

ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ
“SIMION STOILOW”

**CONTRIBUȚII LA STUDIUL
ERORILOR ORBITALE ALE
SATELIȚILOR GPS DATORATE
PERTURBAȚIILOR
NEGRAVITAȚIONALE**

TEZĂ DE DOCTORAT

- Rezumat -

Sergiu LUPU

Conducător științific:
C.S. I dr. Gabriela MARINOSCHI

BUCUREȘTI
2014

CUPRINS

	Teză	Rezumat
Introducere	1	1
Capitolul I		
SISTEMUL GLOBAL DE POZIȚIONARE NAVSTAR/GPS	5	
1.1 Structura sistemului de poziționare globală	6	
1.1.1 Segmentul spațial	6	
1.1.2 Segmentul terestru de control și urmărire	13	
1.1.3 Segmentul utilizatorilor	15	
1.2 Aplicațiile tehnologiei GPS	15	
1.3 Sisteme de referință și scări de timp	17	
1.3.1 Sistemul convențional inerțial (SCI)	18	
1.3.2 Sistemul convențional terestru (SCT)	19	
1.4 Sisteme de referință pentru timp	24	
1.5 Efemerida sateliților GPS	25	
Capitolul II		
ANALIZA CANTITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS	30	2
2.1 Ecuatiile mișcării neperturbate	30	2
2.2 Ecuatiile mișcării perturbate	30	3
2.3 Funcții de forță perturbatoare	34	
2.3.1 Perturbații de tip gravitațional	36	
2.3.2 Perturbații de tip negravitațional	42	
Capitolul III		
PERTURBAȚII DE TIP NEGRAVITAȚIONAL	46	
3.1 Efectul direct al presiunii radiației solare	46	
Interacțiunea satelit-radiația solară		
3.1.1 Efectele pe termen lung asupra semiaxei mari	47	
3.1.2 Efectele pe termen lung asupra altor elemente orbitale	53	
3.1.3 Efectele pe termen scurt	58	
3.2 Efectele indirecte ale presiunii radiației solare	60	
3.2.1 Presiunea radiației reflectată de Pământ	60	
3.2.2 Emisia termică anizotropă	66	
3.2.3 Undele radio	69	
3.2.4 Eclipsele	70	
3.3 Efectul Poynting - Robertson	71	
3.4 Perturbații cauzate de frânarea aerodinamică	72	
3.5 Modele empirice ale presiunii radiației solare pentru sateliții GPS	73	
3.5.1 Noțiuni introductive	73	
3.5.2 Selectarea orbitelor adevărate	73	
3.5.3 Parametrizarea modelului și combinarea soluțiilor	74	
3.5.4 Caracterizarea parametrilor modelului	75	
Capitolul IV		
REZULTATE NUMERICE DIN ANALIZA CANTITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS	77	4
CALCULUL ORBITEI SATELIȚILOR GPS	77	4
4.1 Soluția analitică	77	
4.2 Soluția numerică	78	

4.3 Metoda Runge-Kutta	80	5
4.4 Rezultate numerice	82	6
4.5 Efectele produse de perturbațiile gravitaționale	84	8
4.6 Efectele produse de perturbațiile non gravitaționale	93	11
4.6.1 Presiunea de radiație solară directă	93	11
4.6.2 Presiunea de radiație solară indirectă. Radiația Pământului	97	12
Radiația reflectată	98	13
Radiația emisă	101	13
Modelul de radiație al Pământului	102	14
Modelul albedoului în funcție de latitudine	103	14
Modelul de accelerație exercitat asupra sateliților GPS	105	15
Modelul general al presiunii radiației solare emisă de Pământ	106	15
4.6.3 Emisia termică anizotropă	118	17
4.6.4 Accelerația produsă de emisia antenelor	120	17
4.6.5 Eclipsele	123	18
Modelarea regiunii de eclipsă	123	18
Modelarea regiunii de penumbră	128	
4.6.6 Efectul Poynting-Robertson	129	21
Capitolul V	134	24
ANALIZA CALITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS		
5.1 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub influența armonice a două zonale	136	
5.1.1 Ecuațiile mișcării pentru analiza calitativă	136	
5.1.2 Transformările McGehee	138	
5.1.3 Varietatea coliziunii	139	
5.1.4 Portretul de fază	141	
5.2 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub diverse influențe, neapărat gravitaționale	146	
5.2.1 Ecuațiile mișcării pentru analiza calitativă	146	
5.2.2 Portretul de fază	147	
5.3 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub influența armonicelor zonale de ordin superior	150	24
5.3.1 Ecuațiile mișcării pentru analiza calitativă	150	
5.3.2 Transformările McGehee	151	
5.3.3 Varietatea coliziunii	152	
5.3.4 Portretul de fază	152	
5.4 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub influența cumulată a armonicelor zonale de ordin superior și a altor factori	161	
5.5 Aplicație practică. Satelitul GPS	161	27
5.6 Concluzii ale analizei calitative	163	28
Capitolul VI	164	29
CONCLUZII		
ANEXE	167	
BIBLIOGRAFIE	175	31

1. INTRODUCERE

Încă de la începuturile istoriei, omul și-a ridicat privirea spre cer, bolta cerească reprezentând o sursă inepuizabilă de întrebări, mituri și legende. Personificarea naturii și a fenomenelor naturale era prima încercare timidă a omului primitiv de a-și explica lumea aparent fără sens pe care o observa.

Până acum 500 de ani, lumea credea că Pământul este centrul universului, motivul fiind destul de evident: Luna orbita în jurul Pământului și nu există nicio dovadă că Soarele nu făcea același lucru. Și planetele puteau fi văzute rotindu-se în jurul Pământului, deși uneori păreau să se întoarcă din drumul lor pentru mai multe săptămâni, dacă nu chiar luni.

Din secolul al XIX-lea și până în prezent o mulțime de astronomi și matematicieni și-au adus contribuția la evoluția și dezvoltarea astronomiei.

Primii navigatori nu scăpau din vedere uscatul. Se foloseau navigatori care cunoșteau foarte bine regiunea, care se bazau pe multele treceri anterioare prin același loc: recunoașterea de stânci, sondaje cu pietre legate de frânghii pentru a ocoli adâncimile prea mici la apropierea uscatului, urmărirea direcției de mișcare a norilor, recunoașterea curenților marini, folosirea vânturilor atât pentru mers cât și pentru recunoașterea regiunii unde acestea acționează. Când țărmul nu se mai vedea orientarea se realiza după Soare ziua și după stele noaptea.

Filozoful Tales din Milet povestea că navigatorii ionieni erau învățați să recunoască constelația Carul Mic încă la 600 de ani î.Hr.

Cristofor Columb a traversat Atlanticul folosind observații astronomice și a fost divinizat de băștinașii din golful Santa Gloria din Jamaica după ce a prevestit eclipsa de lună din 29 februarie 1504.

În navigația astronomică, reperele de navigație sunt aștrii (Soarele, Luna, planetele, stelele), vizibile și identificabili pe cer, care constituie o infrastructură naturală.

Reperetele de navigație astronomice sunt localizate pentru ora observației folosind efemeridele (suport de hârtie sau electronic) acestora. Măsurătorile la aștri se realizează cu un sextant sau un teodolit.

Lansarea primului satelit artificial (Sputnik) pe 4 octombrie 1957 de către Rusia (URSS la acea vreme) a avut o mare însemnătate științifică, fiind deschizătorul de drumuri pentru multitudinea de misiuni spațiale realizate până în prezent.

În anul 1973, Departamentul Apărării al Statelor Unite a dorit crearea unui sistem spațial de poziționare, sub denumirea de NAVSTAR/GPS (NAVigation System with Timing And Ranging / Global Positioning System).

Primele obiective care vizau sistemul erau de natură militară. Ulterior însă, Congresul SUA a impus promovarea facilităților “civile” ale sistemului. Procesul a fost accelerat de lansarea pe piață a primului receptor GPS, numit “Macrometer”, utilizat pentru determinări geodezice.

Navigația satelitară folosește același principiu ca și navigația astronomică pentru determinarea poziției terestre a observatorului. Pentru determinarea precisă a poziției navei cu ajutorul sistemului satelitar de navigație sunt necesare măsurarea a patru pseudodistanțe la tot atâtea sateliți.

Pentru o precizie cât mai bună a poziției observatorului este necesară cunoașterea cât mai riguros posibil a poziției satelitului artificial. Asupra acestuia acționează o serie de perturbații care în funcție de natura lor se clasifică în perturbații de tip gravitațional și non-gravitațional.

Modelarea cât mai exactă a ecuațiilor acestor perturbații conduce în final la o determinare mai precisă a poziției observatorului.

Lucrarea de față, care se încadrează în tematica de cercetare a Institutului Astronomic al Academiei Române, își propune să abordeze și să cerceteze următoarele probleme legate de mișcarea sateliților GPS:

- elaborarea unor modele ale accelerațiilor perturbatoare care influențează mișcarea sateliților GPS, determinarea ordinului de mărime și stabilirea unui criteriu de includere a acestora în modelul dinamic;
- studiul metodei analitice de calcul al influenței accelerațiilor perturbatoare de tip gravitațional și negravitațional în elementele osculatoare ale sateliților GPS;
- studiul, prin intermediul unei aplicații numerice, al erorilor orbitale ale sateliților GPS, produse de accelerațiile perturbatoare de tip gravitațional și negravitațional, cu accent pe accelerațiile de tip negravitațional;
- studiul calitativ al mișcării sateliților GPS.

Lucrarea este structurată pe 6 capitole astfel:

Capitolul I prezintă sistemul satelitar NAVSTAR/GPS, identificarea aplicațiilor tehnologiei GPS, sisteme de referință și scări de timp necesare studiului forțelor perturbatoare care acționează asupra sateliților GPS.

Capitolul II prezintă analiza cantitativă a mișcării sateliților GPS sub influența perturbațiilor de tip gravitațional și negravitațional.

Capitolul III conține analiza cantitativă a perturbațiilor de tip negravitațional: presiunea radiației solare directe, presiunea de radiație solară indirectă, emisia termică anizotropă, emisia antenei și modelele empirice ale presiunii radiației solare.

Capitolul IV prezintă metoda originală abordată de autor utilizând algoritmul de integrare Runge – Kutta de ordinul 4, pentru determinarea accelerațiilor perturbatoare de tip gravitațional care acționează asupra sateliților GPS și efectele produse în elementele orbitale ale sateliților de perturbațiile de tip negravitațional.

Capitolul V este un studiu calitativ sau geometric al mișcării sateliților GPS. Aceasta este o abordare nouă, prin care se aplică metoda geometrică de analiză a sistemelor dinamice al cărei inițiator este Poincare, pentru studiul mișcării sateliților GPS. Analiza nu se rezumă numai la sateliții GPS, ci se iau în considerare o multitudine de cazuri, rezultând în final o analiză complexă a mișcării sateliților.

Capitolul VI conține o trecere în revistă succintă a datelor și concluziilor mai importante prezentate în capitolele precedente, punând în evidență principalele rezultate obținute de autor.

2. ANALIZA CANTITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS

2.1 Ecuațiile mișcării satelitului GPS

Ecuația diferențială vectorială a mișcării relative a unui satelit în jurul corpului central, în condițiile absenței oricărei influențe perturbatoare, are forma (Brouwer și Clemence 1961, Pal și Ureche 1983):

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.1)$$

iar ecuațiile scalare sunt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu \frac{z}{r^3} \quad (2.2)$$

În procesul integrării analitice a sistemului de 3 ecuații diferențiale de ordinul 2 rezultă 4 integrale prime (integrala energiei și integralele ariilor), ecuația orbitei și ecuațiile de mișcare ale satelitului în planul orbitei, precum și 6 constante de integrare determinabile din condiții inițiale (poziție inițială și viteză inițială):

- a , semiaxa mare a orbitei;
- i , înclinarea planului orbitei față de planul de referință;
- e , excentricitatea orbitei;
- ω , argumentul perigeului;
- Ω , ascensia dreaptă a nodului ascendent;
- M , anomalia medie.

Cele 6 constante de integrare reprezintă de fapt parametrii orbitei eliptice kepleriene și definesc poziția orbitei în spațiul inerțial (i , Ω), orientarea orbitei în planul său (ω), forma orbitei (a , e) și poziția satelitului pe orbită (M). Singurul parametru orbital care depinde de timp este anomalia medie. Ca urmare, în locul său se poate utiliza momentul trecerii prin perigeu (t_0).

2.2 Funcții de forță perturbatoare

Asupra unui satelit artificial al Pământului, acționează, așa cum este cunoscut, un număr important de forțe (acceleerații) perturbatoare, mult mai mici (ca magnitudine) decât forța (acceleerația) centrală, dar care influențează semnificativ, în timp, dinamica acestuia.

Pentru dezvoltarea teoriei liniare de ordinul I, este necesar să se exprime principalele categorii de funcții de forță perturbatoare în termenii elementelor orbitale, în timp ce pentru integrarea numerică a ecuației diferențiale (2.2) a mișcării perturbate, este necesar ca acestea să fie exprimate în termenii coordonatelor carteziane.

În funcție de natura lor se întâlnesc acceleerații perturbatoare **gravitaționale** și acceleerații perturbatoare **non-gravitaționale**.

Acceleerații perturbatoare gravitaționale:

- necentralitatea câmpului gravitațional al Pământului;
- atracția gravitațională a Soarelui și a Lunii;
- efectul indirect al atracției Soarelui și Lunii (efectul mareic indirect);
- atracția gravitațională a celorlalte planete;
- efectele relativiste;

Acceleerații perturbatoare **non-gravitaționale**:

- presiunea radiației solare directe;
- presiunea radiației solare re-emise de suprafața Pământului (albedo-ul);
- efectul Poynting – Robertson;
- frânarea aerodinamică;
- vântul solar;
- alte acceleerații, precum praful inter-planetar, radiația termică a satelitului, etc.

Magnitudinea accelerațiilor perturbatoare depinde pe de o parte de natura fenomenului care le produce, iar pe de altă parte de valorile parametrilor orbitali ai satelitului.

Modificarea unui parametru orbital al satelitului se poate scrie sub forma (Escobal, 1965):

$$u(t) = u(t_0) + \frac{du}{dt}(t - t_0) + k_1 \cdot \cos(2\omega) + k_2 \cdot \sin(2v + \omega) + k_3 \cdot \cos(2v) \quad (2.3)$$

unde:

v – anomalia adevărată;

k_1, k_2, k_3 – sume și produse funcție de semiaxa mare, excentricitate și înclinare.

