru $v \in \Omega$ exista $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ si $v_1 \in \Omega_1, v_2 \in \Omega_2$ astfel incat $v = z_1v_1 + z_2v_2$ si $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ si folosind relatia anterioara obtinem egalitatea ceruta. $\square$

Urmatorul rezultat de topologie genarala este binecunoscut, dar il demonstram pentru completitudine.

Lema 4.1.2. *Fie X si Y doua spatii topologice si $f: X \to Y$ o functie continua. Atunci $\overline{f(\overline{A})} = \overline{f(A)}$ pentru orice multime $A \subseteq X$.*

Demonstrație. Din $A \subseteq \overline{A}$ rezulta ca $f(A) \subseteq f(\overline{A})$ si de aici obtinem

$$\overline{f(A)} \subseteq \overline{f(\overline{A})}$$

Aratam ca

$$f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$$

Fie $y_0 \in f(\overline{A})$. Exista $x_0 \in \overline{A}$ astfel incat $y_0 = f(x_0)$. Presupunem prin reducere la absurd ca $y_0 \notin \overline{f(A)}$. Exista D deschisa in Y astfel incat $y_0 \in D$ si $D \cap f(A) = \emptyset$. Din $y_0 = f(x_0) \in D$ rezulta ca $x_0 \in f^{-1}(D)$. Deoarece f este continua rezulta ca $f^{-1}(D)$ este deschisa in X, deci vecinatate a lui x_0. Exista W deschisa in X astfel incat $x_0 \in W \subseteq f^{-1}(D)$ si de aici obtinem ca $f(W) \subseteq D$. Din $f(W) \subseteq D$ si $D \cap f(A) = \emptyset$ rezulta ca $f(W) \cap f(A) = \emptyset$. Deci $W \cap A = \emptyset$ ceea ce contrazice faptul ca $x_0 \in \overline{A}$ si obtinem ca $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$. De mai sus rezulta ca $\overline{f(\overline{A})} \subseteq \overline{f(A)}$ si impreuna cu prima incluziune obtinem concluzia si demonstratia se incheie. □

Propozitia 4.1.3. *Fie $\rho : G \to U(V)$ o reprezentare unitara a grupului topologic G. Fie H un grup topologic si $\phi\colon H \to G$ un morfism continuu. Definim $p : \mathbb{R}^{\Lambda(G)} \to \mathbb{R}^{\Lambda(H)}$ prin $p(f) := f \circ \Lambda(\phi)$, unde $\Lambda(\phi)\colon \Lambda(H) \to \Lambda(G)$, $\Lambda(\phi)(\gamma) := \phi \circ \gamma$. Atunci $I^0_{\rho\circ\phi} = p(I^0_\rho)$.*

Demonstrație. Notam cu Ψ, Ψ_1 aplicatiile moment pentru ρ si $\rho \circ \phi$. Avem $p(I^0_\rho) = \{\Psi(v) \circ \Lambda(\phi) \mid v \in \Omega\}$ si $I^0_{\rho\circ\phi} = \{\Psi_1(v) \mid v \in \Omega\}$. Aratam ca

$$d(\rho \circ \phi) = d\rho \circ \Lambda(\phi).$$

Pentru $\gamma \in \Lambda(H)$ si $v \in V$ avem

$$d(\rho \circ \phi)(\gamma)v = \lim_{t\to 0} \frac{((\rho \circ \phi)(\gamma(t)))v - v}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\rho(\phi(\gamma(t))v - v}{t}$$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{\rho((\phi \circ \gamma)(t))v - v}{t} = d\rho(\phi \circ \gamma)v.$$

Am obtinut egalitatile

$$d(\rho \circ \phi)(\gamma)v = d\rho(\phi \circ \gamma)v, d(\rho \circ \phi)(\gamma) = d\rho(\phi \circ \gamma)$$

si

$$d(\rho \circ \phi) = d\rho \circ \Lambda(\phi).$$

Pentru $\gamma \in \Lambda(H)$ si $v \in V$ avem

$$\Psi_1(v)(\gamma) = \frac{1}{i}(d(\rho \circ \phi)(\gamma)v, v) = \frac{1}{i}(d\rho(\phi \circ \gamma)v, v)$$

$$= \Psi(v)(\phi \circ \gamma) = (\Psi(v) \circ \Lambda(\phi))(\gamma)$$

Deci $\Psi(v) \circ \Lambda(\phi) = \Psi_1(v)$ si $I^0_{\rho \circ \phi} = p(I^0_\rho)$. □

Corolarul 4.1.4. *Fie $\rho : G \to U(V)$ o reprezentare unitara a grupului topologic G si H un subgrup inchis in G. Definim $p : \mathbb{R}^{\Lambda(G)} \to \mathbb{R}^{\Lambda(H)}$ prin $p(f) := f|_{\Lambda(H)}$. Atunci $I^0_{\rho|_H} = p(I^0_\rho)$.*

Demonstraţie. Rezulta din lema anterioara cand morfismul ϕ este incluziunea lui H in G. □

Definitia 4.1.5. Pentru orice spatiu vectorial real $\mathcal{V}$ si orice submultime $A \subseteq \mathcal{V}$ notam $\operatorname{conv}(A)$ *acoperirea convexa* a lui A, adica intersectia tuturor submultimilor convexe ale lui $\mathcal{V}$ care o contin pe A.

Teorema 4.1.6. *Fie $\rho_j : G_j \to U(V_j)$ reprezentari unitare finit dimensionale de grupuri topologice pentru $j = 1, 2$.*

Definim $\iota\colon \mathbb{R}^{\Lambda(G_1)} \times \mathbb{R}^{\Lambda(G_2)} \to \mathbb{R}^{\Lambda(G_1)\times\Lambda(G_2)}$ prin $(\iota(f_1, f_2))(\gamma_1, \gamma_2) := f_1(\gamma_1) + f_2(\gamma_2)$ si $p_j\colon \mathbb{R}^{\Lambda(G_1)\times\Lambda(G_2)} \to \mathbb{R}^{\Lambda(G_j)}$ pentru $j = 1, 2$ prin $p_2(f)(\gamma_2) := f(1, \gamma_2)$ si $p_1(f)(\gamma_1) := f(\gamma_1, 1)$. Fie $V = V_1 \otimes V_2$ si $\rho = \rho_1 \otimes \rho_2, \rho : G_1 \times G_2 \to U(V)$ o reprezentare a lui $G_1 \times G_2$ data prin $\rho(g_1, g_2)v_1 \otimes v_2 = \rho_1(g_1)v_1 \otimes \rho_2(g_2)v_2$.

Atunci avem $\iota(I^0_{\rho_1} \times I^0_{\rho_2}) \subseteq I^0_\rho$ si $p_j(I^0_\rho) \subseteq \operatorname{conv}(I^0_{\rho_j})$ pentru $j = 1, 2$.

Teorema 4.1.6 arata in particular ca sunt bine definite aplicatiile

$$I^0_{\rho_1} \times I^0_{\rho_2} \xrightarrow{\iota} I^0_\rho \xrightarrow{(p_1,p_2)} \operatorname{conv}(I^0_{\rho_1}) \times \operatorname{conv}(I^0_{\rho_2})$$

Demonstratia Teoremei 4.1.6. Fie Ω_1, Ω_2 si Ω sferele unitate din V_1, V_2 si V. Notam cu Ψ_1, Ψ_2 si Ψ aplicatiile moment pentru ρ_1, ρ_2 si ρ.

Aratam ca pentru $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Lambda(G_1) \times \Lambda(G_2)$ are loc egalitatea

$$d\rho(\gamma)v_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes d\rho_2(\gamma_2)v_2 + d\rho_1(\gamma_1)v_1 \otimes v_2.$$

Avem

$$d\rho(\gamma)v_1 \otimes v_2 = \lim_{t\to 0} \frac{\rho(\gamma(t))v_1 \otimes v_2 - v_1 \otimes v_2}{t}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{t\to 0} \frac{\rho_1(\gamma_1(t))v_1 \otimes \rho_2(\gamma_2(t))v_2 - v_1 \otimes v_2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\rho_1(\gamma_1(t))v_1 \otimes \rho_2(\gamma_2(t))v_2 - \rho_1(\gamma_1(t))v_1 \otimes v_2}{t} \\
&\quad + \lim_{t\to 0} \frac{\rho_1(\gamma_1(t))v_1 \otimes v_2 - v_1 \otimes v_2}{t} \\
&= \lim_{t\to 0} \frac{\rho_1(\gamma_1(t))v_1 \otimes (\rho_2(\gamma_2(t))v_2 - v_2)}{t} \\
&\quad + \lim_{t\to 0} \frac{(\rho_1(\gamma_1(t))v_1 - v_1) \otimes v_2}{t} \\
&= v_1 \otimes d\rho_2(\gamma_2)v_2 + d\rho_1(\gamma_1)v_1 \otimes v_2
\end{aligned}$$

Aratam ca pentru $v_1 \in \Omega_1, v_2 \in \Omega_2$ avem

$$(d\rho(\gamma)v_1 \otimes v_2, v_1 \otimes v_2) = (d\rho_1(\gamma_1)v_1, v_1) + (d\rho_2(\gamma_2)v_2, v_2).$$

Avem

$$(d\rho(\gamma)v_1 \otimes v_2, v_1 \otimes v_2) = (v_1 \otimes d\rho_2(\gamma_2)v_2, v_1 \otimes v_2) + (d\rho_1(\gamma_1)v_1 \otimes v_2, v_1 \otimes v_2)$$

$$= (v_1, v_1)(d\rho_2(\gamma_2)v_2, v_2) + (v_2, v_2)(d\rho_1(\gamma_1)v_1, v_1)$$

$$= (d\rho_1(\gamma_1)v_1, v_1) + (d\rho_2(\gamma_2)v_2, v_2)$$

Din egalitatea anterioara obtinem ca pentru $v_1 \in \Omega_1, v_2 \in \Omega_2$ are loc relatia

$$\Psi(v_1 \otimes v_2)(\gamma) = \Psi_1(v_1)(\gamma_1) + \Psi_2(v_2)(\gamma_2)$$

Deoarece pentru orice $v_1 \in \Omega_1, v_2 \in \Omega_2$ avem $v_1 \otimes v_2 \in \Omega$ si aplicand relatia de mai sus obtinem

$$\iota(I^0_{\rho_1} \times I^0_{\rho_2}) \subseteq I^0_\rho$$

Fie $\{e_1, \ldots, e_m\}$ o baza ortonormata a lui V_1. Pentru $v \in \Omega$ putem scrie

$$v = \sum_{k=1}^m e_k \otimes w_k$$

unde $w_k \in V_2 \setminus \{0\}$ pentru $k = 1, \ldots, m$ si $\sum\limits_{k=1}^m \|w_k\|^2 = 1$.

Aratam ca pentru $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) \in \Lambda(G_1) \times \Lambda(G_2)$ avem

$$\Psi(v)(\gamma) = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^m (d\rho_2(\gamma_2)w_k, w_k) + \frac{1}{i} \sum_{k,l=1}^m (d\rho_1(\gamma_1)e_k, e_l)(w_k, w_l)$$

Avem

$$\begin{aligned}\Psi(v)(\gamma) =&\frac{1}{i}(d\rho(\gamma)v, v)\\ =&\frac{1}{i}(\sum_{k=1}^{m} d\rho(\gamma)e_k \otimes w_k, \sum_{l=1}^{m} e_l \otimes w_l)\\ =&\frac{1}{i}\sum_{k,l=1}^{m}(d\rho(\gamma)e_k \otimes w_k, e_l \otimes w_l)\\ =&\frac{1}{i}\sum_{k,l=1}^{m}(e_k \otimes d\rho_2(\gamma_2)w_k + d\rho_1(\gamma_1)e_k \otimes w_k, e_l \otimes w_l)\\ =&\frac{1}{i}\sum_{k,l=1}^{m}(e_k \otimes d\rho_2(\gamma_2)w_k, e_l \otimes w_l) + \frac{1}{i}\sum_{k,l=1}^{m}(d\rho_1(\gamma_1)e_k \otimes w_k, e_l \otimes w_l)\\ =&\frac{1}{i}\sum_{k,l=1}^{m}(e_k, e_l)(d\rho_2(\gamma_2)w_k, w_l) + \frac{1}{i}\sum_{k,l=1}^{m}(d\rho_1(\gamma_1)e_k, e_l)(w_k, w_l)\\ =&\frac{1}{i}\sum_{k=1}^{m}(d\rho_2(\gamma_2)w_k, w_k) + \frac{1}{i}\sum_{k,l=1}^{m}(d\rho_1(\gamma_1)e_k, e_l)(w_k, w_l).\end{aligned}$$

Folosind relatia de mai sus si $d\rho_1(1)e_k = 0 \in V_1$ obtinem

$$\begin{aligned}\Psi(v)(1, \gamma_2) &= \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{m}(d\rho_2(\gamma_2)w_k, w_k) = \frac{1}{i}\sum_{k=1}^{m}\|w_k\|^2(d\rho_2(\gamma_2)u_k, u_k)\\ &= \sum_{k=1}^{m}\|w_k\|^2\Psi_2(u_k)(\gamma_2) = (\sum_{k=1}^{m}\|w_k\|^2\Psi_2(u_k))(\gamma_2)\end{aligned}$$

unde $u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|} \in \Omega_2$. Din relatia de mai sus obtinem ca

$$p_2(I_\rho^0) \subseteq \operatorname{conv}(I_{\rho_2}^0)$$

si in mod similar $p_1(I_\rho^0) \subseteq \operatorname{conv}(I_{\rho_1}^0)$, ceea ce incheie demonstratia. □

Teorema 4.1.7. *Fie $\rho_1 : G \to U(V_1)$ si $\rho_2 : G \to U(V_2)$ doua reprezentari unitare finit dimensionale ale grupului topologic G. Fie $V = V_1 \otimes V_2$ si $\rho : G \to U(V)$ reprezentarea a lui G definita prin $\rho(g)v_1 \otimes v_2 := \rho_1(g)v_1 \otimes \rho_2(g)v_2$. Atunci*

$$I_{\rho_1}^0 + I_{\rho_2}^0 \subseteq I_\rho^0 \subseteq \operatorname{conv}(I_{\rho_1}^0) + \operatorname{conv}(I_{\rho_2}^0).$$