Efectul produs de o accelerație perturbatoare poate fi:

- **secular**, $\frac{du}{dt}(t - t_0)$, adică are evoluție liniară și este cumulativ în timp;
- **lung – periodic**, $k_1 \cdot \cos(2\omega)$, în cazul în care amplitudinea perturbației crește și scade cu o anumită perioadă de timp definită, această perioadă fiind mai mare decât perioada orbitală;
- **scurt – periodic**, $k_3 \cdot \cos(2v)$, cazul în care perioada de variație este mai mică decât perioada orbitală;
- **mixt – periodic**, $k_2 \cdot \sin(2v + \omega)$, combinație de perturbații cu perioade lungi și scurte.

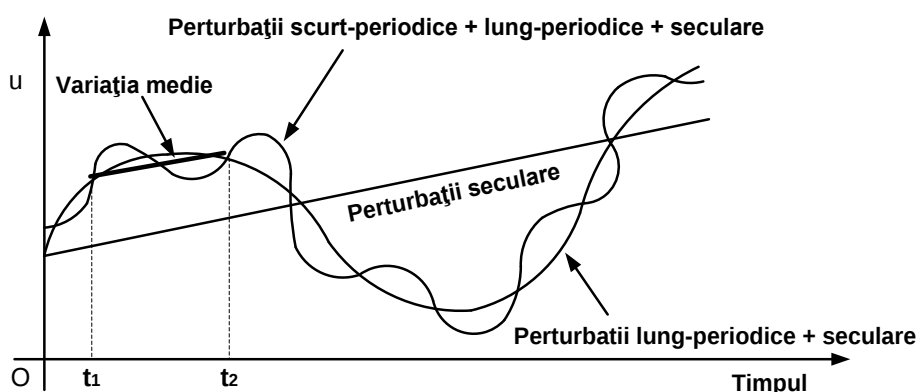


Figura 2.1 Tipuri de perturbații

3. REZULTATE NUMERICE DIN ANALIZA CANTITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS

3.1 Calculul orbitei sateliților GPS

Pentru calculul orbitei sateliților GPS se utilizează două metode. Prima metodă se bazează pe soluțiile analitice ale ecuațiilor planetare ale lui Lagrange, exprimate în termenii elementelor orbitale Kepleriene. A doua metodă se bazează pe soluția numerică a ecuației diferențiale de ordinul 2 a mișcării relative perturbate exprimată în coordonate carteziane, numită metoda numerică.

Soluția analitică utilizată în calculul precis al arcelor scurte de orbită GPS reprezintă o extensie a teoriei perturbațiilor de ordinul 1. Pentru determinarea efectelor introduse de armonica a 2-a zonală (de coeficient C_{20} sau J_2) este necesar să se includă și perturbațiile de ordinul 2; în principiu, aceasta necesită a doua soluție a ecuațiilor planetare Lagrange, utilizând soluția de ordinul 1 (liniară) pentru a evalua membrul drept al acestei ecuații.

Soluția numerică a orbitei sateliților GPS se bazează pe integrarea numerică directă a ecuațiilor diferențiale de ordinul 2 ale mișcării relative perturbate, în coordonate carteziane. Această metodă este întâlnită sub două forme: metoda Cowell și metoda Encke. Avantajul metodei numerice este formularea simplă a ecuațiilor de mișcare.

În coordonate carteziane, acestea au forma:

$$\ddot{x}_i = -\frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{x_i}{r} + \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i} \quad \text{pentru } i = 1, 2, 3 \quad (3.1)$$

în care r este raza vectorie geocentrică iar $\frac{\partial \mathcal{R}}{\partial x_i}$ este suma accelerațiilor perturbatoare cauzate de necentralitatea câmpului gravitațional terestru, atracția gravitațională luni-solară și presiunea de radiație solară.

Coordonatele x_i sunt definite într-un sistem de referință inerțial, geocentric ecuatorial. Ecuațiile de mișcare sunt complete atunci când fiecare accelerație perturbatoare este evaluată și transformată în acest sistem de referință.

3.2 Metoda Runge Kutta

În principiu, cu condiții inițiale definite (în speță poziția $\vec{x}_0$ și viteza $\vec{\dot{x}}_0$ la epoca t_0 de lansare), ecuațiile (4.16) pot fi integrate numeric. Ca referință se introduce orbita kepleriană. Astfel, doar diferențele mici dintre accelerația totală și accelerația centrală trebuie integrate. Integrarea va avea ca rezultat creșterea (incremental) $d\vec{x}$ care atunci când se însumează vectorului de poziție calculate pe elipsa de referință, furnizează poziția corectă. Ecuațiile diferențiale de ordinul 2 se transformă de regulă într-un sistem de 2 ecuații diferențiale de ordinul 1, astfel:

$$\vec{\dot{x}}(t) = \vec{\dot{x}}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[d\vec{\dot{x}}(t_0) - \frac{\mu}{r^3(t_0)} \vec{x}(t_0) \right] dt \quad (3.1)$$

$$\vec{x}(t) = \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{\dot{x}}(t_0) dt.$$

Integrarea numerică a acestui sistem se realizează aplicând un algoritm Runge Kutta de ordinul IV. Principiul metodei este următorul:

Fie $y(x)$ o funcție definită pe intervalul $x_1 \leq x \leq x_2$ și $y' = dy/dx$ derivata de ordinul unu în raport cu variabila x . Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul unu de forma:

$$y' = dy/dx = y'(y, x)$$

rezultă prin integrare, atribuind o valoare numerică inițială constantei de integrare $y_1 = y(x_1)$. Se împarte intervalul de integrare în n subdiviziuni egale și suficient de mici $[\Delta x = (x_2 - x_1)/n]$, unde n este un întreg arbitrar. Atunci, diferența dintre valorile funcționale succesive se obține din media ponderată

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{1}{6} \left[\Delta y^{(1)} + 2(\Delta y^{(2)} + \Delta y^{(3)}) + \Delta y^{(4)} \right] \quad (3.2)$$

unde:

$$\begin{aligned} \Delta y^{(1)} &= y'(y, x) \Delta x \\ \Delta y^{(2)} &= y' \left(y + \frac{\Delta y^{(1)}}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x \end{aligned}$$

$$\Delta y^{(3)} = y' \left(y + \frac{\Delta y^{(2)}}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x$$

$$\Delta y^{(4)} = y'(y + \Delta y^{(3)}, x + \Delta x) \Delta x.$$

Astfel, plecând de la valoarea inițială y_1 corespunzătoare argumentului x_1 , funcția poate fi calculată pentru argumentele succesive $x_1 + \Delta x$, $x_2 + \Delta x$, etc. În exemplul de mai sus, variabila x trebuie interpretată ca variabilă de timp (t).

Această metodă poate fi aplicată și pentru integrarea sistemului de ecuații Newton-Euler și Lagrange, acestea având avantajul că sunt la ordinul unu.

Fie ecuațiile Newton-Euler sub forma:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i [q_j, t] \equiv \dot{q}_i \{a, e, i, \omega, \Omega, M\} \quad (3.3)$$

unde q_i este oricare din elementele kepleriene ale satelitului. Integrarea sistemului (4.19) se face pe un pas constant de timp Δt (suficient de mic) astfel:

$$\begin{aligned} w_i &= \dot{q}_i [q_j(t), t] \Delta t \\ x_i &= \dot{q}_i \left[q_j(t) + \frac{w_j}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right] \Delta t \\ y_i &= \dot{q}_i \left[q_j(t) + \frac{x_j}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right] \Delta t \\ z_i &= \dot{q}_i \left[q_j(t) + \frac{y_j}{2}, t + \frac{\Delta t}{2} \right] \Delta t \\ q_i(t + \Delta t) &= q_i(t) + \frac{w_i}{6} + \frac{x_i}{3} + \frac{y_i}{3} + \frac{z_i}{6}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

3.3 REZULTATE NUMERICE

S-a considerat o orbită kepleriană (neperturbată) pentru condițiile inițiale la data de 10.02.2011 ora 00.00 UT:

$$\begin{aligned} x_{ai} &= 2425.8676; & vx_{ai} &= 3.8327; \\ y_{ai} &= -15215.1157; & vy_{ai} &= 0.4529; \\ z_{ai} &= 21743.2188; & vz_{ai} &= -0.1055; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= 1.0027379093 \cdot \text{UT1} + v_0 + \Delta\Psi \cos \varepsilon \\ \text{UT1} &= \text{UTC} - d\text{UT1}, (d\text{UT1} = 0.162626) \\ v_0 &= 24110^{s}_{.54841} + 8640184^{s}_{.812866} \cdot T + 0^{s}_{.093104} \cdot T^2 - 6^{s}_{.2} \cdot 10^{-6} \cdot T^3 = 580910482.2 \\ T &= \frac{JD}{36525} = \frac{2455602,5}{36525} = 67,23073237 \end{aligned}$$

$$\Delta\Psi \cos \varepsilon = -62.61453881$$

$$\theta = 1.0027379093 \cdot (\text{UT} - 0.162626) + 580910482.2 - 62.61453881$$

Valorile argumentelor pentru precesie conform Buletinului IERS:

$$\begin{aligned} x_p &= 0.03428 \\ y_p &= 0.20863 \end{aligned}$$

S-a aplicat algoritmul Runge – Kutta de ordinul 4 așa cum a fost prezentat anterior, pentru integrarea ecuației mișcării neperturbate (1.1). Programul de calcul a determinat pentru perioada selectată valorile razei vectoare și vitezei (r, v) , pentru fiecare pas de integrare, pe care le-a scris într-un fișier text. De asemenea, programul a rezolvat problema lui Laplace și a determinat, plecând de la (r, v) valorile celor 6 elemente kepleriene $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ și componentele accelerațiilor.

S-a considerat mișcarea satelitului de studiu perturbată succesiv de o singură perturbație: armonica zonală J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 , atracția gravitațională a Soarelui și a Lunii, efectele relativiste și presiunea radiației solare directă.

În același mod, programul de calcul a avut ca date de ieșire fișierele text corespunzătoare elementelor orbitale (r, v) și $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$. Pentru fiecare element orbital în parte s-a făcut diferența dintre valorile sale obținute în cazul neperturbat și valorile sale în cazul perturbat, rezultând variația respectivului element orbital sub influența perturbației considerate. Fiecare variație în parte s-a analizat și i s-a întocmit graficul de variație.

S-a realizat integrarea orbitei pentru o perioadă de 2,1 zile (50 ore) și de 20,8 zile (500 ore) pentru anumite perturbații. Mai întâi se exemplifică accelerațiile perturbatoare care acționează asupra unui satelit pe orbită medie (satelit GPS).

Sunt prezentate apoi erorile orbitale induse de principalele perturbații asupra satelitului geostaționar.

Pentru determinarea erorilor orbitale ale sateliților GPS trebuie să se țină cont de armonicile zonale J_2, J_3, J_4, J_6 , de perturbația Lunii, a Soarelui și a presiunea radiației solare.

În continuare sunt analizate efectele perturbațiilor asupra orbitei satelitului GPS și sunt sintetizate în tabelul următor.

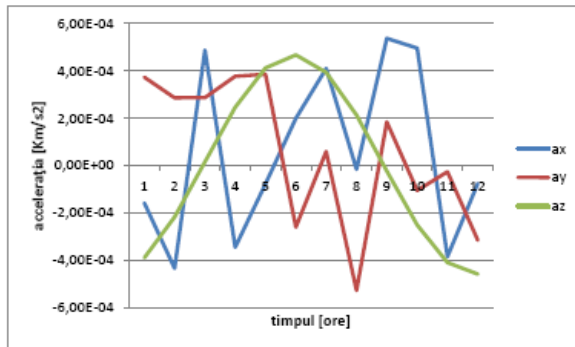
Tabel 1.1 Valori ale accelerațiilor perturbatoare

Parametrul	Satelit GPS	Formula de calcul [Km/s ²]
Semiaxa mare	26 500 km	
Înclinarea	55 ⁰	
Accelerația centrală	5,6 * 10 ⁻⁴	$\frac{\mu}{r^2}$
Perturbația	Accelerația [Km/s ²]	Formula
Armonica J_2	2 x 10 ⁻⁷	$3 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^2}{r^2} J_2$
Armonica J_3	2,3 x 10 ⁻¹¹	$4 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^3}{r^3} J_3$
Armonica J_4	2,5 x 10 ⁻¹¹	$5 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^4}{r^4} J_4$
Armonica J_5	1,1 x 10 ⁻¹²	$6 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^5}{r^5} J_5$
Armonica J_6	5,6 x 10 ⁻¹³	$7 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^6}{r^6} J_6$

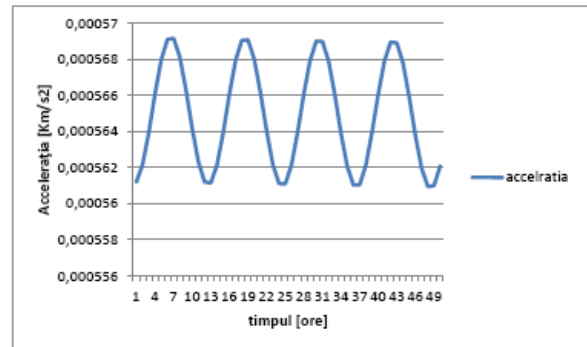
Atracția gravitațională Soare	$2,95 \times 10^{-8}$	$\mu_{3c} \left(\frac{\vec{r}_{3c} - \vec{r}}{(r_{3c} - r)^3} - \frac{\vec{r}_{3c}}{r_{3c}^3} \right)$
Atracția gravitațională Lună	$1,95 \times 10^{-8}$	
Efecte relativiste	$3,4 \times 10^{-12}$	$\frac{3\mu^2 a (1 - e^2)}{c^2 r^4}$
Presiunea radiației solare	$4,4 \times 10^{-10}$	$k' \frac{A}{m} q \Psi \frac{\vec{r}_{\text{sat}} - \vec{r}_{\text{Soare}}}{r_{\text{Soare}}}$
Efectul Poynting-Robertson	$6,9 \times 10^{-15}$	$\frac{r^2}{4c^2 m} \sqrt{\frac{GM_s L_s^2}{R^5}}$

3.4 Efectele produse de perturbațiile gravitaționale

Orbita kepleriană



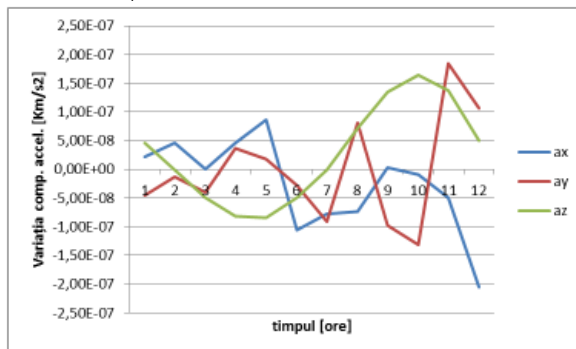
Variația componentelor accelerației



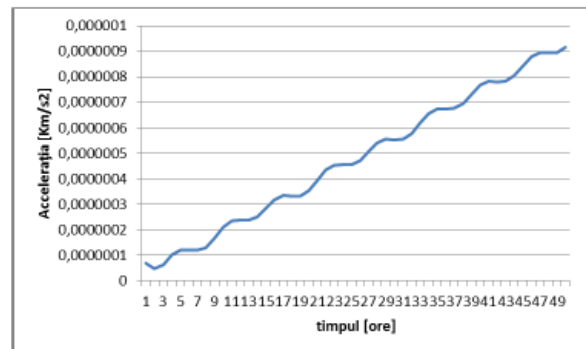
Variația accelerației totale

În cazul mișcării keplerine fără perturbații, accelerația are valoarea medie de $5,6 \cdot 10^{-4} \text{ Km/s}^2$.

Perturbația J_2



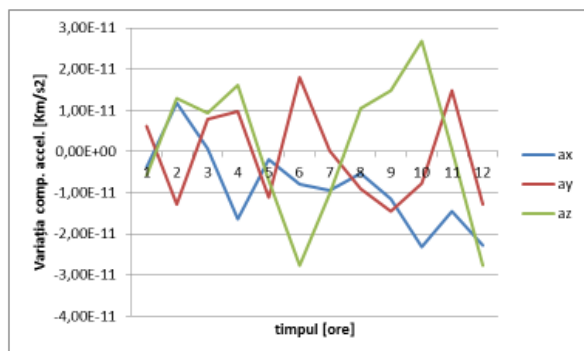
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J_2



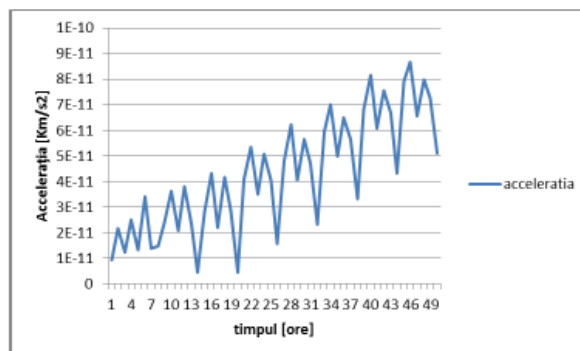
Variația accelerației totale datorată perturbației J_2

În cazul perturbației J_2 , accelerația are valoarea medie de $2 \cdot 10^{-7} \text{ Km/s}^2$.

Perturbația J₃



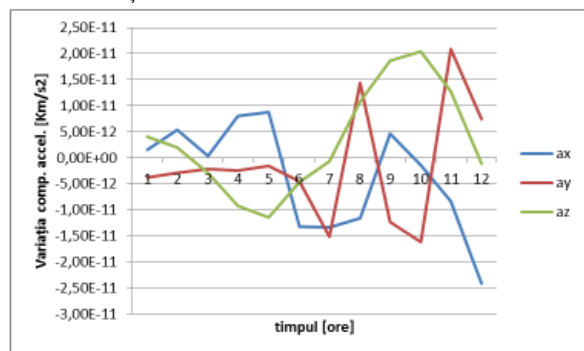
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J₃



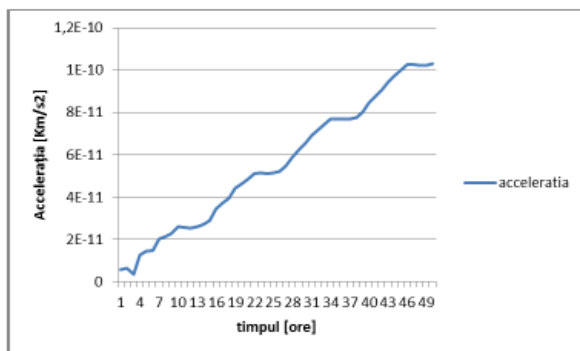
Variația accelerației totale datorată perturbației J₃

În cazul perturbației J₃, accelerația are valoarea medie de $2,3 \cdot 10^{-11}$ Km/s².

Perturbația J₄



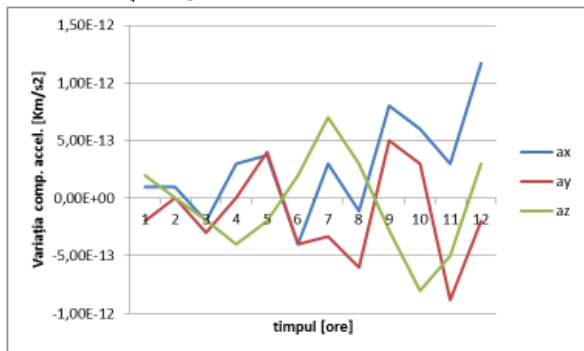
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J₄



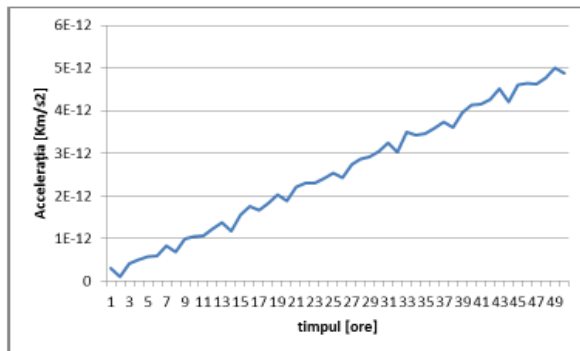
Variația accelerației totale datorată perturbației J₄

În cazul perturbației J₄, accelerația are valoarea medie de $2,5 \cdot 10^{-11}$ Km/s².

Perturbația J₅



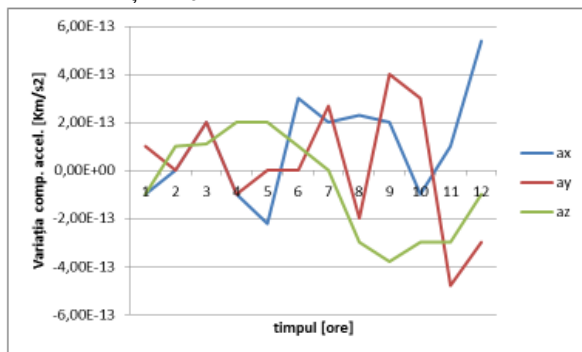
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J₅



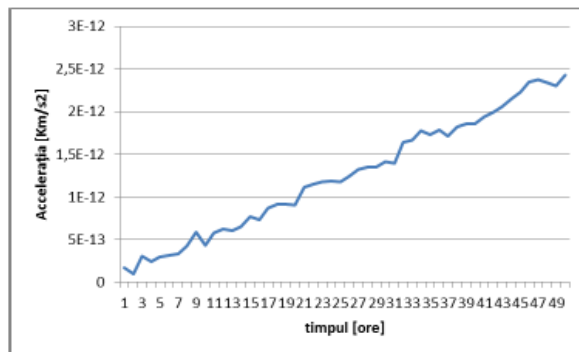
Variația accelerației totale datorată perturbației J₅

În cazul perturbației J₅, accelerația are valoarea medie de $1,1 \cdot 10^{-12}$ Km/s².

Perturbația J₆



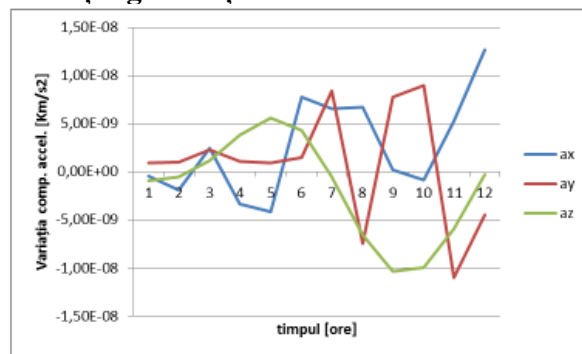
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J₆



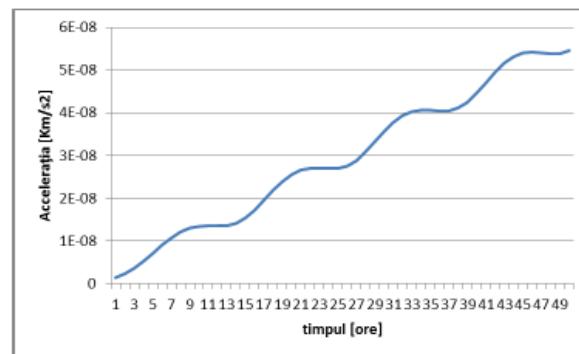
Variația accelerației totale datorată perturbației J₆

În cazul perturbației J₆, accelerația are valoarea medie de $5,6 \cdot 10^{-13} \text{ Km/s}^2$.

Atracția gravitațională a Soarelui



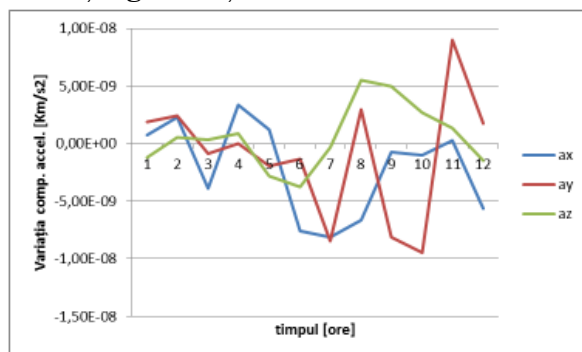
Variația componentelor accelerației datorată atracției gravitaționale a Soarelui



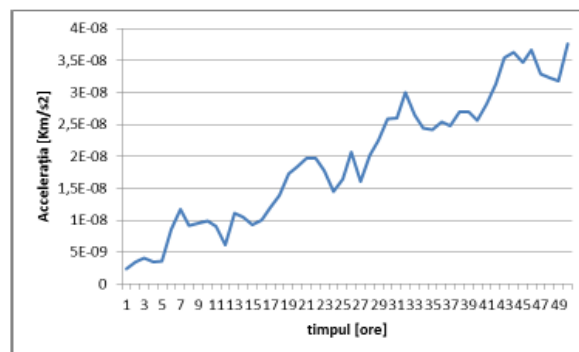
Variația accelerației totale datorată atracției gravitaționale a Soarelui

În cazul perturbației dată de atracția gravitațională a Soarelui, accelerația are valoarea medie de $2,95 \cdot 10^{-8} \text{ Km/s}^2$.

Atracția gravitațională a Lunii



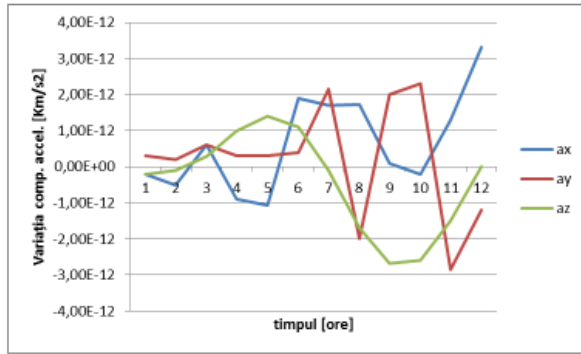
Variația componentelor accelerației datorată atracției gravitaționale a Lunii



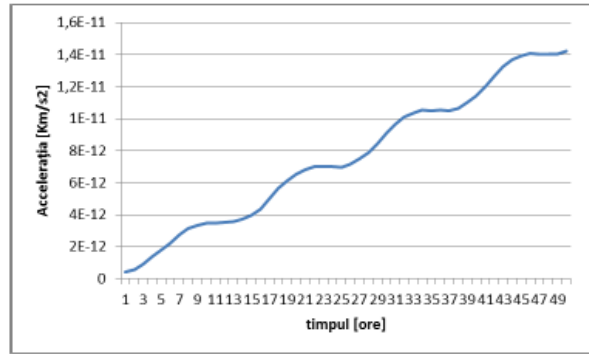
Variația accelerației totale datorată atracției gravitaționale a Lunii

În cazul perturbației data de atracția gravitațională a Lunii, accelerația are valoarea medie de $1,95 \cdot 10^{-8} \text{ Km/s}^2$.

Efectele relativiste



Variația componentelor accelerației datorată
perturbației efectelor relativiste

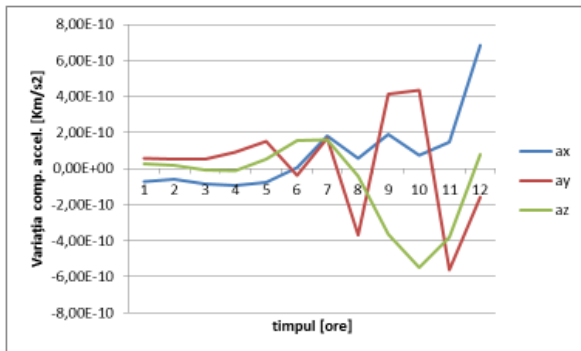


Variația accelerației totale datorată
perturbației efectelor relativiste

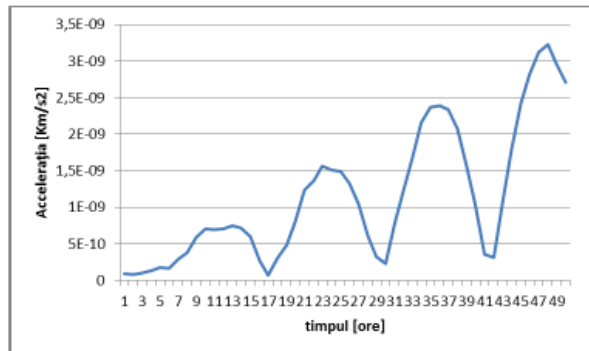
În cazul perturbației dată de efectele relativiste, accelerația are valoarea medie de $3,45 \cdot 10^{-12}$ Km/s².