Demonstraţie. Fie Ω_1, Ω_2 si Ω sferele unitate din V_1, V_2 si V. Notam cu Ψ_1, Ψ_2 si Ψ aplicatiile moment pentru ρ_1, ρ_2 si ρ. Ca in demonstratia Propozitiei 4.1.6 pentru $\gamma \in$

$\Lambda(G)$ si $v_1 \in \Omega_1$, $v_2 \in \Omega_2$ obtinem egalitatile

$$d\rho(\gamma)v_1 \otimes v_2 = v_1 \otimes d\rho_2(\gamma)v_2 + d\rho_1(\gamma)v_1 \otimes v_2$$
$$(d\rho(\gamma)v_1 \otimes v_2, v_1 \otimes v_2) = (d\rho_1(\gamma)v_1, v_1) + (d\rho_2(\gamma)v_2, v_2)$$
$$\Psi(v_1 \otimes v_2)(\gamma) = \Psi_1(v_1)(\gamma) + \Psi_2(v_2)(\gamma)$$

Deoarece pentru orice $v_1 \in \Omega_1, v_2 \in \Omega_2$ avem $v_1 \otimes v_2 \in \Omega$ si aplicand ultima relatie de mai sus obtinem

$$I^0_{\rho_1} + I^0_{\rho_2} \subseteq I^0_\rho$$

Fie $\{e_1, \ldots, e_m\}$ o baza ortonormata a lui V_1 si $\{f_1, \ldots, f_s\}$ o baza ortonormata a lui V_2. Atunci $\{e_k \otimes f_l \mid 1 \le k \le m, 1 \le l \le s\}$ este o baza ortonormata in $V = V_1 \otimes V_2$. Pentru $v \in \Omega$ putem scrie

$$v = \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le \ell \le s}} a_{kl}(e_k \otimes f_l)$$

unde $a_{kl} \in \mathbb{C}$ si

$$\sum_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le \ell \le s}} |a_{kl}|^2 = 1$$

Pentru $\gamma \in \Lambda(G)$ avem

$$\begin{aligned}
\Psi(v)(\gamma) =& \frac{1}{i}(d\rho(\gamma)v, v) \\
=& \frac{1}{i}\Big(\sum_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le \ell \le s}} d\rho(\gamma)(a_{kl}(e_k \otimes f_l)), \sum_{\substack{1 \le k' \le m \\ 1 \le \ell' \le s}} a_{k'l'}(e_{k'} \otimes f_{l'})\Big) \\
=& \frac{1}{i} \sum_{\substack{1 \le k,k' \le m \\ 1 \le \ell,\ell' \le s}} a_{kl}\overline{a}_{k'l'}(d\rho(\gamma)(e_k \otimes f_l), e_{k'} \otimes f_{l'}) \\
=& \frac{1}{i} \sum_{\substack{1 \le k,k' \le m \\ 1 \le \ell,\ell' \le s}} a_{kl}\overline{a}_{k'l'}(e_k \otimes d\rho_2(\gamma)f_l + d\rho_1(\gamma)e_k \otimes f_l, e_{k'} \otimes f_{l'}) \\
=& \frac{1}{i} \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le \ell,\ell' \le s}} a_{kl}\overline{a}_{kl'}(d\rho_2(\gamma)f_l, f_{l'}) + \frac{1}{i} \sum_{\substack{1 \le k,k' \le m \\ 1 \le \ell \le s}} a_{kl}\overline{a}_{k'l}(d\rho_1(\gamma)e_k, e_{k'}) \\
=& \frac{1}{i} \sum_{1 \le k \le m} (d\rho_2(\gamma) \sum_{1 \le \ell \le s} a_{kl}f_l, \sum_{1 \le \ell' \le s} a_{kl'}f_{l'}) \\
&+ \frac{1}{i} \sum_{1 \le l \le s} (d\rho_1(\gamma) \sum_{1 \le k \le m} a_{kl}e_k, \sum_{1 \le k' \le m} a_{kl'}e_{k'}).
\end{aligned}$$

Daca notam

$$w_k = \sum_{1 \le \ell \le s} a_{kl}f_l \in V_2$$

pentru $k = 1, \ldots, m$ si

$$b_l = \sum_{1 \le k \le m} a_{kl} e_k \in V_1$$

pentru $l = 1, \ldots, s$ relatia de mai sus poate fi scrisa astfel

$$\begin{aligned} \Psi(v)(\gamma) &= \frac{1}{i} \sum_{1 \le k \le m} (d\rho_2(\gamma) w_k, w_k) + \frac{1}{i} \sum_{1 \le l \le s} (d\rho_1(\gamma) b_l, b_l) \\ &= (\sum_{1 \le k \le m} \|w_k\|^2 \Psi_2(u_k))(\gamma) + (\sum_{1 \le l \le s} \|b_l\|^2 \Psi_1(c_l))(\gamma) \end{aligned}$$

unde $u_k = \frac{w_k}{\|w_k\|} \in \Omega_2$ daca $w_k \neq 0$ si $c_l = \frac{b_l}{\|b_l\|} \in \Omega_1$ daca $b_l \neq 0$. Deci obtinem ca

$$I_\rho^0 \subseteq \text{conv}\,(I_{\rho_1}^0) + \text{conv}\,(I_{\rho_2}^0).$$

Pentru a incheia demonstratia mai trebuie aratat ca

$$\sum_{1 \le k \le m} \|w_k\|^2 = \sum_{1 \le l \le s} \|b_l\|^2 = 1$$

Deoarece bazele din V_1 si V_2 sunt ortonormate obtinem

$$\|w_k\|^2 = \sum_{1 \le l \le s} |a_{kl}|^2$$

si

$$\|b_l\|^2 = \sum_{1 \le k \le m} |a_{kl}|^2$$

Deci

$$\sum_{1 \le k \le m} \|w_k\|^2 = \sum_{1 \le l \le s} \|b_l\|^2 = \sum_{\substack{1 \le k \le m \\ 1 \le \ell \le s}} |a_{kl}|^2 = 1$$

□

4.2 Proprietati de liniariate

In cele ce urmeaza vom studia in ce conditii multimile moment ale reprezentarilor unui grup topologic G sunt functionale liniare pe $\Lambda(G)$. Pentru aceasta este necesar in primul rand ca $\Lambda(G)$ sa aiba o structura naturala de spatiu vectorial, si din acest motiv introducem urmatoarea notiune, care a fost studiata in [NS12] in situatia particulara a grupurilor Lie exponentiale.

Definitia 4.2.1. Spunem ca grupul topologic G are *proprietatea Trotter* daca $\Lambda(G)$ are o structura de spatiu vectorial real astfel incat

$$(\forall \alpha, \beta \in \Lambda(G)) \quad (\alpha+\beta)(t) = \lim_{n\to\infty} (\alpha(\frac{t}{n})\beta(\frac{t}{n}))^n$$

uniform pentru t in orice compact din $\mathbb{R}$.

Spunem ca grupul topologic G are *proprietatea Trotter topologica* daca G are proprietatea Trotter si $\Lambda(G)$ este spatiu vectorial topologic in raport cu topologia compact deschisa de pe $\Lambda(G)$.

Propozitia 4.2.2. *Daca grupul topologic G are proprietatea Trotter si $\rho : G \to U(V)$ este o reprezentare unitara continua a lui G atunci pentru orice $v \in V_\infty \setminus \{0\}$ functionala $\Psi_\rho(v) : \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ este liniara.*

Demonstraţie. Fixam $v \in V_\infty \setminus \{0\}$ si definim $\phi : G \to V$ data prin $\phi(g) := \rho(g)v$. Deoarece $v \in V_\infty$ rezulta ca $\phi \in C^\infty(G, V)$. Deoarece grupul topologic G are proprietatea Trotter putem aplica din [NS12, Lema 2.6] si obtinem

$$D\phi(1; \alpha+\beta) = D\phi(1;\alpha) + D\phi(1;\beta)$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \Lambda(G)$. Aratam ca $d\rho(\alpha)v = D\phi(1;\alpha)$. Avem

$$d\rho(\alpha)v = \lim_{t\to 0} \frac{\rho(\alpha(t))v - v}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{\phi(\alpha(t)) - \phi(1)}{t} = D\phi(1;\alpha)$$

Aratam ca $\Psi_\rho(v) : \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ este aditiva, adica

$$\Psi_\rho(v)(\alpha+\beta) = \Psi_\rho(v)(\alpha) + \Psi_\rho(v)(\beta)$$

pentru orice $\alpha, \beta \in \Lambda(G)$. Avem

$$\begin{aligned}
\Psi_\rho(v)(\alpha+\beta) &= \frac{1}{i}\frac{(d\rho(\alpha+\beta)v, v)}{(v,v)} \\
&= \frac{1}{i}\frac{(D\phi(1;\alpha+\beta), v)}{(v,v)} \\
&= \frac{1}{i}\frac{(D\phi(1;\alpha) + D\phi(1;\beta), v)}{(v,v)} \\
&= \frac{1}{i}\frac{(D\phi(1;\alpha), v)}{(v,v)} + \frac{1}{i}\frac{(D\phi(1;\beta), v)}{(v,v)} \\
&= \Psi_\rho(v)(\alpha) + \Psi_\rho(v)(\beta)
\end{aligned}$$

Aratam ca $\Psi_\rho(v) : \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ este omogena, adica

$$\Psi_\rho(v)(a\alpha) = a\Psi_\rho(v)(\alpha)$$

pentru orice $a \in \mathbb{R}$ si orice $\alpha \in \Lambda(G)$. Avem

$$\begin{aligned}
\Psi_\rho(v)(a\alpha) &= \frac{1}{i}\frac{(d\rho(a\alpha)v, v)}{(v,v)} = \frac{1}{i}\frac{(D\phi(1; a\alpha), v)}{(v,v)} \\
&= \frac{1}{i}\frac{(aD\phi(1;\alpha), v)}{(v,v)} = \frac{1}{i}\frac{a(D\phi(1;\alpha), v)}{(v,v)} \\
&= a\Psi_\rho(v)(\alpha).
\end{aligned}$$

Observam ca functia $\Psi_\rho(v)$ este omogena cand G este un grup topologic arbitrar. □

4.3 Note bibliografice

Rezultatele din acest capitol sunt originale, si reprezinta generalizari ale unor proprietati ale multimilor moment si aplicatiilor moment ale reprezentarilor finit dimensionale ale grupurilor Lie compacte care au fost studiate in [Wi92].

Capitolul 5

Geometria convexa a momentelor pentru reprezentari de grupuri rezolubile

In acest ultim capitol al tezei obtinem principalul nostru rezultat (Teorema 5.5.2), care stabileste convexitatea multimilor moment pentru toate reprezentarile de grupuri local compacte separabile rezolubile. In Sectiunea 5.2 introducem o noua topologie pe spatiul vectorilor de clasa C^∞ pentru reprezentari de grupuri topologice, iar principalul nostru rezultat in acest context este Propozitia 5.2.10 care da o proprietate de densitate extrem de utila, dupa cum se poate vedea din aplicatia ei in Corolarul 5.2.11 in cadrul oferit de aproximarea grupurilor compacte conexe prin grupuri Lie. In Sectiunea 5.3 introducem notiunea de aplicatie moment pentru o reprezentare unitara continua a unui grup topologic arbitrar (Definitia 5.3.1) si punem in evidenta cateva proprietati de baza in acest cadru general. Sectiunea 5.4 contine mai multe rezultate de convexitate in situatia grupurilor local compacte separabile, dintre care cel mai important este Corolarul 5.4.5, care reduce stabilirea convexitatii multimilor moment ale tuturor reprezentarilor la stabilirea acestei proprietati de convexitate doar pentru reprezentarile ireductibile. In fine, Sectiunea 5.5 contine rezultatul principal pe care il obtinem aici (Teorema 5.5.2), mentionat mai sus.

5.1 Motivatie

Pentru orice reprezentare unitara continua $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ a unui grup Lie finit dimensional aplicatia sa moment ([Wi89], [Mi90], [Wi92]) este

$$\Psi_\pi\colon \mathcal{H}_\infty \setminus \{0\} \to \mathfrak{g}^*, \quad \Psi_\pi(v) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\langle \mathrm{d}\pi(\cdot)v, v\rangle}{\langle v, v\rangle},$$

unde $\mathcal{H}_\infty$ este spatiul vectorilor de clasa C^∞, si multimea sa moment inchisa este

$$I_\pi := \overline{\Psi_\pi(\mathcal{H}_\infty \setminus \{0\})} \subseteq \mathfrak{g}^*$$

adica, inchiderea imaginii aplicatiei moment in dualul algebrei Lie a lui G. Reprezentarile de grupuri Lie rezolubile au o remarcabila proprietate de convexitate:

Teorema 5.1.1 ([AL92]). *Daca G este un grup Lie finit dimensional rezolubil, atunci pentru orice reprezentare unitara continua $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ multimea sa moment I_π este convexa.*

Multimile moment si aplicatiile moment au fost studiate in geometria simplectica, dar enuntul de mai sus depinde doar de teoria Lie si teoria reprezentarilor, deci nu de geometria diferentiala. Deci, avand in vedere dezvoltarea teoriei Lie care pentru diverse grupuri topologice, inclusiv toate grupurile local compacte conexe (vezi [HM07] si [BCR81]), este natural sa punem urmatoarea intrebare.

Problema 5.1.2. Se poate extinde Teorema 5.1.1 la grupuri topologice rezolubile generale, sau cel putin la grupuri pro-Lie rezolubile?

Acest capitol ofera un raspuns afirmativ la problema de mai sus in cazul grupurilor local compacte separabile (Teorema 5.5.2). Demonstratia noastra face apel la ipoteza de compacitate locala prin intermediul masurii Haar in Propozitia 5.2.10 si mai departe prin intermediul utilizarii C^*-algebrelor grupale, iar separabilitatea acestor C^*-algebre este necesara in anumite argumente in care intervin integrale directe de reprezentari in Lema 5.4.3 si in demonstratia Propozitiei 5.4.4. In ciuda acestor restrictii cu caracter tehnic, se dovedeste util sa introducem notiunea de aplicatie moment pentru o reprezentare unitara continua a unui grup topologic arbitrar (Definitia 5.3.1) si sa punem in evidenta cateva proprietati de baza in acest cadru general.