3.5 Efectele produse de perturbațiile non gravitaționale

3.5.1 Presiunea de radiație solară directă

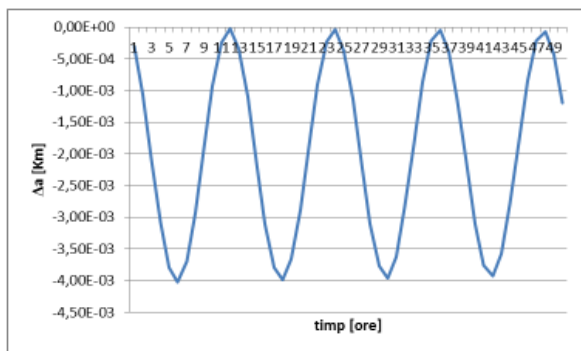


Variația componentelor accelerației datorată
acțiunii presiunii de radiație solară directă

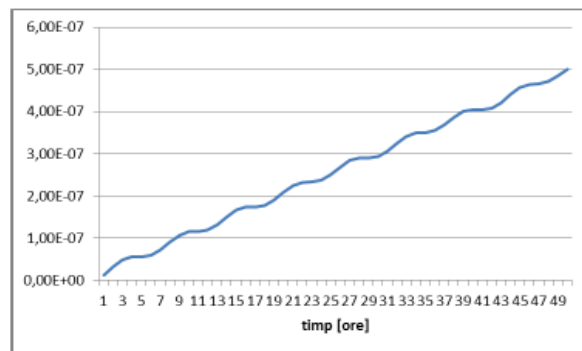


Variația accelerației totale datorată
acțiunii presiunii de radiație solară directă

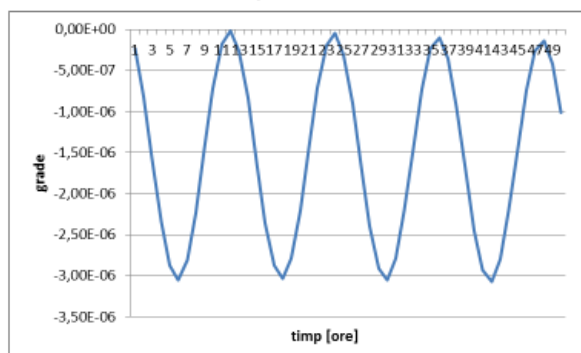
În cazul perturbației dată de presiunea de radiație directă, accelerația are valoarea medie de $4,4 \cdot 10^{-10}$ Km/s².



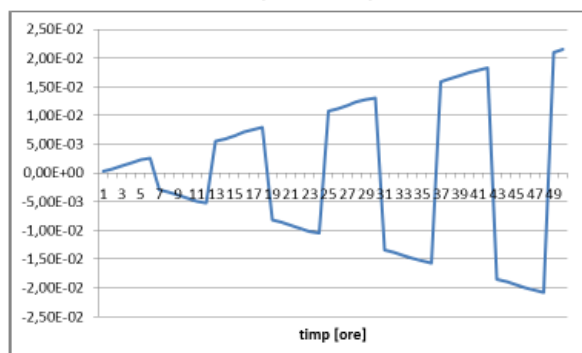
Variația semiaxe mari



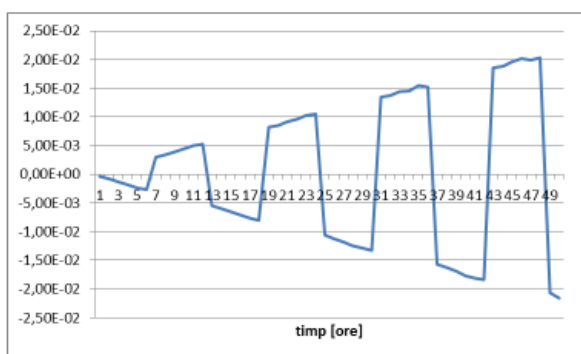
Variația excentricității



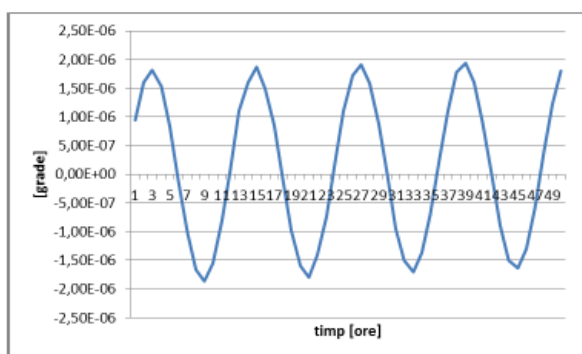
Variația înclinării



Variația anomaliei medii



Variația argumentului perigeului



Variația longitudinii nodului ascendent

Semiaxa mare prezintă o perturbație scurt-periodică cu o perioadă de 6 ore suprapusă peste o perturbație seculară. Pentru o perioadă orbitală, semiaxa mare suferă o variație de 4 metri.

Excentricitatea prezintă o perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 6 ore având ordinul de mărime $4,8 \cdot 10^{-8}$ Km.

Înclinarea prezintă același tip de perturbație ca și semiaxa mare, o perturbație scurt-periodică suprapusă peste o perturbație seculară. Perturbația scurt-periodică are perioada de 6 ore și ordinul de mărime $3 \cdot 10^{-6}$ grade.

Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație scurt periodică cu o perioadă de 6 ore și o amplitudine de $1,7 \cdot 10^{-6}$ grade, suprapusă peste o perturbație seculară.

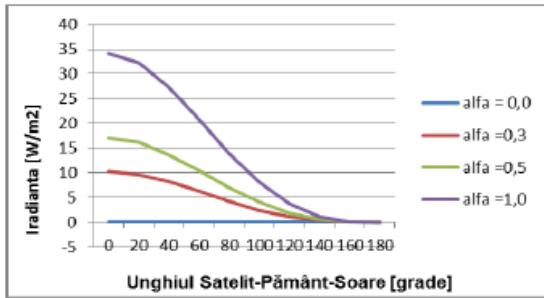
3.5.2 Presiunea de radiație solară indirectă. Radiația Pământului

Radiația reflectată

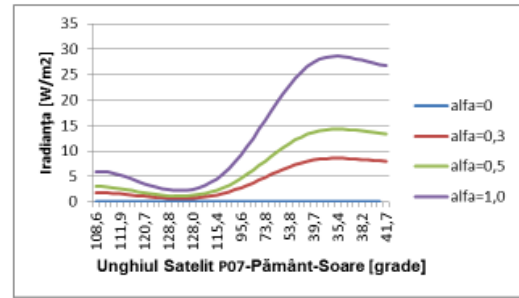
Atmosfera Pământului reflectă o parte a radiației care sosește de la Soare, iar pentru simplificare considerăm că această radiație reflectată este retrimisă înapoi în spațiu de către o sferă acoperită cu o suprafață Lambertiană.

Vectorul iradianță în direcția satelitelui $\vec{r}$ datorat albedoului total al Pământului α , depinde numai de poziția relativă a satelitelui, Pământului și Soarelui (unghiul ψ) și asupra unui satelit aflat la altitudinea h are forma:

$$\vec{E}_{sat}(\psi, h) = \frac{2\alpha}{3\pi^2} \frac{A_E E_{Soare}}{(R_p + h)^2} ((\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) \vec{r} \quad (3.5)$$



Iradianța datorată radiației reflectată de Pământ



Iradianța datorată radiației reflectată de Pământ pentru satelitul GPS P07

Astfel, se observă faptul că graficul de variație a iradianței Pământului este o curbă sinusoidală și faptul că aceasta scade odată cu creșterea valorii albedoului Pământului și cu creșterea unghiului ψ dintre satelit, Pământ și Soare. Pentru valoarea zero a albedoului iradianța Pământului este nulă.

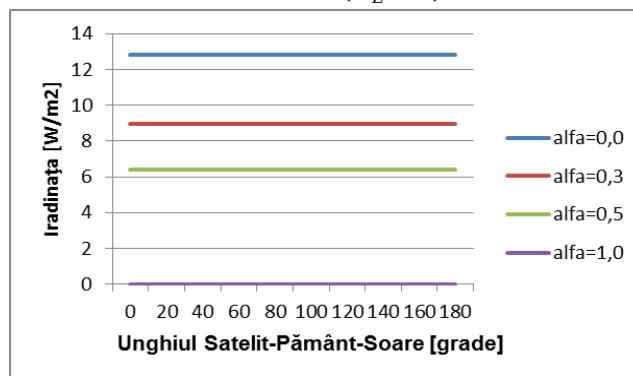
Radiația emisă

Radiația sosită de la Soare și care intersectează Pământul poate fi determinată ca fiind $A_E \cdot E_{Soare}$ cu $A_E = \pi R_E^2$. O fracțiune din această radiație este imediat reflectată în spectrul vizibil, o altă fracțiune este absorbită și alta este reemisă ca radiație infraroșie (Taylor 2005).

$$E_{sat}(\psi) = \frac{(1-\alpha)}{4\pi} \frac{A_E E_{Soare}}{(R_E + h)^2} \quad (3.6)$$

și vectorul iradianță asupra unui satelit aflat la altitudinea h datorat radiației emise de Pământ are expresia:

$$\vec{E}_{sat}(\psi, h) = \frac{(1-\alpha)}{4\pi} \frac{A_E E_{Soare}}{(R_E + h)^2} \vec{r} \quad (3.7)$$



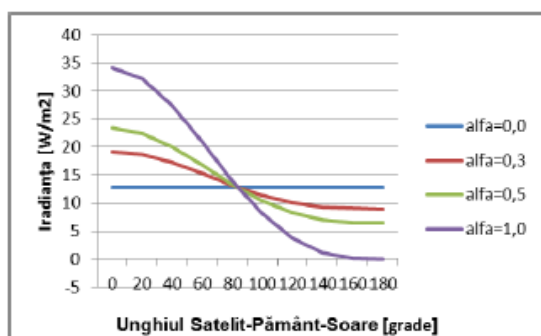
Iradiația datorată radiației emise de Pământ

Din grafic se observă faptul că iradianța nu depinde de valoarea unghiului ψ , este constantă luând diferite valori în funcție de valoarea albedoului Pământului. Iradianța are valoarea zero pentru $\alpha = 1$.

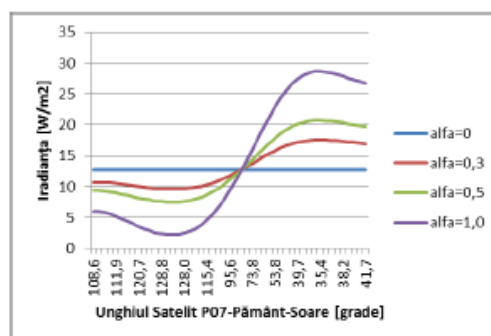
Modelul de radiație al Pământului

Modelul de radiație al Pământului este suma din radiația reflectată și emisă și are expresia:

$$E_{sat}(\psi) = \frac{A_E E_{Soare}}{(R_E + h)^2} \left[\frac{2\alpha}{3\pi^2} ((\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) + \frac{(1 - \alpha)}{4\pi} \right] \quad (3.8)$$

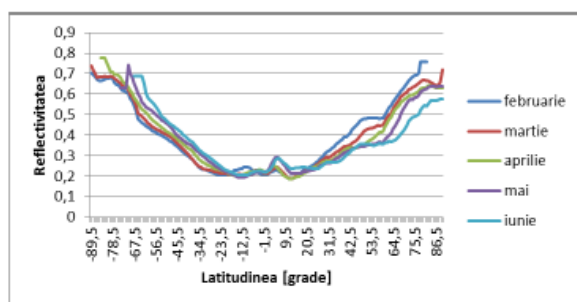


Iradiația totală a Pământului

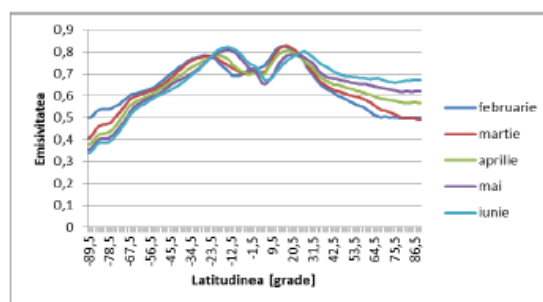


Iradiația totală a Pământului pentru satelitul GPS P07

Modelul albedoului în funcție de latitudine



Reflectivitatea februarie – iunie CERES



Emisivitatea februarie – iunie CERES

Dacă se consideră că reflexivitatea și emisivitatea pot fi scrise ca dezvoltări armonice în funcție de latitudine de forma:

$$\rho(\lambda) = \rho_{const} + \rho_{cos} \cos \varphi + \rho_{sin} \sin \varphi \quad (3.9)$$

$$\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_{const} + \varepsilon_{cos} \cos \varphi + \varepsilon_{sin} \sin \varphi$$

se pot determina coeficienții reflexivității și emisivității utilizând metoda celor mai mici pătrate.

Tab. 3.1 Coeficienții estimați pentru reflexivitate și emisivitate perioada februarie – iunie 2011

ρ_{const}	0,737963502
ρ_{cos}	-0,5300641743
ρ_{sin}	-0,026283497
ε_{const}	0,4566176405
ε_{cos}	0,3057731068
ε_{sin}	0,0292256524

Modelul de accelerație exercitat asupra sateliților GPS

Vectorul iradianță (E_{sat}) sau fluxul solar (Φ) conform notației utilizate de Montenbruck and Gill (2000) are expresia:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{A \Delta t} \quad (3.10)$$

și reprezintă energia transferată prin aria A în unitatea de timp Δt . Conform Beutler (2005) care conform mecanicii cuantice spune că fiecare foton de frecvență ν și lungime de undă $\lambda = c/\nu$ transportă o energie:

$$E = h\nu \quad (3.11)$$

și un impuls:

$$p = \frac{E}{c} \quad (3.12)$$

unde $h = 6,62 \times 10^{-34}$ Js – constanta lui Planck. Astfel, impulsul total pentru un corp absorbant iluminat de Pământ în intervalul de timp Δt este:

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} = \frac{\Phi}{c} A \Delta t \quad (3.13)$$

Astfel forța care acționează asupra unui satelit este:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Phi}{c} A \quad (3.14)$$

iar presiunea radiației este:

$$P = \frac{\Phi}{c} \quad (3.15)$$

Satelitul GPS asupra căruia acționează presiunea de radiație exercitată de Pământ va fi considerat ca având două forme: într-o primă aproximație sub formă de sferă sau „ghiulea” și sub forma unei cutii cu aripi (box-wing), unde cutia „box” reprezintă satelitul în speță iar aripile sunt considerate a fi panourile solare. Ceea ce interesează este secțiunea transversală a satelitului și proprietățile optice ale acestuia.

Modelul general al presiunii radiației solare emise de Pământ

Satelitul GPS de formă “cutie cu aripi” se bazează pe modelele generale ale presiunii de radiație dezvoltate de Fliegel (1992) și Hunentobler (2008).

Cu aria unei suprafețe plane A , masa satelitului M , unghiul θ dintre direcția radiației sosită de la Pământ și normala la suprafață, iradianța Pământului E , viteza luminii c se pot scrie cele trei componente ale accelerației pentru fiecare suprafață conform Fliegel et al. (1992):

Normală la suprafață:

$$\vec{f}_N = \frac{A}{M} \cdot \frac{E}{c} (1 + \mu\nu) \cos^2 \theta \vec{n} \quad (3.16)$$

Tangantă la suprafață:

$$\vec{f}_S = \frac{A}{M} \cdot \frac{E}{c} (1 + \mu\nu) \sin \theta \cos \theta \vec{t} \quad (3.17)$$

Difuză:

$$\vec{f}_D = \frac{A}{M} \cdot \frac{E}{c} \frac{2}{3} \nu (1 - \mu) \cos \theta \vec{n}$$

Componenta radială și componenta non-radială pentru panourile solare are forma:

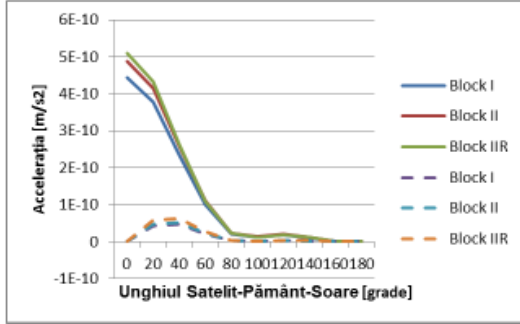
$$f_r = \frac{A}{M} \cdot \frac{E}{c} |\cos \psi| \left(1 + \frac{2}{3} \nu (1 - \mu) |\cos \psi| + \mu \nu \cos 2\psi \right) \quad (3.18)$$

$$f_{\vec{r}_\perp} = \frac{A}{M} \cdot \frac{E}{c} \cos \psi \left(\frac{2}{3} \nu(1-\mu) \sin \psi + \mu \nu |\sin 2\psi| \right) \quad (3.19)$$

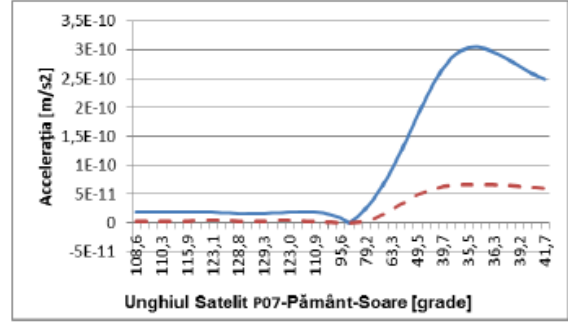
sau sub forma simplificată:

$$f_{\vec{r}} = \frac{E}{Mc} \left[A_{cutie} C_{cutie} + A_{panou} |\cos \psi| \left(1 + \frac{2}{3} \nu(1-\mu) |\cos \psi| + \mu \nu \cos 2\psi \right) \right] \quad (3.20)$$

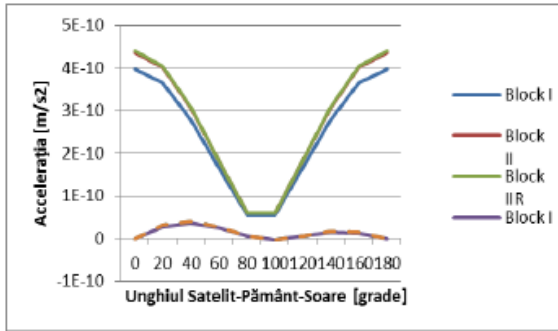
$$f_{\vec{r}_\perp} = \frac{E}{Mc} A_{panou} \cos \psi \left(\frac{2}{3} \nu(1-\mu) \sin \psi + \mu \nu |\sin 2\psi| \right)$$



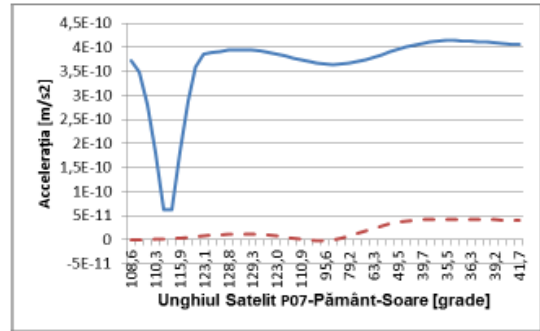
Accelerațiile datorate radiației vizibile reflectate de Pământ, componentele radiale și non-radiale



Accelerațiile datorate radiației vizibile reflectate de Pământ, componentele radiale și non-radiale pentru satelitul GPS P07



Accelerațiile datorate radiației emise infraroșu de Pământ, componentele radiale și non-radiale



Accelerațiile datorate radiației emise infraroșu de Pământ, componentele radiale și non-radiale asupra satelitului GPS P07

Cu linie continuă sunt reprezentate accelerațiile radiale iar cu linie întreruptă sunt reprezentate accelerațiile non-radiale.

Se observă că accelerația radială își atinge minimum pentru $\psi = 90^\circ$. Maximum componentei radiale este realizat pentru $\psi = 0^\circ$ și $\psi = 180^\circ$.

În cazul componentei non-radiale se observă un maxim și un minim pentru valorile aproximative $\psi = 35^\circ$ și $\psi = 145^\circ$.

Pentru cazul în care satelitul este aproximat sub forma de „sferă” se construiește un model simplu de satelit prin medierea valorii accelerației pentru unghiul ψ dintre satelit - Pământ și Soare. Astfel, accelerația se poate calcula cu formula:

$$f_{\vec{r}} = \frac{A}{M} \frac{E}{c} C_{sferă} \quad (3.21)$$

unde $C_{sferă}$ este o constantă determinată numeric și care dă dimensiunile medii și proprietățile optice ale sateliților GPS.

Tab. 3.2 Parametrii sateliții GPS (sateliții de tip sferă)

Tipul de satelit GPS	Raport Aria/Masă [m ² /Kg]	C _{sferă}
Block I	0,01513	0,8876
Block II	0,01667	0,8551
Block IIR	0,01606	0,8134

Din graficele de variație ale semiaxei mari realizate pentru 50 și 500 de ore reiese că aceasta prezintă două tipuri de perturbații, una scurt-periodică și una lung-periodică. Perturbația scurt-periodică este de perioadă egală cu perioada orbitală (12 ore) și o variație de 1 Km, iar perturbația lung-periodică are perioada de 240 de ore.

Excentricitatea prezintă a perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 6 ore având ordinul de mărime $1,5 \cdot 10^{-8}$.

Înclinarea prezintă două tipuri de perturbații, una scurt-periodică și una seculară. Perturbația scurt-periodică este de perioadă egală cu perioada orbitală (12 ore) și o variație de $7 \cdot 10^{-6}$ grade.

Argumentul perigeului suferă perturbații mixt periodice:

- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $1 \cdot 10^2$ grade
- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $3 \cdot 10^2$ grade
- o perturbație seculară

Longitudinea nodului ascendent suferă perturbații mixt periodice:

- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $4 \cdot 10^{-3}$ grade
- o perturbație seculară

3.5.3 Emisia termică anizotropă

Accelerația termică anizotropă are o variație liniară în funcție de variația de temperatură a două părți ale corpului satelitului și în funcție de raportul dintre aria secțiunii eficace și masa satelitului. Valoarea accelerației datorită emisiei termice anizotrope pentru o diferență de temperatură „diurnă” este de ordinul 10^{-13} Km/s².

Semiaxa mare suferă perturbații scurt periodice egale cu perioada orbitală și de amplitudine $4 \cdot 10^{-5}$ kilometri.

Excentricitatea suferă o perturbație scurt periodică de perioadă egală cu 6 ore și amplitudine $6 \cdot 10^{-10}$ suprapusă peste o perturbație seculară.

Înclinarea orbitei suferă o perturbație scurt periodică de perioadă egală cu perioada orbitală și de amplitudine $3 \cdot 10^{-8}$

Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație mixt periodică:

- perturbații scurt periodice cu perioadă de 3 ore și amplitudine $1 \cdot 10^{-7}$ grade
- perturbații lung periodice cu o perioadă de 24 de ore.

3.5.4 Accelerația produsă de emisia antenelor

Emisia antenele de navigație ale sateliților GPS produce o accelerație constantă radială și ca și consecință are loc o schimbare a accelerației în această direcție. Sateliții GPS emit continuu cu o putere între 70 și 80 wați în direcția antenei în cadrul transmisiei celor două frecvențe fundamentale L1 și L2.

Forța exprimată în newtoni datorată absorbției de fotoni de la un flux al radiației incidente (E) este dată de formula:

$$F = \frac{E}{c} \quad (3.22)$$

Considerând o putere de emisie a antenelor de 80 wați, accelerația rezultantă pe diferite tipuri de sateliți GPS este:

Block I: $5.3 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$

Block II: $3.0 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$

Block IIR: $2.4 \times 10^{-10} \text{ m/s}^2$

Semiaxa mare suferă mai multe perturbații scurt periodice:

- o perturbație scurt periodică de perioadă egală cu perioada orbitală și de amplitudine $4 \cdot 10^{-5}$ kilometri.
- o perturbație scurt periodică cu o perioadă de 3 ore și amplitudine de $1 \cdot 10^{-5}$ kilometri

Excentricitatea prezintă o perturbație scurt periodică cu o perioadă de 3 ore și o amplitudine de $2 \cdot 10^{-10}$ suprapusă peste o perturbație seculară.

Înclinarea prezintă mai multe perturbații periodice:

- o perturbație scurt periodică având perioada egală cu perioada orbitală și de amplitudine $3 \cdot 10^{-8}$ grade.
- o perturbație mixt periodică suprapusă peste perturbația scurt periodică.

Perturbațiile care acționează asupra longitudinii nodului ascendant sunt mixt periodice cu perioade de 3, 6, 18 și 48 de ore și cu amplitudini de $2 \cdot 10^{-8}$ și $1,2 \cdot 10^{-7}$ grade.

3.5.5 Eclipsele

Modelarea regiunii de eclipsă

Metoda se bazează pe testele care determină dacă liniile provenind de la marginile Soarelui până la satelit intersectează sau nu Pământul. Dacă o intersecție se realizează și distanța de la Soare până la acest punct este mai mică decât distanța Soare-satelit, atunci satelitul se află în zona de penumbră sau de umbră.

Un plan instantaneu este definit în geocentru, $\vec{r}_s$ este vectorul Pământ-Soare, și $\vec{a}$ este vectorul Pământ-satelit. În acest spațiu bidimensional Soarele este reprezentat sub formă de cerc. În plan, razele de lumină care pleacă de la marginile Soarelui și tangentează Pământul determină marginile zonelor de penumbră și de umbră.

Determinarea punctelor de intersecție este realizată folosind aproximarea matematică de elipsoid pentru Pământ:

$$\frac{x^2 + y^2}{p^2} + \frac{z^2}{q^2} = 1 \quad (3.23)$$

unde x, y, z sunt coordonatele unui punct de pe elipsoid, p este raza ecuatorială iar q este raza polară.

Ecuția drepte care unește satelitul cu una din marginile Soarelui este:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

unde (a_1, a_2, a_3) sunt coordonatele vectorului de poziția a satelitului iar (b_1, b_2, b_3) sunt coordonatele vectorului de poziția a unei margini a Soarelui. Astfel ecuația de mai sus (3.24) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} \quad (3.25)$$

Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ pot fi obținuți pentru o epocă specifică din efemeridele precise sau din integrarea numerică. Din ecuația (3.25), y și z se pot scrie în funcție de x și coeficienții $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

$$y = \frac{x(b_2 - a_2) + a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 - a_1} \quad z = \frac{x(b_3 - a_3) + a_3b_1 - a_1b_3}{b_1 - a_1} \quad (3.26)$$

Dezvoltând, se obține o ecuație de gradul 2 de forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

ai cărei coeficienți sunt:

$$A = q^2 \left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \right] + p^2 (b_3 - a_3)^2$$

$$B = 2q^2 (b_1b_2a_2 - a_1b_2^2 - a_2^2b_1 + a_1a_2b_2) + 2p^2 (b_1b_3a_3 - a_1b_3^2 - a_3^2b_1 + a_1a_3b_3)$$

$$C = q^2 (b_1a_2 - b_2a_1)^2 + p^2 (b_1a_3 - b_3a_1)^2 - p^2q^2 (b_1 - a_1)^2$$

Pentru rezolvarea sistemului este necesară cunoașterea coordonatelor marginilor Soarelui. Soluțiile reale ale ecuației pătratice dau coordonatele x ale punctelor de intersecție ale dreptei care pleacă de la una din marginile Soarelui-satelit cu elipsoidul.

Condiția existenței soluțiilor reale este:

$$B^2 - 4AC \geq 0.$$

Metoda propusă de autor constă în utilizarea dreptei care trece prin punctele centrul Soarelui – satelit. Coordonatele centrului Soarelui se pot obține fie prin integrare numerică, sau de pe site-uri specializate. Pentru acest studiu autorul a folosit date furnizate de site-ul www.imcce.fr/en/ephemerides. Acest site oferă coordonatele geocentrice ale Soarelui în funcție de unitatea astronomică. Pentru studiul realizat de autor s-au folosit coordonatele soarelui obținute prin integrare numerică.

În continuare sunt prezentate situațiile de intersecție ale dreptei ce trece prin punctele centrul Soarelui-satelit și elipsoidul Pământului.