5.2 Preliminarii

Cateva notatii

Daca nu se mentioneaza altceva, G este un grup topologic si $\mathcal{H}$ este un spatiu Hilbert complex cu grupul unitar $U(\mathcal{H}) := \{T \in \mathcal{B}(\mathcal{H}) \mid TT^* = TT^* = 1\}$ vazut ca grup topologic in raport cu topologia convergentei punctuale. Notam prin $\mathcal{C}(\cdot,\cdot)$ spatiul aplicatiilor continue, si reamintim notatia

$$\Lambda(G) := \{\gamma \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, G) \mid (\forall t, s \in \mathbb{R}) \quad \gamma(t+s) = \gamma(t)\gamma(s)\}.$$

Aceasta multime este inzestrata cu topologia convergentei uniforme pe submultimile compacte ale lui $\mathbb{R}$. Daca $\varphi\colon H \to G$ este un morfism continuu de grupuri topologice, atunci definim

$$\Lambda(\varphi)\colon \Lambda(H) \to \Lambda(G), \quad \gamma \mapsto \varphi \circ \gamma$$

si este usor de vazut ca obtinem un functor $\Lambda(\cdot)$ de la categoria grupurilor topologice la categoria spatiilor topologice.

Reamintim de asemenea ca actiunea adjuncta a grupului topologic G este aplicatia

$$\mathrm{Ad}_G\colon G \times \Lambda(G) \to \Lambda(G), \quad (g, \gamma) \mapsto \mathrm{Ad}_G(g)\gamma := g\gamma(\cdot)g^{-1}, \tag{5.2.1}$$

care este continua (Lema 1.1.3) si omogena in sensul ca $\mathrm{Ad}_G(g)(r\cdot\gamma) = r\cdot(\mathrm{Ad}_G(g)\gamma)$ pentru orice $r \in \mathbb{R}$, $g \in G$, si $\gamma \in \Lambda(G)$, unde definim

$$(\forall r, t \in \mathbb{R})(\forall \gamma \in \Lambda(G)) \quad (r\cdot\gamma)(t) := \gamma(rt).$$

Pentru $r = -1$ si $\gamma \in \Lambda(G)$ notam $-\gamma := (-1)\cdot\gamma \in \Lambda(G)$.

Fie o submultime deschisa $V \subseteq G$ si $\mathcal{Y}$ un spatiu local convex real. Daca $\varphi\colon V \to \mathcal{Y}$, $\gamma \in \Lambda(G)$, si $g \in V$, atunci notam

$$(D_\gamma\varphi)(g) := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(g\gamma(t)) - \varphi(g)}{t} \tag{5.2.2}$$

daca limita din membrul drept exista. Similar pentru

$$(D^R_\gamma\varphi)(g) := \lim_{t\to 0} \frac{\varphi(\gamma(-t)g) - \varphi(g)}{t} = (D_{-\mathrm{Ad}_G(g^{-1})\gamma}\varphi)(g). \tag{5.2.3}$$

Este convenabil sa folosim notatiile

$$\begin{aligned} D_\gamma\varphi :=& D_{\gamma_n}(D_{\gamma_{n-1}}\cdots(D_{\gamma_1}\varphi)\cdots)\colon G\to\mathcal{Y}\\ D^R_\gamma\varphi :=& D^R_{\gamma_n}(D^R_{\gamma_{n-1}}\cdots(D^R_{\gamma_1}\varphi)\cdots)\colon G\to\mathcal{Y}\end{aligned}$$

unde $\gamma := (\gamma_1,\dots,\gamma_n)\in\Lambda(G)\times\cdots\times\Lambda(G)$ si $\varphi\in\mathcal{C}^n(G,\mathcal{Y})$.

Reamintim acum topologia introdusa in Definitia 2.3.1.

Definitia 5.2.1. Pentru orice multime deschisa $V\subseteq G$, inzestram spatiul de functii $C^\infty(V,\mathcal{Y})$ cu topologia local convexa definita de familia de seminorme p_{K_1,K_2} introdusa astfel. Reamintim notatia

$$(\forall k\ge 1)\quad \Lambda^k(G) := \underbrace{\Lambda(G)\times\cdots\times\Lambda(G)}_{k\text{ ori}}.$$

Pentru orice $k\ge 1$, orice submultimi compacte $K_1\subseteq\Lambda^k(G)$ si $K_2\subseteq V$, si orice seminorma continua $|\cdot|$ pe $\mathcal{Y}$, definim $p^{|\cdot|}_{K_1,K_2}\colon C^\infty(V,\mathcal{Y})\to[0,\infty)$ prin

$$p^{|\cdot|}_{K_1,K_2}(f) := \begin{cases}\sup\{|(D_\gamma f)(x)|\mid\gamma\in K_1, x\in K_2\} & \text{daca } K_1\ne\emptyset,\\ \sup\{|f(x)|\mid x\in K_2\} & \text{daca } K_1=\emptyset.\end{cases}$$

Pentru simplitate vom omite seminorma $|\cdot|$ pe $\mathcal{Y}$ din notatia de mai sus, scriind simplu p_{K_1,K_2} in loc de $p^{|\cdot|}_{K_1,K_2}$.

Prima parte a urmatoarei propozitii este generalizarea Propozitiei 1.2.4 la functii cu valori vectoriale.

Propozitia 5.2.2. *Daca G este un grup topologic si $\mathcal{Y}$ este un spatiu local convex, atunci avem.*

1. *Fixam o multime deschisa $V\subseteq G$. Daca pentru orice $k\ge 1$, multimi compacte $K_1\subseteq\Lambda^k(G)$ si $K_2\subseteq V$, si seminorma continua $|\cdot|$ pe $\mathcal{Y}$ definim seminorma $q^{|\cdot|}_{K_1,K_2}\colon C^\infty(V,\mathcal{Y})\to[0,\infty)$ prin*

$$q^{|\cdot|}_{K_1,K_2}(f) := \begin{cases}\sup\{|(D^R_\gamma f)(x)|\mid\gamma\in K_1, x\in K_2\} & \textit{pentru } K_1\ne\emptyset,\\ \sup\{|f(x)|\mid x\in K_2\} & \textit{pentru } K_1\ne\emptyset,\end{cases}$$

   atunci obtinem o familie de seminorme care determina topologia lui $C^\infty(V,\mathcal{Y})$ introdusa in Definitia 5.2.1.

2. *Pentru orice $g\in G$ si $\gamma\in\Lambda(G)$, operatorii*

$$D_\gamma, D^R_\gamma, \lambda(g), \rho(g)\colon C^\infty(G,\mathcal{Y})\to C^\infty(G,\mathcal{Y})$$

sunt bine definiti si continui, unde

$$(\lambda(g)f)(x) := f(gx) \text{ si } (\rho(g)f)(x) := f(xg) \text{ pentru orice } x \in G \text{ si } f \in C^\infty(G, \mathcal{Y}).$$

Demonstraţie. Pentru demonstratie este convenabil sa notam pentru orice $k \geq 1$, $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \in \Lambda^k(G)$, si $x \in G$,

$$\begin{aligned}\gamma^x :=& (\mathrm{Ad}_G(x^{-1})\gamma_1, \ldots, \mathrm{Ad}_G(x^{-1})\gamma_k),\\ -\gamma :=& (-\gamma_1, \ldots, -\gamma_k).\end{aligned}$$

Incepem acum demonstratia celor doua asertiuni.

(1) Fie $K_2 \subseteq G$ si $K_1 \subseteq \Lambda^k(G)$ multimi compacte si $|\cdot|$ seminorma continua pe $\mathcal{Y}$, pe care o vom omite din notatie, scriind simplu $q^{|\cdot|}_{K_1,K_2} =: q_{K_1,K_2}$.

Rezulta din (5.2.3) ca pentru orice $f \in C^\infty(V, \mathcal{Y})$ si $x \in V$ avem

$$(D_\gamma f)(x) = (D^R_{-\gamma^x} f)(x) \tag{5.2.4}$$

deci $p_{K_1,K_2}(f) \leq q_{K_3,K_2}(f)$ unde

$$K_3 := \{-\gamma^x \mid \gamma \in K_1, x \in K_2\}.$$

De asemenea, scriind (5.2.4) sub forma $(D^R_\gamma f)(x) = (D_{-\gamma^{x^{-1}}} f)(x)$, obtinem inegalitatea $q_{K_1,K_2}(f) \leq p_{K_4,K_2}(f)$, unde

$$K_4 := \{-\gamma^{x^{-1}} \mid \gamma \in K_1, x \in K_2\}.$$

Pentru a incheia demonstratia, ramane sa aratam ca submultimile K_3 si K_4 ale lui $\Lambda^k(G)$ sunt compacte. Multimea K_3 este imaginea multimii compacte $K_2 \times K_1$prin aplicatia

$$G \times \Lambda^k(G) \to \Lambda^k(G), \quad (x, \gamma) \mapsto -\gamma^x,$$

in timp ce multimea K_4 este imaginea multimii compacte $K_2 \times K_1$ prin aplicatia

$$G \times \Lambda^k(G) \to \Lambda^k(G), \quad (x, \gamma) \mapsto -\gamma^{x^{-1}}.$$

Ambele aplicatii sunt continue deoarece (5.2.1) este continua.

(2) Pentru operatorul $\lambda(g)\colon C^\infty(G, \mathcal{Y}) \to C^\infty(G, \mathcal{Y})$ folosim metoda din demonstratia Propozitiei 2.3.7, care stabileste ca $\lambda(g)$ este bine definit. In plus, pentru orice $k \geq 1$

avem homeomorfismul

$$F_k^g\colon \Lambda(G)\times\cdots\times\Lambda(G)\times G\to\Lambda(G)\times\cdots\times\Lambda(G)\times G,\quad (\beta,x)\mapsto(\beta,gx).$$

Iterand [BNi14a, Rem. 3.8], obtinem $D^k(\lambda(g)f) = (D^k f)\circ F_k^g$ pentru orice $f\in C^\infty(G,\mathcal{Y})$, si se arata ca mai sus ca pentru orice seminorma continua $|\cdot|$ pe $\mathcal{Y}$ si orice multimi compacte $K_2\subseteq G$ si $K_1\subseteq\Lambda^k(G)$ avem $p_{K_1,K_2}(\lambda(g)f)=p_{K_1,K_2'}(f)$, unde $K_2':=gK_2$ deci operatorul liniar $\lambda(g)\colon C^\infty(G,\mathcal{Y})\to C^\infty(G,\mathcal{Y})$ este continuu.

Pentru operatorul $\rho(g)$ obtinem similar $(D^R)^k(\rho(g)f)=((D^R)^k f)\circ\widetilde{F}_k^g$, unde

$$\widetilde{F}_k^g\colon \Lambda(G)\times\cdots\times\Lambda(G)\times G\to\Lambda(G)\times\cdots\times\Lambda(G)\times G,\quad (\beta,x)\mapsto(\beta,xg).$$

Rezulta ca $q_{K_1,K_2}(\rho(g)f)=q_{K_1,K_2''}(f)$, unde $K_2'':=K_2g$, pentru orice seminorma continua $|\cdot|$ pe $\mathcal{Y}$, orice multimi compacte $K_2\subseteq G$ si $K_1\subseteq\Lambda^k(G)$, si orice $f\in C^\infty(G,\mathcal{Y})$. Deoarece seminormele q_{K_1,K_2} determina topologia lui $C^\infty(G,\mathcal{Y})$ din Afirmatia (1), vedem ca operatorul liniar $\rho(g)\colon C^\infty(G,\mathcal{Y})\to C^\infty(G,\mathcal{Y})$ este continuu.

Daca $\gamma\in\Lambda(G)$ atunci pentru orice $f\in C^\infty(G,\mathcal{Y})$ avem $p_{K_1,K_2}(D_\gamma f)=p_{K_1',K_2}(f)$ si $q_{K_1,K_2}(D_\gamma^R f)=q_{K_1',K_2}(f)$, unde $K_1':=\{\gamma\}\times K_1\subseteq\Lambda^{k+1}(G)$, cu conventia $\{\gamma\}\times\emptyset=\{\gamma\}$. Aceasta arata ca ambii operatori liniari $D_\gamma, D_\gamma^R\colon C^\infty(G,\mathcal{Y})\to C^\infty(G,\mathcal{Y})$ sunt continui, si demonstratia se incheie. $\square$

In continuare vom folosi *grupurile pro-Lie* (adica grupuri topologice care sunt izomorfe cu limite de sisteme proiective de grupuri Lie) si teoria Lie a lor, pentru care facem trimitere la excelenta monografie [HM07]. Grupurile Pro-Lie sunt numite grupuri LP in [BCR81], [Bos76].

Lema 5.2.3 (teorema lui Yamabe)**.** *Grupurile local compacte conexe sunt grupuri pro-Lie.*

Demonstraţie. Rezulta din [HM07, Th. 3.39 (Def. A $\Rightarrow$ Def. B)], deoarece orice grup local compact este complet [HM07, Rem. 1.31] si orice grup local compact conex contine subgrupuri co-Lie arbitrar de mici conform [MZ55, Th. 4.6, pag. 175]. $\square$

Lema 5.2.4. *Orice grup pro-Lie G este un grup pre-Lie.*

Demonstraţie. A se vedea [BCR81, Prop. 1.3.1(3)]. $\square$

Vectori de clasa C^∞ pentru reprezentari de grupuri topologice

Prin *reprezentare* intelegem o reprezentare unitara continua, adica un morfism de grupuri $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ pentru care aplicatia $G \times \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, $(g, y) \mapsto \pi(g)y$ este continua.

Spatiul vectorilor de clasa C^∞ a fost pe larg folosit in teoria reprezentarilor de grupuri Lie finit dimensionale; a se vedea [Ne10] pentru un studiu profund al vectorilor de clasa C^∞ pentru reprezentari de grupuri Lie infinit dimensionale. Acest spatiu a fost introdus in teoria reprezentarilor de grupuri topologice generale in [Bos76] (a se vedea [BB11] pentru mai multe versiuni ale acestei notiuni).