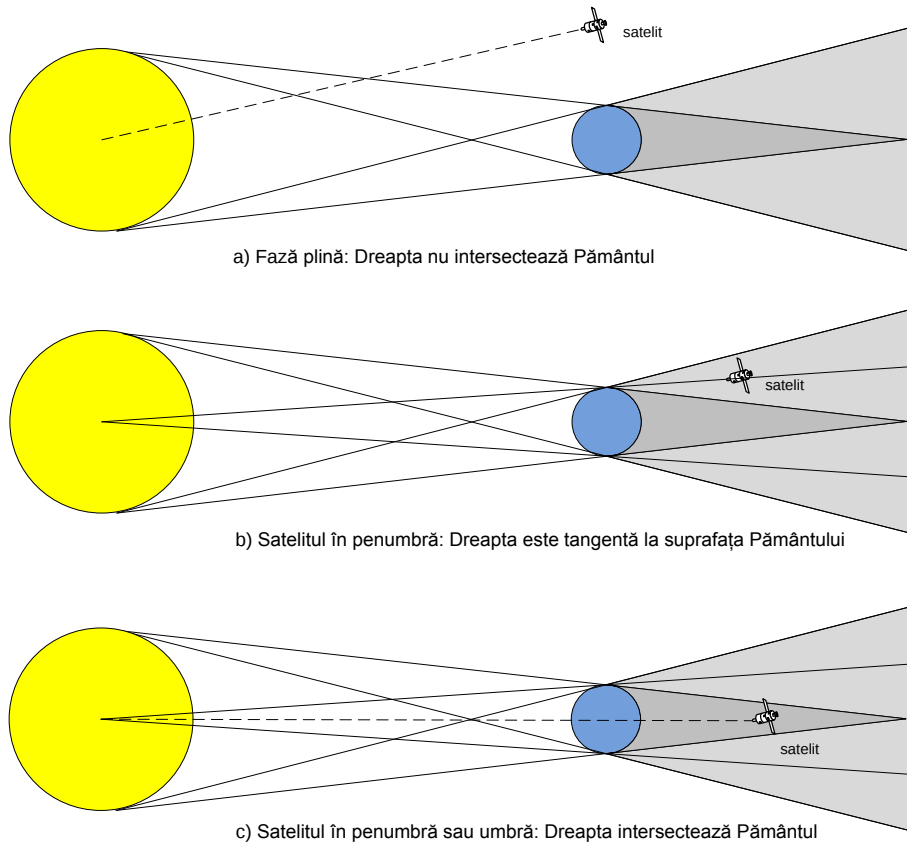
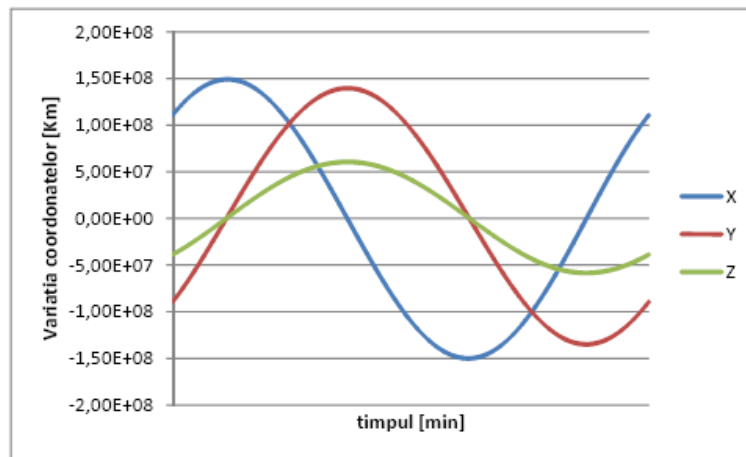


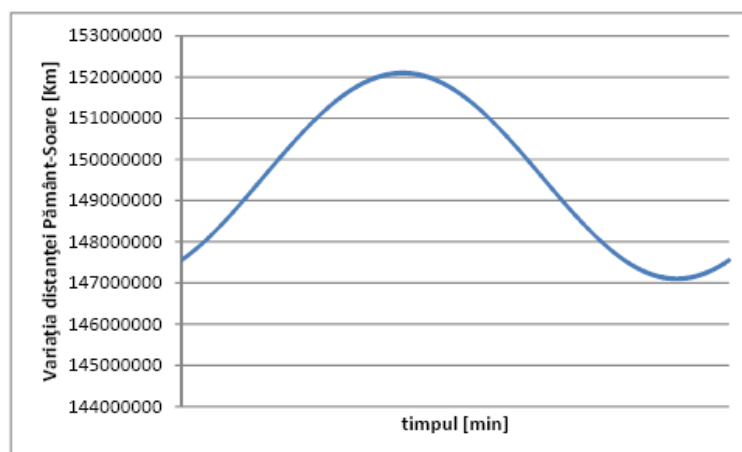
Fig. 3.1 Determinarea poziției satelitului GPS. Soluția propusă de autor

- dacă sistemul nu are soluții reale, atunci satelitul este complet iluminat.
- dacă sistemul are o singură soluție reală, atunci dreapta este tangentă la suprafața elipsoidului iar satelitul se poate afla în zona de penumbra sau complet iluminat. Atunci este necesară determinarea și a coordonatelor y și z de intersecție pentru a calcula distanța până la Soare. În cazul în care această distanță este mai mare decât distanța dintre Soare și satelit, atunci satelitul este complet iluminat, în caz contrar satelitul se află în zona de penumbra.
- dacă sistemul are două soluții reale, atunci este necesară determinarea și a coordonatelor y și z de intersecție pentru a calcula distanța până la Soare. În cazul în care această distanță este mai mare decât distanța dintre Soare și satelit, atunci satelitul este complet iluminat, în caz contrar satelitul se află în zona de penumbra sau de umbră.

Pentru acest studiu am determinat coordonatele Soarelui prin integrare numerică din minut în minut pentru 365 de zile folosind ca dată de start, data de 10.02.2011, ora: 00:00:00 UTC.



Variația coordonatelor Soarelui pentru un an de zile



Variația razei vectoare a Soarelui pentru un an

Pentru determinarea coordonatelor geocentrice ale satelitului din minut în minut pentru o perioadă de 365 de zile autorul a pornit de la condițiile inițiale din data de 10.02.2011 ora 00.00 UT:

$$\begin{aligned} x_{ai} &= 2425.8676; & v_{xi} &= 3.8327; \\ y_{ai} &= -15215.1157; & v_{yi} &= 0.4529; \\ z_{ai} &= 21743.2188; & v_{zi} &= -0.1055; \end{aligned}$$

Tab. 3.3 Numărul de soluții pentru intrarea satelitului GPS în zona de umbră

Tipul de elipsoid	Număr de soluții reale ale sistemului în funcție de perturbație		Număr minute pentru satelit în zona de umbră sau penumbră	
	J_2	Presiunea de radiație solară directă	J_2	Presiunea de radiație solară directă
p = 6378,137 Km q = 6356,752 Km	26424	26278	0	0
p = q = 6378,137 Km	26506	26376	0	0
p = q = 6402 Km	26702	26488	0	0

Pentru toate situațiile când sistemul a avut soluții reale a reieșit că satelitul nu a intrat pentru nici un moment în zona de umbra sau de penumbră a Pământului.

Rezultatele numerice privind trecerea satelitului prin zona de penumbră și de umbră a Pământului sunt în concordanță cu mișcarea reală a sateliților.

3.5.6 Efectul Poynting – Robertson

Efectul Poynting-Robertson, numit după John Henry Poynting și Howard Percy Robertson, reprezintă un proces de frânare prin care radiația solară determină particulele de praf din sistemul solar să se rotească pe o spirală descrescătoare. Frânarea este produsă în esență de componenta tangențială a forței produsă de presiunea radiației asupra mișcării particulelor de praf.

Pentru particulele de praf care înconjoară Soarele, radiația Soarelui pare să vină pe o direcție puțin înainte (aberația de lumină). Prin urmare, absorbția acestei radiații duce la o forță cu o componentă în sens contrar direcției de mișcare. Unghiul de aberației este extrem de mic, deoarece radiația se deplasează cu viteza luminii în timp ce particula de praf se mișcă cu o viteză a cărei ordine de mărime este mult mai mic.

Forța de frânarea produsă de efectul Poynting-Robertson poate fi înțeleasă ca o forță ce acționează pe direcția opusă direcția de deplasare a particulei de praf pe orbita proprie, ceea ce produce un efect de scădere a momentului cinetic. Astfel, în timp ce particula de praf se deplasează pe o spirală foarte încet către Soare, viteza sa orbitală crește continuu.

Forța Poynting-Robertson este egală cu:

$$F_{PR} = \frac{Wv}{c^2} = \frac{r^2}{4c^2} \sqrt{\frac{GM_s L_s^2}{R^5}} \quad (3.27)$$

unde:

W - este puterea radiației incidente,
v - este viteza particulelor de praf,
c - este viteza luminii,
r - este raza obiectului,
G - este constanta gravitațională a universului,
 M_s - este masa Soarelui,
 L_s - luminozitatea solară

R - este raza orbitei pe care se deplasează obiectul.

Luminozitate solară, $L_{\odot}$, reprezintă unitatea fluxului radiant (putere emisă sub formă de fotoni) pentru a măsura luminozitatea stelelor. O unitate de luminozitate solară este egală cu luminozitatea curentă acceptată a Soarelui și are valoarea de 3.839×10^{26} W, sau 3.839×10^{33} erg/s.

Luminozitatea solară se referă la iradianța solară măsurată pe Pământ sau de către sateliții aflați pe orbita Pământului. Iradianța medie la partea de sus a atmosferei Pământului este, uneori, cunoscută sub numele de constanta solară, $I_{\odot}$. Iradianța este definită ca putere pe unitatea de suprafață, astfel încât luminozitatea solară (energie totală emisă de Soare) este iradianța primit pe Pământ (constanta solară), înmulțită cu suprafața sferei a cărei rază este reprezentată de distanța medie dintre Pământ și Soare:

$$L_s = 4\pi k A^2 \quad (3.28)$$

unde:

A - este unitatea astronomică în metri

k - este o constantă (a cărei valoare este foarte aproape de unu), care reflectă faptul că distanța medie de la Pământ la Soare nu este exact o unitate astronomică.

considerând:

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Kg s}^2$$

$$M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$$

$$L_s = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Kg m}^2/\text{s}^3$$

$$R = 150000000000 \text{ m (unitatea astronomică)}$$

Rezultă o valoare a forței Poynting-Robertson:

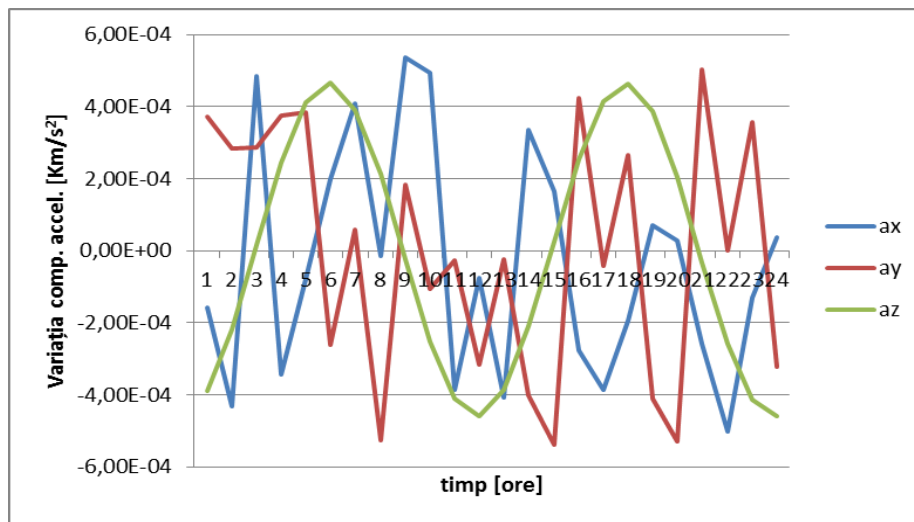
$$F_{PR} = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ kN}$$

Accelerația Poynting-Robertson se determină din raportul dintre forța Poynting-Robertson și masa satelitului.

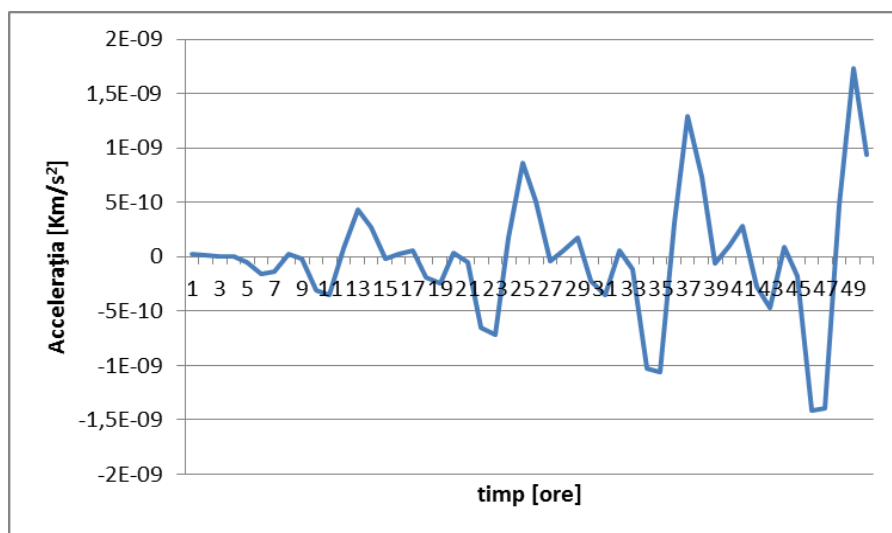
$$a_{PR} = \frac{Wv}{c^2 m} = \frac{r^2}{4c^2 m} \sqrt{\frac{GM_s L_s^2}{R^5}} \quad (3.29)$$

Considerând raportul $\frac{r^2}{m}$ dintre raza satelitului și masa acestuia ca fiind un raport Aria/Masă specific satelitului, atunci accelerația Poynting-Robertson are valoarea:

Tipul de satelit GPS	Raport Aria/Masă [m ² /Kg]	Accelerația Poynting-Robertson [Km/s]
Block I	0,01513	$6,930 \cdot 10^{-15}$
Block II	0,01667	$7,635 \cdot 10^{-15}$
Block IIR	0,01606	$7,356 \cdot 10^{-15}$



Variația componentelor accelerației datorată efectului Poynting-Robertson



Variația accelerației totale datorată efectului Poynting-Robertson

Din graficele de variație a elementelor orbitale (a , e , i , ω , Ω , M) precum și a razei vectoare și a vitezei în sistemul CST ale unui satelit GPS pentru o perioadă de 50 ore, reiese:

- Semiaxa mare suferă perturbații cu amplitudinea maximă de 1 cm.
- Excentricitatea prezintă o perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 4 ore având ordinul de mărime 10^{-10} Km.
- Inclinarea este foarte stabilă, aceasta prezând variații foarte mici de ordinul a 10^{-9} grade.

4. ANALIZA CALITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELITULUI GPS

4.1 Noțiuni introductive

Înainte de matematicianul francez Henri Poincare, studiile sistemelor dinamice se concentrau pe găsirea soluțiilor în sensul explicitării funcțiilor care rezolvau ecuațiile de mișcare. Prin contribuția adusă de acesta la sfârșitul secolului al XIX-lea, teoria sistemelor dinamice a cunoscut o evoluție semnificativă. Soluția introdusă de Poincare consta în observarea geometria soluțiilor fără a explicita formulele. Astfel, fără a se ști formula exactă a soluției, se pot găsi proprietățile calitative ale acesteia. Această nouă metodă a contribuit la rezolvarea multor probleme care implicau ecuațiile diferențiale.

Analiza calitativă sau geometrică reprezintă o analiză a modului de evoluție a soluțiilor unui sistem dinamic. Această analiză se realizează în spațiul fazelor, care reprezintă spațiul stărilor, adică spațiul în care sunt reprezentate grafic toate mărimile care descriu starea sistemului. În spațiul fazelor, starea unui sistem dinamic la un moment dat se descrie grafic printr-un punct, definit de un set de variabile de fază, adică un set minim de variabile care descriu complet starea sistemului. Schimbarea stării sistemului în funcție de timp este o traiectorie în spațiul fazelor. Colecția tuturor traiectoriilor posibile (locale sau globale) ale unui sistem dinamic se numește portret de fază (local sau global).

Se analizează din punct de vedere calitativ mișcarea unei particule (satelit, cometă) în jurul corpului central în diferite tipuri de câmp, sub influența armonicelor zonale până la gradul 6, pe orice tip de orbită și pentru diferite valori ale energiei sistemului.

Câmpul gravitațional în care potențialul este dat de relația:

$$V(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^3} \quad (4.1)$$

poartă numele de problema Schwarzschild, iar câmpul în care potențialul este dat de relația:

$$V(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \quad (4.2)$$

poartă numele de câmp de tip Manev.

4.2 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub influența armonicelor zonale de ordin superior

Potențialul gravitațional până la armonica a șasea zonală are forma:

$$V(r) = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a_{ec}}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \varphi) \quad (4.4)$$

Pentru ușurința calculelor se notează:

$$a_1 = \mu, \quad a_2 = 0 \quad \text{și} \quad a_k = -\mu a_{ec}^{k-1} J_{k-1} P_{k-1}(\sin \varphi) \quad \text{pentru} \quad k = 3..6 \quad (4.5)$$

rezultând noua formă a potențialului gravitațional:

$$V(r) = \sum_{n=1}^7 \frac{a_n}{r^n} \quad (4.6)$$

Pentru descrierea mișcării celor două corpuri satelit – corp central (particulă - centru) care se desfășoară într-un plan, alegem coordonatele configurație – impuls.

Poziția satelitului va fi definită de vectorul $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, (4.7)

iar viteza va fi definită de vectorul impuls $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $p = \dot{q}$. (4.8)

Vectorul configurație (poziție) nu este definit în origine deoarece acest punct este asociat unei singularități a sistemului (coliziunea particulă – centru).

Pentru eliminarea singularităților și regularizarea ecuațiilor de mișcare se utilizează transformările McGehee de speța a doua. Ecuațiile mișcării devin:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{ds} = rx \\ \theta' &= \frac{d\theta}{ds} = y \\ x' &= \frac{dx}{ds} = \frac{7}{2}x^2 + y^2 - \sum_{n=1}^7 na_n r^{7-n} \\ y' &= \frac{dy}{ds} = \frac{5}{2}xy \end{aligned} \quad (4.9)$$

Integralele prime devin:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= hr^7 + 2 \sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n} \\ y^2 &= C^2 \cdot r^5 \end{aligned} \quad (4.10)$$

În acest moment atât ecuațiile de mișcare, cât și integralele prime sunt bine definite pentru limita $r \rightarrow 0$, deci spațiul fazelor poate fi extins analitic să conțină și varietatea $\{(r, \theta, x, y) | r = 0\}$.

Se definește varietatea $M_0 = \{(r, \theta, x, y) | r = 0, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathfrak{R}^2\}$ unde S^1 este intervalul $[0, 2\pi]$ cu capetele confundate și varietatea de energie constantă

$$M_h = \{(r, \theta, x, y) | x^2 + y^2 = h \cdot r^7 + 2 \sum_{n=1}^7 a_n \cdot r^{7-n}, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathfrak{R}^2\}.$$

Varietatea coliziunii va fi intersecția celor două varietăți definite mai sus, adică:

$$M_{col} = \{(r, \theta, x, y) | r = 0, x^2 + y^2 = 2 \cdot a_7, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathfrak{R}^2\} \quad (4.11)$$

Din expresia integralei momentului cinetic în coordonate polare se observă că în cazul în care $r \rightarrow 0$ atunci $\theta' \rightarrow \infty$. În termenii mișcării fizice, particula se deplasează pe orbite în formă de spirală în jurul centrului de un număr infinit de ori până la coliziune (sau respectiv, după ejecție). Acesta reprezintă efectul găurii negre (Diacu et al., 1995). Din expresia integralei energiei se observă că evadarea $r \rightarrow \infty$ nu este posibilă decât în cazul energiei ne-negative $h \geq 0$.

Deoarece variabila θ nu apare explicit în ecuațiile de mișcare sau în integralele prime se poate reduce spațiul cvadridimensional (r, θ, x, y) la cel tridimensional (r, x, y) prin factorizarea curentului prin S^1 . Orice soluție în spațiul (r, x, y) trebuie privită ca o varietate de soluții în spațiul fazelor cvadridimensional. Utilizând integrala primă a momentului cinetic, reducem spațiul fazelor la două dimensiuni (r, x) . Câmpul de vectori devine:

$$\begin{aligned} r' &= rx \\ x' &= \frac{7}{2}hr^7 - \frac{5}{2}C^2r^5 + \sum_{n=1}^6 (7-n)a_n r^{7-n} \end{aligned} \quad (4.12)$$

unde integrala energiei se utilizează pentru eliminarea lui y din a doua ecuație:

$$x^2 = hr^7 - C^2r^5 + 2 \sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n} \quad (4.13)$$

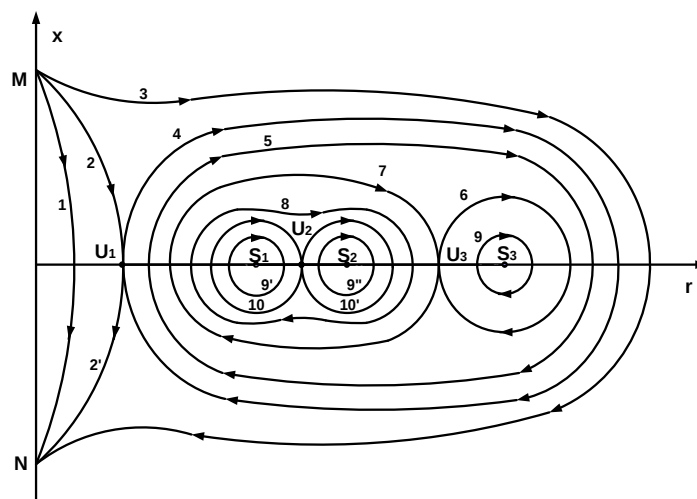
Torul M_{col} s-a redus la cercul $\{(r, x, y) | r = 0; x^2 + y^2 = 2a_7\}$ în spațiul tridimensional, iar în spațiul bidimensional s-a redus la două puncte $N(r = 0, x = \sqrt{2a_7})$ și $P(r = 0, x = -\sqrt{2a_7})$.

Pentru întocmirea portretelor de fază ale mișcării satelitului GPS în jurul corpului central, se va analiza graficul funcției $x(r) = \pm\sqrt{f(r)}$ unde $f(r) = hr^7 - C^2r^5 + 2\sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n}$ și de asemenea se iau în discuție valorile coeficienților din ecuațiile de mișcare și ale soluțiilor ecuațiilor $f(r) = 0$ și $\frac{df(r)}{dr} = 0$.

Se va considera cazul cel mai general când derivata $f'(r)$ are 5 schimbări de semn (numărul maxim) pentru cazul energiei negative, deci rezultă conform regulii lui Descartes că pentru cazul colizional $a_7 > 0$ ecuația $f(r) = 0$ are 5 rădăcini pozitive, iar pentru cazul non-colizional $a_7 < 0$ ecuația are 4 rădăcini pozitive. Atunci când energia este pozitivă sau nulă presupunem că derivata $f'(r)$ are 4 schimbări de semn (numărul maxim), deci conform aceleiași reguli a lui Descartes rezultă că ecuația $f(r) = 0$ va avea 5 rădăcini pozitive în cazul $a_7 > 0$ și 4 rădăcini pozitive în cazul $a_7 < 0$.

Există o valoare critică a energiei care va determina, alături de semnul coeficienților funcției $f(r)$, configurații diferite pentru portretele de fază.

Cazul $a_7 > 0, h < h_c < 0$



Explicația portretului de fază prezentat este:

S – punct de echilibru stabil (centru), care reprezintă mișcare circulară stabilă;

U – punct de echilibru instabil (izvor), care reprezintă mișcare circulară instabilă;

(1) și (3) – orbite heterocline, mișcarea în spirală de tipul ejecție - coliziune;

(2) și (2') – reprezintă mișcarea pe orbite în formă de spirală care pornesc de la coliziune și tind asimptotic la forma circulară instabilă sau invers;

(4), (6), (7), (10) și (10') – traiectorie homoclină, care în termeni fizici este o orbită în formă de spirală care pornește asimptotic de la un cerc instabil și tinde asimptotic la același cerc instabil;

(5), (8) și (9), (9'), (9'') – orbite stabile periodice sau cvasiperiodice, cu excentricitate care descrește de la (5) pentru care are valori semnificative, până la (9') și (9''). Nu se poate spune nimic de excentricitatea orbitelor (9);

4.3 Aplicație practică. Satelitul GPS

Se înlocuiesc în expresia funcției

$$f(r) = hr^7 - C^2r^5 + 2\sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n} \quad (4.14)$$

toți coeficienții cu parametri cunoscuți ai Pământului:

- armonicile zonale de la J_2 la J_6
- polinoamele Legendre pentru latitudine nulă
- constanta gravitațională (μ)
- energia calculată cu formula $h = -\frac{\mu}{a}$
- momentul cinetic din relația $C^2 = \mu a(1-e^2)$
- semiaxa mare a satelitului geostaționar $a = 26559,4$ km.

În urma rezolvării ecuației $f(r) = 0$ rezultă soluțiile $r_1 = 26329,11$ și $r_2 = 26788,02$, iar în urma rezolvării ecuației $f'(r) = 0$ rezultă soluția $r'_1 = 26563,5$, care este exact semiaxa mare a satelitului geostaționar. Se realizează graficele funcțiilor $x(r) = \pm\sqrt{f(r)}$ și apoi se determină portretul de fază cu ajutorul programului Maple 14.

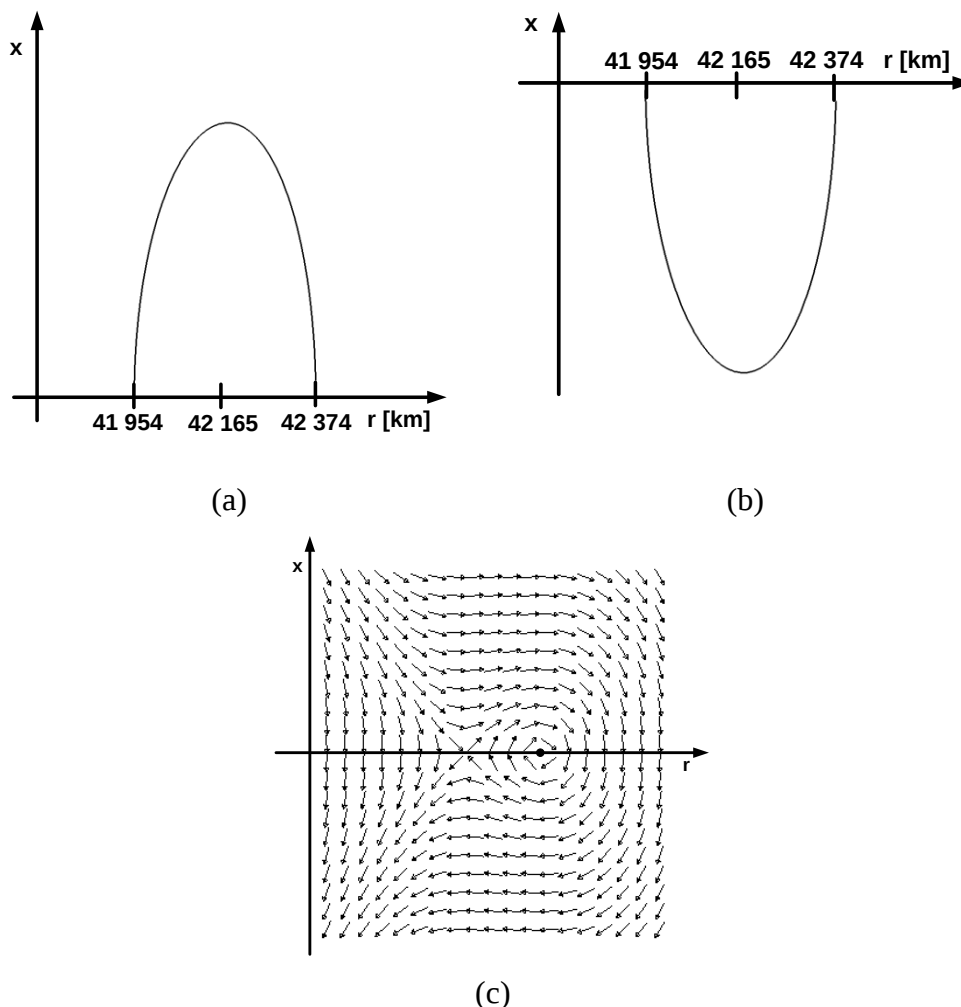


Figura 4.1 (a), (b) - Graficele funcției $x(r)$; (c) - Portretul de fază în Maple

În continuare se prezintă portretul de fază explicit. Poziția satelitului GPS este marcată prin punctul (S), care semnifică mișcare circulară stabilă la distanța r de corpul central.