Definitia 5.2.5. Spatiul *vectorilor de clasa C^∞* pentru reprezentarea π este

$$\mathcal{H}_\infty := \{v \in \mathcal{H} \mid \pi(\cdot)v \in C^\infty(G, \mathcal{H})\}.$$

Inzestram $\mathcal{H}_\infty$ cu topologia local convexa pentru care aplicatia liniara injectiva

$$A\colon \mathcal{H}_\infty \to C^\infty(G, \mathcal{H}), \quad v \mapsto \pi(\cdot)v \tag{5.2.5}$$

este un homeomorfism pe imagine, unde imaginea aplicatiei de mai sus este un subspatiu al spatiului local convex $C^\infty(G, \mathcal{H})$ inzestrat cu topologia introdusa in Definitia 5.2.1.

Inainte de a continua notam ca daca G este un grup Banach-Lie, atunci topologia de mai sus pe spatiul vectorilor de clasa C^∞ este in general diferita de topologia introdusa in [Ne10, Sect. 4], dar aceste topologii coincid in cazul grupurilor Lie finit dimensionale.

Observatia 5.2.6. Prezentam urmatoarele observatii pentru a le folosi mai tarziu.

1. Imaginea operatorului A poate fi descrisa asfel:

   $$\operatorname{Ran} A = \{\psi \in C^\infty(G, \mathcal{H}) \mid (\forall x, y \in G)\ \psi(xy) = \pi(x)\psi(y)\}$$

   si este un subspatiu liniar inchis al lui $C^\infty(G, \mathcal{H})$.

2. Pentru orice $\psi \in \operatorname{Ran} A$ si $y \in G$ avem $\psi(y) \in \mathcal{H}_\infty$, si $\psi(1) = A^{-1}(\psi)$.

3. Multimea $\mathcal{H}_\infty$ este un subspatiu liniar al lui $\mathcal{H}$ care este invariant in raport cu $\pi(x)$ si $\mathrm{d}\pi(\gamma)$ pentru orice $x \in G$ si $\gamma \in \Lambda(G)$, si operatorii $\pi(x), \mathrm{d}\pi(\gamma)\colon \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty$ sunt continui (folosind Propozitia 5.2.2).

4. Aplicatia de incluziune $\mathcal{H}_\infty \hookrightarrow \mathcal{H}$ este continua deoarece este egala cu compunerea lui A cu aplicatia de evaluare $C^\infty(G, \mathcal{H}) \to \mathcal{H}$, $\psi \mapsto \psi(1)$, care este continua.

5. Operatorul A de mai sus interverteste reprezentarea $\pi(\cdot)|_{\mathcal{H}_\infty}$ si reprezentarea regulata la dreapta a lui G pe $C^\infty(G,\mathcal{H})$, adica, $(A(\pi(x)v))(y) = (Av)(yx)$ pentru orice $x, y \in G$ si $v \in \mathcal{H}$. Pentru $\gamma \in \Lambda(G)$ si $x = \gamma(t)$ cu $t \in \mathbb{R}$, aceasta implica $(A(\mathrm{d}\pi(\gamma)v))(y) = (D_\gamma(Av))(y)$ (vezi (5.2.2)), adica, $A(\mathrm{d}\pi(\gamma)v) = D_\gamma(Av)$.

Observatia 5.2.7. Fie $\pi_j\colon G \to U(\mathcal{H}_j)$ reprezentari cu spatiul vectorilor de clasa C^∞ corespunzator $\mathcal{H}_{j,\infty}$ pentru $j = 1, 2$. Daca $T\colon \mathcal{H}_1 \to \mathcal{H}_2$ este un operator liniar marginit cu proprietatea $T\pi_1(x) = \pi_2(x)T$ pentru orice $x \in G$, atunci $T(\mathcal{H}_{1,\infty}) \subseteq \mathcal{H}_{2,\infty}$.

Definitia 5.2.8. *Derivata reprezentarii* $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ este

$$\mathrm{d}\pi\colon \Lambda(G) \to \mathrm{End}\,(\mathcal{H}_\infty), \quad \mathrm{d}\pi(\gamma)y := \lim_{t\to 0} \frac{\pi(\gamma(t))y - y}{t}$$

pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ si $y \in \mathcal{H}_\infty$. In plus, pentru orice $k \geq 1$ si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \in \Lambda^k(G)$ definim operatorul liniar

$$\mathrm{d}\pi(\gamma)\colon \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty, \quad \mathrm{d}\pi(\gamma)y := \mathrm{d}\pi(\gamma_1)\cdots\mathrm{d}\pi(\gamma_k)y.$$

Lema 5.2.9. *Fie G un grup topologic si $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ o reprezentare unitara. Atunci pentru orice intreg $k \geq 1$, multime compacta $K \subseteq \Lambda^k(G)$, si vectorul $v \in \mathcal{H}_\infty$, avem*

$$\lim_{x\to 1} \sup_{\gamma\in K} \|\mathrm{d}\pi(\gamma)v - \mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x)\gamma)v\| = 0, \tag{5.2.6}$$

unde $\mathrm{Ad}_G\colon G \times \Lambda^k(G) \to \Lambda^k(G)$ *este definit pe componente:*

$$\mathrm{Ad}_G(x)\gamma = (\mathrm{Ad}_G(x)\gamma_1, \ldots, \mathrm{Ad}_G(x)\gamma_k)$$

pentru orice $x \in G$ si $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \in \Lambda^k(G)$.

Demonstraţie. Pentru $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_k) \in \Lambda^k(G)$ avem

$$\mathrm{d}\pi(\gamma)v - \mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x)\gamma)v = \mathrm{d}\pi(\gamma_1)\cdots\mathrm{d}\pi(\gamma_k)v - \mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x)\gamma_1)\cdots\mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x)\gamma_k)v$$

deci din Observatia 5.2.6(5),

$$A(\mathrm{d}\pi(\gamma)v - \mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x)\gamma)v) = D^k_\gamma(Av) - D^k_{\mathrm{Ad}_G(x)\gamma}(Av).$$

Deci (5.2.6) este echivalenta cu faptul ca pentru $f := Av \in C^\infty(G,\mathcal{H})$ avem

$$\lim_{x\to 1} \sup_{\gamma\in K} \|(D^k_\gamma f - D^k_{\mathrm{Ad}_G(x)\gamma} f)(1)\| = 0,$$

adica,

$$\lim_{x\to 1}\sup_{\gamma\in K}\|(D^k f)(1,\gamma)-D^k f(1,\mathrm{Ad}_G(x)\gamma)\|=0.$$

Pentru a demonstra egalitatea de mai sus, definim

$$\varphi\colon G\times\Lambda^k(G)\to\Lambda^k(G),\quad \varphi(x,\gamma):=D^k f(1,\mathrm{Ad}_G(x)\gamma).$$

Deoarece $f\in C^\infty(G,\mathcal{H})$, functia $D^k f(1,\cdot)\colon\Lambda^k(G)\to\mathcal{H}$ este continua, deci prin compunerea ei cu aplicatia continua $\mathrm{Ad}_G\colon G\times\Lambda^k(G)\to\Lambda^k(G)$, obtinem ca φ este continua. Atunci aplicatia $G\to\mathcal{C}(K,\mathcal{H})$, $x\mapsto\varphi(x,\cdot)|_K$ este continua din [Fo45, Th. 1], si demonstratia se incheie. □

In continuare, prin *δ-familie neteda* pe un grup local compact G intelegem o familie de functii $\{f_W\}_{W\in\mathcal{W}}$, unde $\mathcal{W}$ este o baza de vecinatati a lui $1\in G$, si pentru orice $W\in\mathcal{W}$ avem $\operatorname{supp} f_W\subseteq W$, $0\le f_W\in C^\infty(G)$, si $\int_G f_W(x)\mathrm{d}x=1$.

Propozitia 5.2.10. *Fie G un grup local compact si $\pi\colon G\to U(\mathcal{H})$ o reprezentare extinsa la*

$$\pi\colon L^1(G)\to\mathcal{B}(\mathcal{H}),\quad \pi(f)=\int_G f(x)\pi(x)\mathrm{d}x.$$

Daca $f\in\mathcal{C}_0^\infty(G)$ si $v\in\mathcal{H}$, atunci $\pi(f)v\in\mathcal{H}_\infty$ si

$$(\forall\gamma\in\Lambda(G))\quad \mathrm{d}\pi(\gamma)(\pi(f)v)=\pi(D^R_\gamma f)v. \tag{5.2.7}$$

In plus, pentru orice δ-familie neteda $\{f_W\}_{W\in\mathcal{W}}$ multimea $\{\pi(f_W)v\mid W\in\mathcal{W},\ v\in\mathcal{H}\}$ este densa in $\mathcal{H}_\infty$.

Demonstraţie. Daca $\gamma\in\Lambda(G)$, $t\in\mathbb{R}$, $v\in\mathcal{H}$, si $f\in\mathcal{C}_0^\infty(G)$, atunci $\pi(f)v\in\mathcal{H}_\infty$ din [Bos76, Lema 3.1], si in plus

$$\pi(\gamma(t))(\pi(f)v)=\int_G f(x)\pi(\gamma(t)x)v\mathrm{d}x=\int_G f(\gamma(-t)x)\pi(x)v\mathrm{d}x$$

deci prin derivare in $t=0$ obtinem (5.2.7). Pentru orice $v\in\mathcal{H}$ si $W\in\mathcal{W}$ definim $v_W:=\pi(f_W)v\in\mathcal{H}_\infty$. Avem

$$v-v_W=\int_G f_W(x)v\mathrm{d}x-\int_G f_W(x)\pi(x)v\mathrm{d}x=\int_W f_W(x)(v-\pi(x)v)\mathrm{d}x \tag{5.2.8}$$

deci folosind $0\le f_W\in C^\infty(G)$ si $\int_G f_W(x)\mathrm{d}x=1$, obtinem

$$\|v-v_W\|\le\int_W f_W(x)\|v-\pi(x)v\|\mathrm{d}x\le\sup_{x\in W}\|v-\pi(x)v\|$$

si $\lim\limits_{W} \|v - v_W\| = 0$. Pe de alta parte, folosind (5.2.5),

$$(\forall y \in G) \quad (A(v - v_W))(y) = \pi(y)(v - v_W)$$

si aceasta implica $\lim\limits_{W} \sup\limits_{y \in G} \|(A(v - v_W))(y)\| = \lim\limits_{W} \|v - v_W\| = 0$.

Daca $v \in \mathcal{H}_\infty$, $k \geq 1$, si $\gamma \in \Lambda^k(G)$, avem $D_\gamma A = A \circ \mathrm{d}\pi(\gamma)\colon \mathcal{H}_\infty \to C^\infty(G, \mathcal{H})$ din Observatia 5.2.6(5), deci folosind (5.2.8), obtinem

$$\begin{aligned}
(D_\gamma^k A(v - v_W))(y) &= (A(\mathrm{d}\pi(\gamma)(v - v_W)))(y) \\
&= \int_W f_W(x)\pi(y)(\mathrm{d}\pi(\gamma)v - \mathrm{d}\pi(\gamma)\pi(x)v)\mathrm{d}x \\
&= \int_W f_W(x)\pi(y)(\mathrm{d}\pi(\gamma)v - \pi(x)\mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x^{-1})\gamma)v)\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Notam ca sub integrala de mai sus putem scrie

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\pi(\gamma)v - \pi(x)\mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x^{-1})\gamma)v =& (1 - \pi(x))\mathrm{d}\pi(\gamma)v \\
&+ \pi(x)(\mathrm{d}\pi(\gamma)v - \mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x^{-1})\gamma)v),
\end{aligned}$$

deci folosind din nou $0 \leq f_W \in C^\infty(G)$, si $\int_G f_W(x)\mathrm{d}x = 1$, obtinem pentru orice $y \in G$,

$$\|(D_\gamma^k A(v - v_W))(y)\| \leq \sup_{x \in W} (\|(1 - \pi(x))\mathrm{d}\pi(\gamma)v\| + \|\mathrm{d}\pi(\gamma)v - \mathrm{d}\pi(\mathrm{Ad}_G(x^{-1})\gamma)v\|).$$

Atunci rezulta usor din Lema 5.2.9 ca $\lim\limits_{W} A(v - v_W) = 0$ in $C^\infty(G, \mathcal{H})$ (a se vedea Definitia 5.2.1), adica, $\lim\limits_{W} v_W = v$ in $\mathcal{H}_\infty$. □

Corolarul 5.2.11. *Fie G un grup local compact conex si $\mathcal{N}_0(G)$ familia subgrupurilor compacte si normale $N \subseteq G$ pentru care G/N este un grup Lie. Fixam $N_0 \in \mathcal{N}_0(G)$ cu proiectia corespunzatoare $p\colon G \to G/N_0$, si fie $\pi_0\colon G/N_0 \to U(\mathcal{H})$ o reprezentare cu spatiul vectorilor de clasa C^∞ notat cu $\mathcal{H}_\infty(\pi_0)$.*

Atunci pentru orice $N \in \mathcal{N}_0(G)$ cu $N \subseteq N_0$ spatiul vectorilor de clasa C^∞ al reprezentarii $G/N \to U(\mathcal{H})$, $gN \mapsto \pi_0(gN_0)$ este egal cu $\mathcal{H}_\infty(\pi_0)$. De asemenea, $\mathcal{H}_\infty(\pi_0)$ este un subspatiu dens al spatiului $\mathcal{H}_\infty(\pi)$ al vectorilor de clasa C^∞ al reprezentarii $\pi := \pi_0 \circ p\colon G \to U(\mathcal{H})$.

Demonstraţie. Prima cerinta este clara deoarece morfismul $G/N \to G/N_0$, $xN \mapsto xN_0$ este o aplicatie de acoperire. Pentru a doua cerinta, reamintind izomorfismul canonic al lui G pe limita proiectiva de grupuri Lie $\lim\limits_{N_0 \subseteq N} G/N$ (vezi [HM07]), putem folosi Propozitia 5.2.10 pentru o δ-familie convenabila formata din functii de forma $x \mapsto f(xN)$, unde $N \in \mathcal{N}_0(G)$ cu $N \subseteq N_0$, si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(G/N)$. □

5.3 Multimile moment ale reprezentarilor de grupuri topologice

Reamintim Definitia 3.1.3:

Definitia 5.3.1. Pentru orice reprezentare de grup topologic $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$, *aplicatia sa moment* este

$$\Psi_\pi\colon \mathcal{H}_\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{\Lambda(G)}, \quad \Psi_\pi(v) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\langle \mathrm{d}\pi(\cdot)v, v\rangle}{\langle v, v\rangle}.$$

Multimea $\mathbb{R}^{\Lambda(G)}$ a functiilor $\Lambda(G) \to \mathbb{R}$ este inzestrata cu topologia convergentei punctuale, si definim *multimea moment inchisa* I_π a reprezentarii π ca inchiderea in $\mathbb{R}^{\Lambda(G)}$ a imaginii aplicatiei moment $I^0_\pi := \Psi_\pi(\mathcal{H}_\infty \setminus \{0\})$, adica, $I_\pi := \overline{I^0_\pi}$.

Un rezultat de tipul urmator a fost stabilit in Propozitia 4.2.2.

Lema 5.3.2. *Fie G un grup pro-Lie. Atunci pentru orice reprezentare $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ si orice $v \in \mathcal{H}_\infty \setminus \{0\}$ functia $\Psi_\pi(v)\colon \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ este liniara si continua.*

Demonstraţie. Din [Bos76, Anm. 2.1, pag 235] rezulta ca $\mathrm{d}\pi(\cdot)v\colon \Lambda(G) \to \mathcal{H}$ este aplicatie liniara continua, deci concluzia rezulta imediat. □

Pentru orice spatiu vectorial topologic real $\mathcal{Y}$ notam cu $\mathcal{Y}^*$ dualul slab al lui $\mathcal{Y}$, adica spatiul functionalelor liniare continue pe $\mathcal{Y}$ inzestrat cu topologia convergentei punctuale. Atunci Lema 5.3.2 arata ca pentru orice reprezentare $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ a unui grup pro-Lie avem $\Psi_\pi\colon \mathcal{H}_\infty \setminus \{0\} \to \Lambda(G)^*$.

Lema 5.3.3. *Daca G este un grup topologic, atunci pentru orice reprezentare $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ aplicatia sa moment $\Psi_\pi\colon \mathcal{H}_\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^{\Lambda(G)}$ este continua.*

Demonstraţie. Trebuie sa verificam ca pentru orice $\gamma \in \Lambda(G)$ functia

$$\mathcal{H}_\infty \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad v \mapsto (\Psi_\pi(v))(\gamma) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\langle \mathrm{d}\pi(\gamma)v, v\rangle}{\langle v, v\rangle}$$

este continua. Aceasta rezulta deoarece ambele aplicatii $\mathrm{d}\pi(\gamma)\colon \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}_\infty$ si aplicatia de incluziune $\mathcal{H}_\infty \hookrightarrow \mathcal{H}$ sunt continue (Observatia 5.2.6). A se vedea si [Bos76, Lemele 6.1–6.3]. □

Propozitia 5.3.4. *Fie $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ o reprezentare si $\{\mathcal{H}_j\}_{j\in J}$ o familie de subspatii liniare inchise ale lui $\mathcal{H}$ satisfacand urmatoarele conditii:*

1. *Pentru orice* $j_1, j_2 \in J$ *exista* $j_3 \in J$ *cu* $\mathcal{H}_{j_1} + \mathcal{H}_{j_2} \subseteq \mathcal{H}_{j_3}$, *si definim* $j_1 \leq j_2$ *daca si numai daca* $\mathcal{H}_{j_1} \subseteq \mathcal{H}_{j_2}$.

2. *Daca* $p_j \colon \mathcal{H} \to \mathcal{H}_j$ *este proiectia ortogonala pe* $\mathcal{H}_j$ *pentru* $j \in J$, *atunci*

$$(\forall v \in \mathcal{H}) \quad \lim_{j \in J} p_j(v) = v \text{ in } \mathcal{H}. \tag{5.3.1}$$

3. *Pentru orice* $j \in J$ *avem* $\pi(G)\mathcal{H}_j \subseteq \mathcal{H}_j$, *unde definim* $\pi_j \colon G \to U(\mathcal{H}_j)$, $x \mapsto \pi(x)|_{\mathcal{H}_j}$.

Atunci $I_\pi = \overline{\bigcup_{j \in J} I^0_{\pi_j}} = \overline{\bigcup_{j \in J} I_{\pi_j}}$. *Daca in plus* I_{π_j} *este convexa pentru orice* $j \in J$, *atunci si* I_π *este convexa.*

Demonstraţie. Pentru orice $j \in J$, notam cu $\mathcal{H}_{j,\infty}$ spatiul vectorilor de clasa C^∞ pentru reprezentarea π_j, avem $\mathcal{H}_{j,\infty} = \mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_\infty$, si aceasta implica $I^0_{\pi_j} \subseteq I^0_\pi$, deci $\overline{\bigcup_{j \in J} I_{\pi_j}} \subseteq I_\pi$.

Pentru a demonstra cealalta incluziune, fie $v \in \mathcal{H}_\infty$ arbitrar. Pentru orice $j \in J$ si $x \in G$ avem $p_j \pi(x) = \pi_j(x) p_j$, deci Observatia 5.2.7 implica $p_j(\mathcal{H}_\infty) \subseteq \mathcal{H}_{j,\infty}$. In particular $p_j(v) \in \mathcal{H}_{j,\infty} = \mathcal{H}_j \cap \mathcal{H}_\infty \subseteq \mathcal{H}_\infty$. Aratam ca

$$\lim_{j \in J} p_j(v) = v \text{ in } \mathcal{H}_\infty. \tag{5.3.2}$$

De fapt, $(A(p_j(v)))(y) = \pi(y) p_j(v) = p_j \pi(y) v$ pentru orice $y \in G$, si atunci (5.3.1) implica (5.3.2). Acum, folosind Lema 5.3.3,

$$\Psi_\pi(v) = \lim_{j \in J} \Psi_\pi(p_j(v)) = \lim_{j \in J} \Psi_{\pi_j}(p_j(v)) \in \overline{\bigcup_{j \in J} I^0_{\pi_j}} \subseteq \overline{\bigcup_{j \in J} I_{\pi_j}}$$

si se incheie demonstratia egalitati cerute.

Convexitatea ceruta rezulta din aceasta egalitate, deoarece inchiderea reuniunii oricarei familii dirijate in sus formate din multimi convexe inchise este de asemenea convexa. □

Propozitia 5.3.5. *Daca* $\pi_j \colon G \to U(\mathcal{H}_j)$ *este o reprezentare pentru* $j = 1, \dots, m$, *si definim* $\pi := \pi_1 \oplus \cdots \oplus \pi_m$, *atunci avem*

$$I^0_\pi = \{t_1 f_1 + \cdots + t_m f_m \mid f_j \in I^0_{\pi_j},\ 0 \leq t_j \leq 1 \text{ pentru } j = 1, \dots, m, \text{ si } t_1 + \cdots + t_m = 1\}.$$

Daca in plus I_{π_j} *este convexa pentru* $j = 1, \dots, m$, *atunci si* I_π *este convexa, si*

$$I_\pi = \operatorname{conv}(I_{\pi_1} \cup \cdots \cup I_{\pi_m}).$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{H} := \mathcal{H}_1 \oplus \cdots \oplus \mathcal{H}_m$, si $\mathcal{H}_{j,\infty}$ spatiul vectorilor de de clasa C^∞ pentru reprezentarea π_j pentru $j = 1, \dots, m$. Folosind Observatia 5.2.7, vedem ca

$$\mathcal{H}_\infty = \{v_1 \oplus \cdots \oplus v_m \mid v_j \in \mathcal{H}_{j,\infty} \text{ pentru } j = 1, \dots, m\}.$$

In plus, daca $v_j \in \mathcal{H}_{j,\infty} \setminus \{0\}$ pentru $j = 1, \dots, m$, si $v := v_1 \oplus \cdots \oplus v_m$, atunci este usor de vazut ca

$$\Psi_\pi(v) = \frac{\|v_1\|^2}{\|v\|^2}\Psi_{\pi_1}(v_1) + \cdots + \frac{\|v_m\|^2}{\|v\|^2}\Psi_{\pi_m}(v_m) \tag{5.3.3}$$

cu $\|v\|^2 = \|v_1\|^2 + \cdots + \|v_m\|^2$, si demonstratia se incheie. □

Propozitia 5.3.6. *Daca $\pi_j \colon G \to U(\mathcal{H}_j)$ este o a reprezentare pentru care I_{π_j} este convexa pentru orice $j \in J$, atunci pentru reprezentarea $\pi := \bigoplus\limits_{j\in J} \pi_j$ avem*

$$I_\pi = \overline{\operatorname{conv}\,(\bigcup_{j\in J} I_{\pi_j})}$$

si aceasta este o multime convexa.

Demonstraţie. Se utilizeaza Propozitia 5.3.4 pentru familia sumelor directe finite ortogonale de reprezentari π_j, iar pe baza Propozitia 5.3.5 se calculeaza multimea moment inchisa a fiecareia dintre aceste sume finite. □

Propozitia 5.3.7. *Fie $\phi \colon G_1 \to G_2$ un morfism de grupuri topologice si sa definim*

$$P \colon \mathbb{R}^{\Lambda(G_2)} \to \mathbb{R}^{\Lambda(G_1)}, \quad P(f) := f \circ \Lambda(\phi).$$

Pentru orice reprezentare $\pi \colon G_2 \to U(\mathcal{H})$ notam cu $\mathcal{H}_\infty(\pi)$ si $\mathcal{H}_\infty(\pi\circ\phi)$ spatiul vectorilor de clasa C^∞ pentru reprezentarile π si $\pi \circ \phi$, respectiv. Atunci $\mathcal{H}_\infty(\pi) \subseteq \mathcal{H}_\infty(\pi \circ \phi)$ si $P(I_\pi^0) \subseteq I_{\pi\circ\phi}^0$. Daca in plus $\mathcal{H}_\infty(\pi)$ este densa in $\mathcal{H}_\infty(\pi \circ \phi)$, atunci $\overline{P(I_\pi)} = I_{\pi\circ\phi}$. Daca in plus I_π este convexa , atunci si $I_{\pi\circ\phi}$ este convexa.

Demonstraţie. Pentru inceput sa notam ca pentru orice $\psi \in C^\infty(G_2, \mathcal{H})$ avem $\psi \circ \phi \in C^\infty(G_1, \mathcal{H})$, si

$$D^k(\psi \circ \phi)(x, \gamma_1, \dots, \gamma_k) = (D^k\psi)(\phi(x), \phi \circ \gamma_1, \dots, \phi \circ \gamma_k)$$

pentru orice $x \in G_1$, $k \geq 1$ si $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \Lambda(G_1)$ (a se vedea de exemplu [BCR81, Th. 1.3.2.2(i')]).

Pentru orice $v \in \mathcal{H}_\infty(\pi)$ avem $\pi(\cdot)v \in C^\infty(G_2, \mathcal{H})$, deci observatia de mai sus implica $(\pi \circ \phi)(\cdot)v \in C^\infty(G_1, \mathcal{H})$, adica, $v \in \mathcal{H}_\infty(\pi \circ \phi)$. In plus, este usor de vazut ca

$$\Psi_{\pi\circ\phi}(v) = \Psi_\pi(v) \circ \Lambda(\phi) = P(\Psi_\pi(v)). \tag{5.3.4}$$

Acum, daca $\mathcal{H}_\infty(\pi)$ este densa in $\mathcal{H}_\infty(\pi \circ \phi)$, atunci $I_{\pi\circ\phi} = \overline{\Psi_{\pi\circ\phi}(\mathcal{H}_\infty(\pi) \setminus \{0\})}$ din Lema 5.3.3. Deci, folosind (5.3.4), obtinem $I_{\pi\circ\phi} = \overline{P(I^0_\pi)}$, si rezulta egalitatea

$\overline{P(I_\pi)} = I_{\pi\circ\phi}$. In final, daca I_π este convexa, atunci imaginea ei prin aplicatia liniara P este convexa, si la fel este si inchiderea acestei imaginii, adica, $I_{\pi\circ\phi}$. $\square$

Corolarul 5.3.8. *Fie G un grup topologic. Daca $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ este o reprezentare cu $\dim \mathcal{H} < \infty$, atunci $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{H}$.*

Demonstraţie. Privim aplicatia identitate $\mathrm{id}_{U(\mathcal{H})}\colon U(\mathcal{H}) \to U(\mathcal{H})$ ca o reprezentare a grupului Lie $U(\mathcal{H})$ (folosind ipoteza $\dim \mathcal{H} < \infty$), si este clar $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{id}_{U(\mathcal{H})}) = \mathcal{H}$. Pe de alta parte, Propozitia 5.3.7 implica $\mathcal{H}_\infty(\mathrm{id}_{U(\mathcal{H})}) \subseteq \mathcal{H}_\infty(\mathrm{id}_{U(\mathcal{H})} \circ \pi) = \mathcal{H}_\infty(\pi)$, deci $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{H}_\infty(\pi)$, si demonstratia se incheie. $\square$

5.4 Multimile moment pentru reprezentari de grupuri local compacte

In aceasta sectiune consideram doar reprezentari de grupuri local compacte, deoarece aceasta ipoteza ne permite sa folosim C^*-algebre in studiul acestor reprezentari.

Notatia 5.4.1. Daca G este un grup local compact si $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ este o reprezentare, atunci notam din nou cu π atat reprezentarea corespunzatoare a $*$-algebrei Banach $L^1(G)$, deci $\pi\colon L^1(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, cat si extensia ei la C^*-algebra grupala $C^*(G)$, adica, C^*-algebra anvelopanta a lui $L^1(G)$. Nucleul $*$-reprezentarii $\pi\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ este notat prin $\mathrm{Ker}_{C^*}(\pi)$.

Demonstratiile Propozitiilor 5.4.2–5.4.4 sunt adaptari ale metodelor din demonstratia [AL92, Prop. 5.1] folosind si idei din [Ne00, Sect. X.6].

Propozitia 5.4.2. *Daca G este un grup local compact si $\pi_j\colon G \to U(\mathcal{H}_j)$ pentru $j = 1, 2$ sunt reprezentari cu $\mathrm{Ker}_{C^*}(\pi_1) \supseteq \mathrm{Ker}_{C^*}(\pi_2)$, atunci $I_{\pi_1} \subseteq \overline{\mathrm{conv}\,(I^0_{\pi_2})} \subseteq \overline{\mathrm{conv}\,(I_{\pi_2})}$.*

Demonstraţie. Facem demonstratia in trei pasi.

Pasul 1. Din Lema 5.3.3, este suficient sa aratam ca pentru orice vector w intr-o submultime densa a lui $\mathcal{H}_{1,\infty}$ avem

$$\Psi_{\pi_1}(w) \in \overline{\text{conv}\,(I^0_{\pi_2})}. \tag{5.4.1}$$

Pentru a termina folosim submultimea densa a lui $\mathcal{H}_{1,\infty}$ data de Propozitia 5.2.10, deci am verificat (5.4.1) pentru $w = \pi_1(f)v$, unde $v \in \mathcal{H}_{1,\infty}$ cu $\|v\| = 1$, si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$.

Pasul 2. In acest pas fixam $\gamma \in \Lambda(G)$, si fie $\varepsilon > 0$ fixat. Deoarece $\text{Ker}_{C^*}(\pi_1) \supseteq \text{Ker}_{C^*}(\pi_2)$, rezulta din [Di64, Prop. 3.4.2(i)] ca pentru orice multime finita $F \subseteq C^*(G)$ exista un intreg $n \geq 1$ si vectorii $\eta_1, \dots, \eta_n \in \mathcal{H}_2$ cu $\sum\limits_{k=1}^{n} \|\eta_k\|^2 = 1$ si pentru orice $a \in F$,

$$|\langle \pi_1(a)v, v\rangle - \sum_{k=1}^{n} \langle \pi_2(a)\eta_k, \eta_k\rangle| < \varepsilon. \tag{5.4.2}$$

Folosim proprietatea de mai sus pentru $F = \{f^* * f, f^* * D^R_\gamma f\}$, folosind notatia (5.2.3). Pentru orice $u \in \mathcal{H}_{j,\infty}$ si $a = f^* * D^R_\gamma f$ avem din (5.2.7),

$$\begin{aligned}\langle \pi_j(a)u, u\rangle &= \langle \pi_j(f^* * D^R_\gamma f)u, u\rangle = \langle \pi_j(D^R_\gamma f)u, \pi_j(f)u\rangle = \langle \mathrm{d}\pi_j(\gamma)\pi_j(f)u, \pi_j(f)u\rangle \\ &= \mathrm{i}\|\pi_j(f)u\|^2 (\Psi_{\pi_j}(\pi_j(f)u))(\gamma)\end{aligned}$$

deci (5.4.2) implica

$$\Big|(\Psi_{\pi_1}(\pi_1(f)v))(\gamma) - \sum_{k=1}^{m} \frac{\|\pi_2(f)\eta_k\|^2}{\|\pi_1(f)v\|^2}(\Psi_{\pi_2}(\pi_2(f)\eta_k))(\gamma)\Big| < \frac{\varepsilon}{\|\pi_1(f)v\|^2}.$$

Atunci

$$\Big|(\Psi_{\pi_1}(\pi_1(f)v))(\gamma) - \delta_\varepsilon \sum_{k=1}^{m} t_k(\Psi_{\pi_2}(\pi_2(f)\eta_k))(\gamma)\Big| < \frac{\varepsilon}{\|\pi_1(f)v\|^2} \tag{5.4.3}$$

unde $t_k := \|\pi_2(f)\eta_k\|^2 / \sum\limits_{\ell=1}^{n} \|\pi_2(f)\eta_\ell\|^2$ si $\delta_\varepsilon := \Big(\sum\limits_{\ell=1}^{n} \|\pi_2(f)\eta_\ell\|^2\Big) / \|\pi_1(f)v\|^2$, deci avem relatiile $t_1, \dots, t_n \in [0,1]$ si $t_1 + \cdots + t_n = 1$.

In particular $\psi_\varepsilon := \sum\limits_{k=1}^{m} t_k \Psi_{\pi_2}(\pi_2(f)\eta_k) \in \text{conv}\,(I^0_{\pi_2})$.

Pe de alta parte, folosind (5.4.2) pentru $a = f^* * f$, obtinem

$$\Big|\|\pi_1(f)v\|^2 - \sum_{\ell=1}^{n} \|\pi_2(f)\eta_\ell\|^2\Big| < \varepsilon$$

adica, $|1 - \delta_\varepsilon| < \varepsilon / \|\pi_1(f)v\|^2$. Reciproc, luand in considerare (5.4.3), vedem ca pentru $w = \pi_1(f)v$ si $\gamma \in \Lambda(G)$, exista familiile $\{\delta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ in $(0,\infty)$ si $\{\psi_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ in $\text{conv}\,(I^0_{\pi_2})$

satisfacand $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon = 1$ si $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta_\varepsilon\psi_\varepsilon(\gamma) = (\Psi_{\pi_1}(w))(\gamma)$, deci

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\psi_\varepsilon(\gamma) = (\Psi_{\pi_1}(w))(\gamma). \tag{5.4.4}$$

Vom folosi acest fapt la pasul urmator al demonstratiei in vederea obtinerii (5.4.1).

Pasul 3. Presupunem ca (5.4.1) nu e verificata pentru $w = \pi_1(f)v$ ca mai sus. Deoarece $\overline{\mathrm{conv}\,(I^0_{\pi_2})}$ este o submultime convexa inchisa a spatiului local convex $\Lambda(G)^*$ (vezi Lemele 5.2.3 si 5.3.2), rezulta din [Ru91, Th. 3.4(b)] ca exista un numar real $t > 0$ o functionala liniara continua $\Gamma\colon \Lambda(G)^* \to \mathbb{R}$ cu

$$\Gamma(\Psi_{\pi_1}(w))) + t < \Gamma(\psi) \text{ pentru orice } \psi \in \overline{\mathrm{conv}\,(I^0_{\pi_2})}.$$

Deoarece $\Lambda(G)^*$ este un subspatiu topologic al lui $\mathbb{R}^{\Lambda(G)}$, deci este inzestrat cu topologia convergentei punctuale pe $\Lambda(G)$, rezulta din [Ru91, Th. 3.10] ca exista $\gamma \in \Lambda(G)$ astfel incat $\Gamma(\psi) = \psi(\gamma)$ pentru orice $\psi \in \Lambda(G)^*$, si prin urmare

$$(\Psi_{\pi_1}(w))(\gamma) + t < \psi(\gamma) \text{ pntru orice } \psi \in \overline{\mathrm{conv}\,(I^0_{\pi_2})}.$$

Daca folosim proprietatea de mai sus pentru $\psi = \psi_\varepsilon$, obtinem o contradictie cu (5.4.4), si demonstratia se incheie. $\square$

In legatura cu demonstratia Propozitiei 5.4.2 notam ca folosirea Lemelor 5.2.3 si 5.3.2 putea fi evitata prin folosirea [Di64, Prop. 3.4.2(i)] pentru o multime finita mai mare $F = \{f^* * f\} \cup \{f^* * D^R_\gamma f \mid \gamma \in L_0\}$, cu o multime finita arbitrara $L_0 \subseteq \Lambda(G)$, deoarecece functionalele liniare continue pe $\mathbb{R}^{\Lambda(G)}$ sunt combinatii liniare de evaluari pe submultimi finite ale lui $\Lambda(G)$.

Prezentam acum o proprietate utila de dezintegrare a $*$-reprezentarilor ciclice ale C^*-algebrelor separabile.

Lema 5.4.3. *Fie $\pi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ o $*$-reprezentare ciclica a unei C^*-algebre separabile. Atunci exista un spatiu metric compact Z cu o masura Radon de probabilitate μ, un camp masurabil de spatii Hilbert $\{\mathcal{H}_\zeta\}_{\zeta\in Z}$, un vector $\int^\oplus w_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta) \in \int^\oplus \mathcal{H}_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta)$, un camp masurabil de $*$-reprezentari ireductibile $\{\sigma_\zeta\colon \mathcal{A} \to U(\mathcal{H}_\zeta)\}_{\zeta\in Z}$ si un operator unitar $V\colon \mathcal{H} \to \int^\oplus \mathcal{H}_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta)$ care satisfac urmatoarele conditii:*

1. *Avem $V\pi(\cdot)V^{-1} = \int^\oplus \sigma_\zeta(\cdot)\mathrm{d}\mu(\zeta)$ si w este un vector ciclic pentru aceasta reprezentare.*
2. *Pentru orice $a, b \in \mathcal{A}$ functia $\zeta \mapsto \langle \sigma_\zeta(a)w_\zeta, \sigma_\zeta(b)w_\zeta\rangle$ este continua pe Z.*

Demonstrație. Extinzand π la unitalizarea lui $\mathcal{A}$ daca e necesar, putem presupune ca $\mathcal{A}$ are element unitate. Fie $w \in \mathcal{H}$ un vector ciclic pentru π cu $\|v\| = 1$, si definim functionala $\varphi\colon \mathcal{A} \to \mathbb{C}$, $\varphi(\cdot) := \langle \pi(\cdot)v, v\rangle$. Notand prin S multimea tuturor starilor lui $\mathcal{A}$, care este un spatiu metrizabil compact cu topologia slaba (deoarece $\mathcal{A}$ este separabila), rezulta din [BR87, 4.1.3, 4.1.11, 4.1.25, 4.2.5] ca exista o masura Radon de probabilitate μ pe S care este o masura ortogonala si satisface

$$\varphi = \int_S \zeta \mathrm{d}\mu(\zeta)$$

si $\mu(P) = 1$, unde P este multimea starilor pure ale lui $\mathcal{A}$. Deoarece μ este o masura ortogonala si π este unitar echivalenta cu reprezentarea GNS a lui $\mathcal{A}$ asociata cu starea φ (deoarece v este un vector ciclic), rezulta din [BR87, 4.4.9] ca exista un operator unitar

$$V\colon \mathcal{H} \to \int^{\oplus} \mathcal{H}_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta)$$

cu $V\pi(\cdot)V^{-1} = \int^{\oplus} \sigma_\zeta(\cdot)\mathrm{d}\mu(\zeta)$ si $Vw = \int^{\oplus} w_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta)$, unde pentru orice $\zeta \in S$ notam prin $\sigma_\zeta\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_\zeta)$ reprezentarea sa GNS corespunzatoare, cu vectorul unitar ciclic $w_\zeta \in \mathcal{H}_\zeta$ cu $\zeta(\cdot) = \langle \sigma_\zeta(\cdot)w_\zeta, w_\zeta\rangle$. Atunci pentru orice $a, b \in \mathcal{A}$ si $\zeta \in S$ avem

$$\langle \sigma_\zeta(a)w_\zeta, \sigma_\zeta(b)w_\zeta\rangle = \langle \sigma_\zeta(b^*a)w_\zeta, w_\zeta\rangle = \zeta(b^*a)$$

si aceasta depinde continuu de $\zeta \in S$ deoarece S este inzestrat cu topologia slaba. Concluzia este obtinuta daca definim Z ca inchiderea lui P in S. $\square$

Propozitia 5.4.4. *Fie G un grup local compact separabil si $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ o reprezentare astfel incat I_σ este convexa pentru orice reprezentare ireductibila $\sigma\colon G \to U(\mathcal{H}_\sigma)$ cu* $\operatorname{Ker}_{C^*}(\sigma) \supseteq \operatorname{Ker}_{C^*}(\pi)$*. Atunci I_π este convexa.*

Demonstrație. Fie $\pi = \bigoplus_{j\in J} \pi_j$ o descompunere a lui $\pi\colon C^*(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ in reprezentari ciclice. Din Propozitia 5.3.6, este suficient sa aratam ca pentru orice $j_0 \in J$ multimea $I_{\pi_{j_0}}$ este convexa. Avem $\operatorname{Ker}\pi = \bigcap\limits_{j\in J} \operatorname{Ker}\pi_j \subseteq \operatorname{Ker}\pi_{j_0}$, deci orice reprezentare $\sigma\colon G \to U(\mathcal{H}_\sigma)$ ce indeplineste $\operatorname{Ker}_{C^*}(\sigma) \supseteq \operatorname{Ker}_{C^*}(\pi_{j_0})$ satisface $\operatorname{Ker}_{C^*}(\sigma) \supseteq \operatorname{Ker}_{C^*}(\pi)$, deci I_σ este convexa din ipoteza. Deci π_{j_0} satisface conditia din ipoteza si atunci, inlocuind π cu π_{j_0}, putem presupune ca π este o reprezentare ciclica.

Dar atunci, folosind Lema 5.4.3, putem presupune ca exista un spatiu metric compact Z cu o masura pozitiva μ, un camp masurabil de spatii Hilbert $\{\mathcal{H}_\zeta\}_{\zeta\in Z}$ si un camp masurabil de reprezentari ireductibile $\{\sigma_\zeta\colon G \to U(\mathcal{H}_\zeta)\}_{\zeta\in Z}$ astfel incat $\mathcal{H} = \int^{\oplus} \mathcal{H}_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta)$ si $\pi = \int^{\oplus} \sigma_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta)$.

Folosind metoda din demonstratia [Ne00, Th. X.6.16(ii)], putem gasi o multime μ-neglijabila $Z_0 \subseteq Z$ cu $\mathrm{Ker}_{C^*}(\pi) = \mathrm{Ker}_{C^*}(\widetilde{\pi})$, unde $\widetilde{\pi} := \bigoplus_{\zeta \in Z \setminus Z_0} \sigma_\zeta$. Atunci reprezentarea $\widetilde{\pi}$ este convexa din Propozitia 5.3.6, si din Propozitia 5.4.2 obtinem $I_\pi \subseteq I_{\widetilde{\pi}}$.

Pentru a arata ca I_π este convexa, aratam ca $I_\pi \supseteq I_{\widetilde{\pi}}$. Folosind Propozitia 5.3.6 si demonstratia sa, este suficient sa aratam ca pentru orice multime finita $F = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\} \subseteq Z \setminus Z_0$ reprezentarea $\widetilde{\pi}_F := \bigoplus_{j=1}^{m} \sigma_{\zeta_j}$ satisface $I_{\widetilde{\pi}_F} \subseteq I_\pi$. Pentru a incheia, folosind Propozitia 5.2.10 si Lema 5.3.3, este suficient sa aratam ca pentru $v = v_{\zeta_1} \oplus \cdots \oplus v_{\zeta_m} \in \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{H}_{\zeta_j}$ si $f \in \mathcal{C}_0^\infty(G)$ cu $\|\widetilde{\pi}_F(f)v\| = 1$ avem

$$\Psi_{\widetilde{\pi}_F}(\widetilde{\pi}_F(f)v) \in I_\pi. \tag{5.4.5}$$

Folosind (5.3.3) si $\|\widetilde{\pi}_F(f)v\| = 1$, obtinem

$$\begin{aligned} \Psi_{\widetilde{\pi}_F}(\widetilde{\pi}_F(f)v) &= \Psi_{\widetilde{\pi}_F}(\sigma_{\zeta_1}(f)v_{\zeta_1} \oplus \cdots \oplus \sigma_{\zeta_m}(f)v_{\zeta_m}) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \|\sigma_{\zeta_j}(f)v_{\zeta_j}\|^2 \Psi_{\sigma_{\zeta_j}}(\sigma_{\zeta_j}(f)v_{\zeta_j}) \end{aligned} \tag{5.4.6}$$

Pentru orice $\varepsilon > 0$ fie $h^\varepsilon := (h_1^\varepsilon, \dots, h_m^\varepsilon) \in \mathcal{C}(Z)^m$ cu $0 \le h_j^\varepsilon$ pe Z, $h_j^\varepsilon = 1$ pe o vecinatate a lui $\zeta_j \in Z$, $\mathrm{supp}\, h_j^\varepsilon$ continut in bila deschisa $B_{\zeta_j}(\varepsilon)$ in Z de centru ζ_j si raza ε, $\|h_j^\varepsilon\|_{L^2(Z,\mu)} = 1$, si $(\mathrm{supp}\, h_j^\varepsilon) \cap (\sup h_k^\varepsilon) = \emptyset$ daca $j \neq k$. Deoarece reprezentarea $\sigma_{\zeta_j} \colon C^*(G) \to \mathcal{B}(\mathcal{H}_{\zeta_j})$ este ireductibila, rezulta din teorema de tranzitivitate [Di64, Cor. 2.8.4] ca exista $a_j \in C^*(G)$ cu $\sigma_{\zeta_j}(a_j)w_{\zeta_j} = v_{\zeta_j}$, unde $\int^\oplus w_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta) \in \mathcal{H}$ este vectorul unitar dat de Lema 5.4.3. Definim

$$v^\varepsilon := \sum_{j=1}^{m} \int_Z^\oplus h_j^\varepsilon(\zeta)\sigma_\zeta(a_j)w_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta) \in \mathcal{H},$$

deci

$$\pi(f)v^\varepsilon = \sum_{j=1}^{m} \int_Z^\oplus h_j^\varepsilon(\zeta)\sigma_\zeta(f)\sigma_\zeta(a_j)w_\zeta \mathrm{d}\mu(\zeta). \tag{5.4.7}$$

Deoarece $(\mathrm{supp}\, h_j^\varepsilon) \cap (\sup h_k^\varepsilon) = \emptyset$ pentru $j \neq k$, rezulta ca

$$\begin{aligned} \|\pi(f)v_\varepsilon\|^2 &= \sum_{j=1}^{m} \int_Z h_j^\varepsilon(\zeta)^2 \|\sigma_\zeta(f)\sigma_\zeta(a_j)w_\zeta\|^2 \mathrm{d}\mu(\zeta) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \|\sigma_{\zeta_j}(f)v_{\zeta_j}\|^2 + \sum_{j=1}^{m} \int_Z h_j^\varepsilon(\zeta)^2 (\|\sigma_\zeta(fa_j)w_\zeta\|^2 - \|\sigma_{\zeta_j}(fa_j)w_{\zeta_j}\|^2) \mathrm{d}\mu(\zeta) \end{aligned}$$

deoarece $\sigma_{\zeta_j}(fa_j)w_{\zeta_j} = \sigma_{\zeta_j}(f)\sigma_{\zeta_j}(a_j)w_{\zeta_j} = \sigma_{\zeta_j}(f)v_{\zeta_j}$ si $\|h_j^\varepsilon\|_{L^2(Z,\mu)} = 1$. Reamintind ca $\mathrm{supp}\, h_j^\varepsilon \subseteq B_{\zeta_j}(\varepsilon)$ si functiile $\zeta \mapsto \|\sigma_\zeta(fa_j)w_\zeta\|$ sunt continue pentru $j = 1, \dots, m$ (vezi

Lema 5.4.3(2)), si folosind teorema Lebesgue de convergenta dominata , rezulta ca

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\pi(f)v_\varepsilon\|^2=\sum_{j=1}^m\|\sigma_{\zeta_j}(f)v_{\zeta_j}\|^2=\|\widetilde{\pi}_F(f)v\|^2=1. \tag{5.4.8}$$

In plus, folosind (5.2.7), avem pentru $\gamma\in\Lambda(G)$

$$\begin{aligned}\langle \mathrm{d}\pi(\gamma)\pi(f)v_\varepsilon,\pi(f)v_\varepsilon\rangle &= \langle \pi(D_\gamma^R f)v_\varepsilon,\pi(f)v_\varepsilon\rangle\\ &=\sum_{j=1}^m\int_Z h_j^\varepsilon(\zeta)^2\langle\sigma_\zeta(D_\gamma^R f)\sigma_\zeta(a_j)w_\zeta,\sigma_\zeta(f)\sigma_\zeta(a_j)w_\zeta\rangle\mathrm{d}\mu(\zeta)\end{aligned}$$

unde am folosit si (5.4.7) si faptul ca $(\operatorname{supp} h_j^\varepsilon)\cap(\sup h_k^\varepsilon)=\emptyset$ pentru $j\neq k$. Deoarece functiile

$$\zeta\mapsto\langle\sigma_\zeta(D_\gamma^R f)\sigma_\zeta(a_j)w_\zeta,\sigma_\zeta(f)\sigma_\zeta(a_j)w_\zeta\rangle=\langle\sigma_\zeta((D_\gamma^R f)a_j)w_\zeta,\sigma_\zeta(fa_j)w_\zeta\rangle$$

sunt continue din Lema 5.4.3(2), obtinem ca mai sus din (5.2.7)

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\langle \mathrm{d}\pi(\gamma)\pi(f)v_\varepsilon,\pi(f)v_\varepsilon\rangle &=\sum_{j=1}^m\langle\sigma_{\zeta_j}(D_\gamma^R f)\sigma_{\zeta_j}(a_j)w_{\zeta_j},\sigma_{\zeta_j}(f)\sigma_{\zeta_j}(a_j)w_{\zeta_j}\rangle\\ &=\sum_{j=1}^m\langle\mathrm{d}\sigma_{\zeta_j}(\gamma)\sigma_{\zeta_j}(f)v_j,\sigma_{\zeta_j}(f)v_j\rangle\\ &=(\Psi_{\widetilde{\pi}_F}(\widetilde{\pi}_F(f)v))(\gamma)\end{aligned}$$

unde ultima egalitate rezulta din (5.4.6). Acum, din (5.4.8), avem

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\Psi_\pi(\pi(f)v_\varepsilon))(\gamma)=(\Psi_{\widetilde{\pi}_F}(\widetilde{\pi}_F(f)v))(\gamma).$$

Deoarece $\gamma\in\Lambda(G)$ este arbitrar, aceasta implica (5.4.5) si demonstratia se incheie. □

Corolarul 5.4.5. *Fie G un grup local compact separabil. Daca multimea moment a oricarei reprezentari ireductibile a lui G este convexa, atunci aceasta proprietate este valabila pentru orice reprezentare a lui G.*

Demonstraţie. Se foloseste Propozitia 5.4.4. □

5.5 Rezultatul principal

Este convenabil sa introducem urmatoarea definitie. Mai multe informatii despre grupuri topologice rezolubile pot fi gasite in [HM07, Chs. 7 si 10] si [Bos76].

Definitia 5.5.1. Un grup topologic G se numeste *rezolubil* daca pentru orice vecinatate V a lui $1 \in G$ exista un intreg $k \geq 0$ cu $G^{(k)} \subseteq V$. Aici $G = G^{(0)} \supseteq G^{(1)} \supseteq \cdots$ este seria descrescatoare a lui G definita prin conditia ca $G^{(k+1)}$ este subgrupul inchis al lui G generat de multimea $\{xyx^{-1}y^{-1} \mid x, y \in G^{(k)}\}$.

Teorema 5.5.2. *Fie G un grup local compact separabil rezolubil. Atunci multimea moment inchisa a oricarei reprezentari a lui G este convexa.*

Demonstrație. Putem presupune ca G is conex, deoarece $\Lambda(G)$ depinde doar de componenta conexa a lui 1 din G. Dupa cum arata Corolarul 5.4.5, este suficient sa aratam ca pentru orice reprezentare ireductibila $\pi\colon G \to U(\mathcal{H})$ inchiderea multimii sale moment I_π este convexa. Folosind [Mag81, Cor. la Lema 1], exista $N_0 \in \mathcal{N}_0(G)$ cu $\pi = \pi_0 \circ p$, unde am folosit notatia din Corolarul 5.2.11. Din acest corolar, $\mathcal{H}_\infty(\pi_0)$ este densa in $\mathcal{H}_\infty(\pi)$, deci Propozitia 5.3.7 arata ca daca stim ca I_{π_0} este convexa, atunci si I_π este convexa. Dar I_{π_0} este o a multime convexa din [AL92, Th. 13], deoarece $\pi_0\colon G/N_0 \to U(\mathcal{H})$ este o reprezentare a unui grup Lie finit dimensional care este rezolubil din [HM07, Th. 10.18]. Aceasta incheie demonstratia. □

5.6 Despre exemple si aplicatii ale convexitatii multimilor moment

Pentru orice grup Lie nilpotent finit dimensional G exista o corespondenta bijectiva intre urmatoarele multimi:

- clasele de echivalenta de reprezentari unitare ireductibile ale lui G;
- orbitele actiunii coadjuncte $\mathrm{Ad}_G^*\colon G \times \Lambda(G)^* \to \Lambda(G)^*$.

Aceasta corespondenta este construita pe baza asa-numitei metode a lui A. Kirillov si se bazeaza pe faptul ca orbitele coadjuncte sunt varietati diferentiale ce pot fi inzestrate in mod canonic cu structuri simplectice G-invariante. Variante ale corespondentei mentionate mai sus au fost puse in evidenta si pentru alte tipuri de grupuri Lie, inclusiv pentru cele rezolubile, ceea ce a condus la teoreme de clasificare pentru reprezentari unitare ireductibile ale grupurilor respective.

Ar fi important de extins aceasta metoda de clasificare a reprezentarilor si la grupuri topologice mai generale (de exemplu grupuri Lie infinit dimensonale, sau grupuri local compacte care nu sunt grupuri Lie), dar dificultatea principala este ca, pentru astfel de grupuri, orbitele actiunii coadjuncte nu sunt in general varietati diferentiabile. De aceea, ca un prim pas in acest sens, se poate incerca sa se clasifice reprezentarile unui grup G, inlocuind orbitele coadjuncte cu multimile moment, care sunt mai simplu de definit. Aceasta idee functioneaza intr-devar in directia dorita, deoarece daca G este un grup Lie nilpotent iar $\pi\colon G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$ este o reprezentare unitara ireductibila, atunci exista o stransa legatura intre orbita coadjuncta $\mathcal{O}_\pi \subseteq \Lambda(G)^*$ si multimea moment $I_\pi \subseteq \Lambda(G)^*$ ale reprezentarii π, si anume

$$I_\pi = \overline{\mathrm{conv}\,(\mathcal{O}_\pi)}$$

(a se vedea [Wi89], si de asemenea [AL92] pentru varianta acestei egalitati in situatia mai generala a grupurilor rezolubile).

In cadrul celor de mai sus, enuntam urmatoarea consecinta simpla a Teoremei 5.5.2, care ilustreaza importanta proprietatilor de convexitate ale multimilor moment:

Corolarul 5.6.1. *Fie G un grup local compact separabil rezolubil.*

1. *Pentru orice reprezentare $\pi\colon G \to \mathcal{B}(\mathcal{H})$, multimea moment $I_\pi \subseteq \Lambda(G)^*$ este inchisa, convexa, si invarianta in raport cu actiunea coadjuncta*

$$\mathrm{Ad}_G^*\colon G \times \Lambda(G)^* \to \Lambda(G)^*, \quad (x,\xi) \mapsto \xi \circ \mathrm{Ad}_G(x^{-1}).$$

2. *Daca π_1 si π_2 sunt reprezentari unitare ale lui G, atunci $I_{\pi_1} \neq I_{\pi_2}$ daca si numai daca, eventual schimband numerotarea lui π_1 şi π_2, exista $\gamma \in \Lambda(G)$ si $\xi_1 \in I_{\pi_1}$ astfel incat*

$$\xi_1(\gamma) > \sup_{\xi \in I_{\pi_2}} \xi(\gamma)$$

iar in acest caz reprezentarile π_1 si π_2 nu sunt unitar echivalente.

Demonstraţie. Prima afirmatie rezulta din Teorema 5.5.2 si Definitia 5.3.1.

Pentru a doua afirmatie, sa presupunem ca $I_{\pi_1} \neq I_{\pi_2}$. Eventual schimband numerotarea lui π_1 şi π_2, rezulta ca $I_{\pi_1} \not\subseteq I_{\pi_2}$, deci exista $\xi_1 \in I_{\pi_1}$ astfel incat $\xi_1 \notin I_{\pi_2}$. Deoarece multimea I_{π_2} este inchisa si convexa, rezulta din [Ru91, Th. 3.4(b)] ca exista o functionala liniara continua $\Gamma\colon \Lambda(G)^* \to \mathbb{R}$ cu $\Gamma(\xi_1) > \sup\limits_{\xi \in I_{\pi_2}} \Gamma(\xi)$. Dar, deoarece spatiul $\Lambda(G)^*$ este inzestrat cu topologia slaba, exista $\gamma \in \Lambda(G)$ incat $\Gamma(\xi) = \xi(\gamma)$ pentru orice $\xi \in \Lambda(G)^*$, deci $\xi_1(\gamma) > \sup\limits_{\xi \in I_{\pi_2}} \xi(\gamma)$. In fine, sa observam ca pricare doua reprezentari unitar echivalente au aceeasi multime moment, ca o consecinta directa a Definitiei 5.3.1, si aceasta incheie demonstratia. □

Vom incheia printr-un exemplu de calcul al multimii moment pentru o reprezentare a unui grup Lie nilpotent.

Exemplul 5.6.2. Consideram grupul Heisenberg 3-dimensional $G = \mathbb{R}^3$ cu operatia de inmultire

$$(x_1, y_1, z_1) \cdot (x_2, y_2, z_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)/2).$$

Algebra Lie a lui G este $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^3$ cu paranteza Lie

$$[(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)] = (0, 0, x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Notam cu $X = (1, 0, 0)$, $Y = (0, 1, 0)$, $Z = (0, 0, 1)$ baza canonica a lui $\mathfrak{g}$, deci avem relatiile de comutare canonice

$$[X, Y] = Z \text{ si } [X, Z] = [Y, Z] = 0.$$

Vom calcula multimea moment pentru reprezentarea Schrödinger

$$\pi \colon G \to \mathcal{B}(\mathcal{H}), \quad (\pi(x, y, z)\varphi)(q) = e^{\mathrm{i}(z+(xy/2)+yq)}\varphi(q + x),$$

unde $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{R})$. Se stie ca spatiul vectorilor de clasa C^∞ pentru aceasta reprezentare este $\mathcal{H}_\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (spatiul Schwartz al functiilor cu descrestere rapida), iar reprezentarea derivata

$$\mathrm{d}\pi \colon \mathfrak{g} \to \mathrm{End}\,(\mathcal{H}_\infty), \quad \mathrm{d}\pi(V)\varphi = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \pi(tV)\varphi$$

este o aplicatie liniara ale carei valori pe baza canonica $\{X, Y, Z\} \subset \mathbb{R}^3$ sunt operatorii care actioneaza prin

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}\pi(X)\varphi &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \pi(t, 0, 0)\varphi = \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}q} = \varphi' \\
\mathrm{d}\pi(Y)\varphi &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \pi(0, t, 0)\varphi = \mathrm{i}M_{\mathbf{q}}\varphi \\
\mathrm{d}\pi(Z)\varphi &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big|_{t=0} \pi(0, 0, t)\varphi = \mathrm{i}\varphi
\end{aligned}$$

unde $(M_{\mathbf{q}}\varphi)(q) := q\varphi(q)$ este operatorul de inmultire cu variabila independenta $q \in \mathbb{R}$. Reamintim ca aplicatia moment este

$$\Psi_\pi \colon \mathcal{H}_\infty \setminus \{0\} \to \mathfrak{g}^*, \quad \Psi_\pi(\varphi) = \frac{1}{\mathrm{i}} \frac{\langle \mathrm{d}\pi(\cdot)\varphi, \varphi\rangle}{\langle \varphi, \varphi\rangle},$$

unde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ este produsul scalar din $L^2(\mathbb{R})$. Deci pentru orice $\varphi \in \mathcal{H}_\infty = \mathcal{S}(\mathbb{R})$ cu $\|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$, functionala $\Psi_\pi(\varphi) \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este data de formula

$$(\Psi_\pi(\varphi))(x, y, z) = \frac{1}{\mathrm{i}} x\langle \varphi', \varphi\rangle + y\langle M_{\mathbf{q}}\varphi, \varphi\rangle + z\langle \varphi, \varphi\rangle = \frac{1}{\mathrm{i}} x\langle \varphi', \varphi\rangle + y\langle M_{\mathbf{q}}\varphi, \varphi\rangle + z$$

pentru orice $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Deci multimea moment I_π poate fi identificata cu inchiderea in $\mathbb{R}^3$ a multimii

$$\left\{ \left(\frac{1}{\mathrm{i}} \langle \varphi', \varphi \rangle, \langle M_{\mathbf{q}} \varphi, \varphi \rangle, 1 \right) \,\Big|\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}),\ \|\varphi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1 \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

de unde rezulta usor ca

$$I_\pi = \mathbb{R}^2 \times \{1\}$$

care este intr-adevar o multime inchisa convexa, dupa cum stiam din rezultatele generale.

5.7 Note bibliografice

Rezultatele din acest capitol sunt in intregime originale si sunt incluse in articolul nostru [BNi14b].

Appendix A

Clase si exemple de grupuri topologice

A.1 Clase de grupuri topologice

Dam mai jos lista celor mai importante clase de grupuri topologice care intervin in aceasta lucrare. Grupurile conexe din fiecare dintre tipurile de grupuri enumerate aici sunt incluse printre cele din tipul imediat urmator din aceasta lista. Pentru clasele de grupuri mai putin cunoscute, indicam in paranteza si locul din aceasta lucrare unde poate fi gasita definitia respectiva.

1. Grup Lie finit dimensional
2. Grup local compact
3. Grup pro-Lie (pag. 80)
4. Grup pre-Lie (Definitia 1.3.1 la pag. 10)
5. Grup topologic cu algebra Lie (Definitia 3.3.22 la pag. 60)
6. Grup topologic cu proprietatea Trotter (Definitia 4.2.1 la pag. 72)
7. Grup topologic

A.2 Exemple de grupuri topologice

Mentionam acum cateva exemple care ilustreaza diferentele dintre clasele de grupuri din lista de mai sus.

Exemplul A.2.1 (grup Lie nilpotent conex)**.** A se vedea grupul Heisenberg 3-dimensional din Exemplul 5.6.2.

Exemplul A.2.2 (grup local compact conex care nu este grup Lie)**.** Fie

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$$

cercul unitate din planul complex. Atunci $\mathbb{T}$ este un grup Lie compact conex in raport cu operatia de inmultire. Rezulta ca si produsul cartezian infinit $\mathbb{T}^{\mathbb{N}}$ este un grup topologic compact conex, care insa nu este un grup Lie finit dimensional, deoarece in caz contrar, algebra sa Lie ar trebui sa fie spatiul vectorial $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, iar aceasta spatiu este infinit dimensional.

Exemplul A.2.3 (grup pro-Lie conex care nu este local compact)**.** Fie J o multime infinita. Definim spatiul vectorial topologic $\mathcal{Y} = \mathbb{R}^J$ si grupul topologic $G = (\mathcal{Y}, +)$. Atunci $\mathcal{Y}$ este limita proiectiva a sistemului de grupuri Lie finit dimensionale $\{\mathbb{R}^F\}_{\substack{F \subset J \\ |F| < \infty}}$ deci este grup pro-Lie. Dar din [HM07, Th. Prop. A2.18] rezulta ca G nu este local compact, deoarece $|J| = \infty$.

Exemplul A.2.4 (grup pre-Lie care nu este pro-Lie)**.** Fie $\mathcal{Y}$ un spatiu vectorial topologic cu grupul aditiv subiacent $G = (\mathcal{Y}, +)$. Atunci G este un grup topologic abelian, deci pre-Lie, iar algebra Lie a lui G poate fi identificata cu $\mathcal{Y}$, cu paranteza Lie identic nula.

Pe de alta parte, daca G este chiar grup pro-Lie, atunci din [HM07, Th. 3.12, Cor. A2.9, Prop. 3.8] rezulta ca $\mathcal{Y}$ este izomorf ca spatiu vectorial topologic cu $\mathbb{R}^J$ pentru o multime de indici convenabila J. Deci daca $\mathcal{Y}$ nu are aceasta proprietate, atunci grupul $G = (\mathcal{Y}, +)$ este pre-Lie dar nu este pro-Lie. De exemplu, daca $\mathcal{Y}$ este un spatiu Banach infinit dimensional, atunci el nu este izomorf cu $\mathbb{R}^J$ pentru nicio multime de indici J.

Exemplul A.2.5 (grup topologic cu algebra Lie care nu este pre-Lie)**.** Din Teorema 3.4.4 rezulta ca daca G un grup topologic nilpotent de pas 2 pentru care singura functionala liniara si continua $\psi \colon \Lambda(G) \to \mathbb{R}$ este $\psi = 0$, atunci grupul tangent $T(G) = G \ltimes \Lambda(G)$ nu este grup pre-Lie. Pe de alta parte, $T(G)$ este grup topologic nilpotent de pas 2 (Propozitiile 3.4.2 si 3.4.3) deci este grup topologic cu algebra Lie (Teorema 3.3.23).

Pentru a da un exemplu concret, sa consideram grupul aditiv $G = (L^p(E), +)$, care este abelian (deci si nilpotent de pas 2), unde $E = [0, 1]$ iar $0 < p < 1$. Cu acest exemplu ne aflam in conditiile de mai sus, deoarece din [Da40] se stie ca $L^p(E)$ este spatiu vectorial topologic metrizabil si singura functionala liniara si continua $\psi \colon L^p(E) \to \mathbb{R}$ este $\psi = 0$.

Exemplul A.2.6 (grup topologic care nu are proprietatea Trotter, deci nu are nici algebra Lie)**.** Fie $\mathcal{H}$ este un spatiu Hilbert complex separabil infinit dimensional, iar $U(\mathcal{H})$ este grupul operatorilor unitari considerat ca grup topologic cu topologia convergentei punctuale. Atunci $U(\mathcal{H})$ este un grup topologic care nu are proprietatea Trotter; a se vedea de exemplu [Be10, Ex. 2.1].

Bibliografie

[Ak95] S.S. Akbarov, Smooth structure and differential operators on a locally compact group. (Russian) *Izv. Ross. Akad. Nauk Ser. Mat.* **59** (1995), no. 1, 3–48; translation in *Izv. Math.* **59** (1995), no. 1, 1–44.

[AL92] D. Arnal, J. Ludwig, La convexité de l'application moment d'un groupe de Lie. *J. Funct. Anal.* **105** (1992), no. 2, 256–300.

[Be06] D. Beltiţă, *Smooth homogeneous structures in operator theory.* Chapman & Hall/CRC Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, 137. Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL, 2006.

[Be10] D. Beltiţă, Lie theoretic significance of the measure topologies associated with a finite trace. *Forum Math.* **22** (2010), no. 2, 241–253.

[BB11] I. Beltiţă, D. Beltiţă, On differentiability of vectors in Lie group representations. *J. Lie Theory* **21** (2011), no. 4, 771–785.

[BNi14a] D. Beltiţă, M. Nicolae, On universal enveloping algebras in a topological setting. *Preprint* arXiv:1402.0186 [math.FA] (trimis spre publicare).

[BNi14b] D. Beltiţă, M. Nicolae, Moment convexity of solvable locally compact groups. *Preprint* arXiv:1408.4554 [math.RT] (trimis spre publicare).

[Bos76] H. Boseck, Über Darstellungen lokal-kompakter topologischer Gruppen. *Math. Nachr.* **74** (1976), 233–251.

[BCR81] H. Boseck, G. Czichowski, K.P. Rudolph, *Analysis on topological groups —General Lie theory.* Teubner-Texte zur Mathematik, 37. BSB B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig, 1981.

[BR80] H. Boseck, K.P. Rudolph, An axiomatic approach to differentiability on topological groups. *Math. Nachr.* **98** (1980), 27–36.

[BR87] O. Bratteli, D.W. Robinson, *Operator algebras and quantum statistical mechanics.* 1. Second edition. Texts and Monographs in Physics. Springer-Verlag, New York, 1987.

[Da40] M.M. Day, The spaces L^p with $0 < p < 1$. *Bull. Amer. Math. Soc.* **46** (1940), 816–823.

[Di64] J. Dixmier, *Les C^*-algèbres et leurs représentations.* Cahiers Scientifiques, Fasc. XXIX Gauthier-Villars & Cie, Éditeur-Imprimeur, Paris, 1964.

[Eh56] L. Ehrenpreis, Some properties of distributions on Lie groups. *Pacific J. Math.* **6** (1956), 591–605.

[Fo45] R.H. Fox, On topologies for function spaces. *Bull. Amer. Math. Soc.* **51** (1945), 429–432.

[Gl02a] H. Glöckner, Infinite-dimensional Lie groups without completeness restrictions. In: A. Strasburger, J. Hilgert, K.-H. Neeb, W. Wojtyński (eds.), "Geometry and analysis on finite- and infinite-dimensional Lie groups" (Będlewo, 2000), Banach Center Publ., 55, Polish Acad. Sci., Warsaw, 2002, pp. 43–59.

[HM07] K.H. Hofmann, S.A. Morris, *The Lie theory of connected pro-Lie groups.* A structure theory for pro-Lie algebras, pro-Lie groups, and connected locally compact groups. EMS Tracts in Mathematics, 2. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2007.

[KM97] A. Kriegl, P.W. Michor, *The convenient setting of global analysis.* Mathematical Surveys and Monographs, 53. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[LW11] D.H. Leung, Y.S. Wang, Local operators on C^p. *J. Math. Anal. Appl.* **381** (2011), no. 1, 308–314.

[Mag81] L. Magnin, Some remarks about C^∞ vectors in representations of connected locally compact groups. *Pacific J. Math.* **95** (1981), 391–400.

[Mi90] P.W. Michor, The moment mapping for unitary representations. *Ann. Global Anal. Geom.* **8** (1990), no. 3, 299–313.

[MZ55] D. Montgomery, L. Zippin, *Topological transformation groups.* Interscience Publishers, New York-London, 1955.

[Ne00] K.-H. Neeb, *Holomorphy and convexity in Lie theory.* de Gruyter Expositions in Mathematics, 28. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2000.

[Ne06] K.-H. Neeb, Towards a Lie theory of locally convex groups. *Jpn. J. Math.* **1** (2006), no. 2, 291–468.

[Ne10] K.-H. Neeb, On differentiable vectors for representations of infinite dimensional Lie groups. *J. Funct. Anal.* **259** (2010), no. 11, 2814–2855.

[Nic14] M. Nicolae, On differential calculus on pre-Lie groups. *Preprint IMAR* no. 6/2014.

[NS12] K.-H. Neeb, H. Salmasian, Differentiable vectors and unitary representations of Fréhet-Lie subgroups. *Math. Z.* **275** (2013), no. 1–2, 419–451.

[Pe60] J. Peetre, Rectification à l'article "Une caracterisation abstraite des operateurs differentiels". *Math. Scand.* **8** (1960), 116–120.

[Ru91] W. Rudin, *Functional analysis.* Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.

[WD73] J.C. Wells, C.R. DePrima, Local automorphisms are differential operators on some Banach space. *Proc. Amer. Math. Soc.* **40** (1973), 453–457.

[Wi89] N.J. Wildberger, Convexity and unitary representations of nilpotent Lie groups. *Invent. Math.* **98** (1989), no. 2, 281–292.

[Wi92] N.J. Wildberger, The moment map of a Lie group representation. *Trans. Amer. Math. Soc.* **330** (1992), no. 1, 257–268.