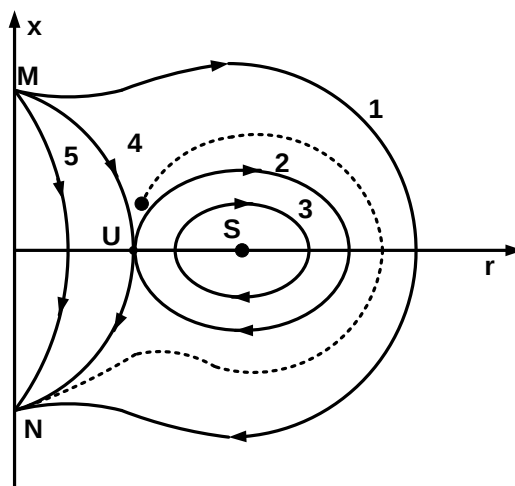


Figura 4.2 Portretul de fază explicit al mișcării satelitului GPS

Orbita satelitului GPS este stabilă atâta timp cât r se situează între valorile $r_1 = 26329,11$ și $r_2 = 26788,02$. Dacă în mișcarea sa pe orbită satelitul GPS depășește la dreapta valoarea lui r_2 sau la stânga valoarea lui r_1 , rezultă deplasarea fizică în spirală pe o orbită care tinde asimptotic la coliziune. Linia punctată reprezintă traiectoria fictivă a unui satelit geostaționar care părăsește orbita sa și se deplasează pe o orbită eliptică, cu excentricitate crescătoare și tinde asimptotic la coliziune.

4.4 Concluzii ale analizei calitative

Capitolul prezintă o abordare nouă a teoriei sistemelor dinamice, în general și a mecanicii cerești, în special, prin intermediu metodei calitative al cărui inițiator este Poincare. S-a considerat mișcarea unei particule (satelit, cometă) în jurul corpului central în diferite tipuri de câmp: Schwarzschild, Manev, sub influența armonicelor zonale până la gradul 6.

Din cele prezentate se remarcă utilitatea transformărilor McGehee, care au rolul de a elimina singularitățile și a regulariza ecuațiile de mișcare. Prin intermediul transformărilor s-a făcut să explodeze varietatea coliziunii și a înlocuit-o cu o varietate limită, alipită spațiului fazelor. Transformările McGehee permit astfel studiul mișcării în apropierea coliziunii.

Din acest capitol se observă că pot avea loc coliziuni și pentru cazul $C \neq 0$. Prin urmare, atunci când $r \rightarrow 0$ rezultă $\theta' \rightarrow \infty$, adică particula execută o mișcare în spirală de un număr infinit de ori în jurul centrului, până la coliziune sau după ejecție, ceea ce reprezintă efectul găurii negre (Diacu et al., 1995).

În cazul în care energia sistemului este negativă ($h < 0$) particula nu poate evada. Iar în cazul în care coeficientul maxim ($a_7 < 0$) este negativ, mișcarea se execută fără coliziune.

Din situațiile prezentate se întâlnesc următoarele tipuri de orbite:

- mărginite și colizionale, care pornesc de la ejecție, ating o distanță maximă sau un echilibru instabil și vin la coliziune;
- mărginite și ne-colizionale, care pot fi:
 - circulare stabile sau instabile
 - periodice (inclusiv librații radiale) și cvasi-periodice
 - homocline, care pornesc de la un echilibru instabil și revin la acesta

- heterocline, care unesc două puncte de echilibru instabil
- nemărginite și colizionale, de tipul eiecție – evadare și infinit – coliziune;
- nemărginite și ne-colizionale, care vin de la infinit, ating o distanță minimă sau un punct de echilibru instabil și revin la infinit.

5. CONCLUZII

În încheiere se face o trecere în revistă a noțiunilor și analizelor efectuate în prezenta lucrare, scoțând în evidență rezultatele semnificative și originale.

În ordinea capitolelor, urmează prezentarea succintă a părților importante din fiecare secțiune a acestei lucrări și concluzii rezultate.

Cap. I. Descrierea sistemului satelitar NAVSTAR/GPS, identificarea aplicațiilor tehnologiei GPS, descrierea sistemelor de referință și scările de timp necesare studiului forțelor perturbatoare care acționează asupra sateliților GPS.

Cap. II. Analiza cantitativă a mișcării sateliților GPS sub influența perturbațiilor de tip gravitațional și negravitațional.

Cap. III. Analiza cantitativă a perturbațiilor de tip negravitațional: presiunea radiației solare directe, presiunea de radiație solară indirectă, emisia termică anizotropă, emisia antenei și modelele empirice ale presiunii radiației solare.

Cap. IV. Analiza mișcării perturbate a sateliților NAVSTAR/GPS pe baza metodei numerice utilizând algoritmul de integrare Runge-Kutta de ordinul 4. Avantajele acestui algoritm de integrare sunt stabilitatea și ușurința modelării ecuațiilor mișcării perturbate a satelitelui GPS. Algoritm este lent, timpul de calcul mărindu-se considerabil pentru perioade mari de timp, acesta fiind principalul dezavantaj al algoritmului. Programul de calcul este realizat de autor în limbajul de programare C++, într-o manieră simplă, dar care să ofere informațiile necesare analizei mișcării sateliților GPS.

4.4 Plecând de la condițiile inițiale (poziție și viteză) pentru satelitul GPS de studiu, pentru data de 10.02.2011 ora 00.00 UT s-au prezentat graficele de variație a componentelor accelerațiile date de perturbațiile gravitaționale J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 , atracția gravitațională a Soarelui și a Lunii, efectele relativiste și efectul Poynting-Robertson pentru o perioadă orbitală, precum și graficele de variație a accelerațiilor totale ale acestor perturbații gravitaționale pentru o perioadă de 50 de ore. Sunt determinate valorile mediate ale accelerațiilor totale, unitatea de măsură fiind în Km/s^2 .

4.5 Se observă faptul că perturbațiile de natură gravitațională au influența cea mai mare, dintre acestea evidențiindu-se armonica zonală J_2 a cărui ordin de mărime este de $2 \times 10^{-7} \text{ Km/s}^2$.

Dintre perturbațiile de natură negravitațională, presiunea radiației solare directe are efectul cel mai mare având ordinul de mărime de $4,4 \times 10^{-10} \text{ Km/s}^2$ pe când cel dat de efectul Poynting-Robertson este de $6,9 \times 10^{-15} \text{ Km/s}^2$.

4.6 Sunt determinate efectele produse de perturbațiile de tip non gravitaționale asupra elementelor orbitale kepleriene.

4.6.1 Ca urmare a acțiunii presiunii radiației solare directe asupra unui satelit GPS au reieșit următoarele efecte:

- Semi-axa mare prezintă o perturbație scurt-periodică cu o perioadă de 6 ore suprapusă peste o perturbație seculară. Pentru o perioadă orbitală, semi-axa mare suferă o variație de 4 metri.

- Excentricitatea prezintă a perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 6 ore având ordinul de mărime $4,8 \cdot 10^{-8}$ Km.

- Înclinarea prezintă același tip de perturbație ca și semi-axa mare, o perturbație scurt-periodică suprapusă peste o perturbație seculară. Perturbația scurt-periodică are perioada de 6 ore și ordinul de mărime $3 \cdot 10^{-6}$ grade.

- Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație scurt periodică cu o perioadă de 6 ore și o amplitudine de $1,7 \cdot 10^{-6}$ grade, suprapusă peste o perturbație seculară.

4.6.2 Pe baza modelelor de radiație a Pământului, radiație reflectată și emisă, s-au realizat graficele iradianței Pământului pentru diferite valori ale albedoului și în funcție de unghiul ψ - unghiul satelit-Pământ-Soare. Pe baza datelor privind reflectivitatea și emisivitatea Pământului furnizate de CERES pentru perioada februarie – iunie 2011 am realizat graficele de variație ale acestora și determinat valorile medii. Folosind metoda celor mai mici pătrate am determinat coeficienții reflectivității și emisivității pentru perioada februarie – iunie 2011 pentru cazul când aceștia se scriu ca dezvoltări armonice în funcție de latitudine. S-au determinat graficele de variație ale componentelor radiale și tangențiale ale accelerațiilor datorate radiației reflectate și emise de Pământ, asupra sateliților GPS (satelitul P07 în particular), cazul în care sateliții sunt modelați sub forma „cutie cu aripi”. Pentru cazul în care satelitul GPS este considerat ca având forma de „sferă” s-au determinat graficele de variație ale elementelor keplerine pentru 50 și 500 de ore rezultând următoarele efecte:

- Semi-axa mare prezintă două tipuri de perturbații, una scurt-periodică și una lung-periodică. Perturbația scurt-periodică este de perioadă egală cu perioada orbitală (12 ore) și o variație de 1 Km, iar perturbația lung-periodică are perioada de 240 de ore.

- Excentricitatea prezintă a perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 6 ore având ordinul de mărime $1,5 \cdot 10^{-8}$ Km.

- Înclinarea prezintă două tipuri de perturbații, una scurt-periodică și una seculară. Perturbația scurt-periodică este de perioadă egală cu perioada orbitală (12 ore) și o variație de $7 \cdot 10^{-6}$ grade.

- Anomalia medie suferă o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore suprapusă peste o perturbație seculară.

- Argumentul perigeului suferă perturbații mixt periodice:

- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $1 \cdot 10^{-2}$ grade

- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $3 \cdot 10^{-2}$ grade

- o perturbație seculară

- Longitudinea nodului ascendent suferă perturbații mixt periodice:

- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $4 \cdot 10^{-3}$ grade

- o perturbație seculară

4.6.3 Ca urmare a emisiei termice anizotrope asupra unui satelit GPS au reieșit următoarele efecte:

- Semi-axa mare și înclinarea nu suferă perturbații.

- Excentricitatea suferă o perturbație scurt periodică de perioadă egală cu perioada orbitală și de amplitudine $8 \cdot 10^{-10}$.

- Anomalia medie suferă perturbații scurt periodice cu perioada de 6 ore suprapuse peste o perturbație seculară.

- Argumentul perigeului suferă perturbații scurt periodice având perioada de 6 ore suprapuse peste perturbații seculare.

- Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație lung periodică având amplitudinea de $2 \cdot 10^{-11}$ grade.

4.6.4 Ca urmare a emisiei antenelor de navigație asupra unui satelit GPS au reieșit următoarele efecte:

- Semi-axa mare și înclinarea nu suferă perturbații.
- Excentricitatea prezintă o perturbație scurt periodică cu o perioadă egală cu perioada orbitală și o amplitudine de $8 \cdot 10^{-10}$.
- Argumentul perigeului suferă perturbații scurt periodice având perioada de 6 ore.
- Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație lung periodică având amplitudinea de $1 \cdot 10^{-8}$ grade.

4.6.5 Pe baza studiilor realizate de Adhya 2005 privind eclipsele sateliților GPS, am realizat un model matematic pentru determinarea perioadei de timp în care satelitul GPS intră în zona de penumbră sau umbră a Pământului. Am luat în considerare cazurile când satelitul GPS este perturbat de presiunea radiației solare directă sau de J_2 și am determinat soluțiile modelului matematic creat. Pentru toate situațiile când sistemul a avut soluții reale a reieșit că satelitul nu a intrat pentru niciun moment în zona de umbră sau de penumbră a Pământului.

La modelarea teoretică a regiunii de penumbră prin care trece un satelit din constelația GPS, a reieșit că la o viteză a satelitului de aproximativ 3.86 Km/s, traversarea acestei zone se realizează într-un interval de 15.3 minute.

4.6.6 Ca urmare a efectului Poynting-Robertson asupra unui satelit GPS au reieșit următoarele efecte:

- Semi-axa mare suferă perturbații lung periodice cu amplitudinea maximă de 1 cm.
- Excentricitatea prezintă o perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioada egală cu perioada orbitală având ordinul de mărime $1,5 \cdot 10^{-11}$.
- Înclinarea este foarte stabilă, aceasta prezând perturbații scurt periodice de perioadă 4 ore și ordinul de mărime de $1 \cdot 10^{-8}$ grade.
- Celelalte elemente orbitale suferă perturbații scurt periodice de perioadă 6 ore și de amplitudine $8 \cdot 10^{-7}$ grade.

Cap. V Prezintă o abordare nouă a teoriei sistemelor dinamice, în general și a mecanicii cerești, în special, prin intermediu metodei calitative al cărui inițiator este Poincare. S-a considerat mișcarea unei particule (satelit) în jurul corpului central în diferite tipuri de câmp: Schwarzschild, Manev și sub influența armonicelor zonale până la gradul 6. S-a analizat mișcarea satelitului GPS pe orice tip de orbită și pentru diferite valori ale energiei sistemului.

5.2 Se remarcă utilitatea transformărilor McGehee, care au rolul de a elimina singularitățile și de a regulariza ecuațiile de mișcare. Prin intermediul transformărilor s-a făcut să explodeze varietatea coliziunii și s-a înlocuit o varietate limită, alipită spațiului fazelor. Transformările McGehee acționează ca o lupă cu o putere infinită de mărire asupra singularității coliziunii și permite astfel studiul mișcării în apropierea coliziunii.

5.3 S-a efectuat o aplicație practică în cazul satelitului GPS. Orbita satelitului GPS este stabilă atâta timp cât r se situează între valorile $r_1 = 26329,11$ și $r_2 = 26788,02$. Dacă în mișcarea sa pe orbită satelitul GPS depășește la dreapta valoarea lui r_2 sau la stânga valoarea lui r_1 , rezultă deplasarea fizică în spirală pe o orbită care tinde asimptotic la coliziune. Astfel rezultatele calitative sunt confirmate de rezultatele numerice.

BIBLIOGRAFIE

1. Aksnes, K., „*Short-period and long-period perturbations of a spherical satellite due to direct solar radiation*”, Celestial Mech. 1976
2. Anselmo, L. et al., „*Orbital perturbations due to radiation pressure for a spacecraft of complex shape*” Celestial Mech. 1983
3. Anselmo, L. et al., „*Modelling of orbital perturbations due to radiation pressure for high Earth satellites in ESA Spacecraft Flight Dynamic*”, ESA SP-160, 1981
4. Arnold, V. I., „*Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*”, Berlin: Springer 1983
5. Arnold V., Kozlov V., Neishtadt A., „*Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*”, Springer, Germania, 2006
6. Barlier, F. et al., „*Non-gravitational perturbations on the semimajor axis of LAGEOS*”, Ann. Geophys., 1986
7. Bar-Sever Y. and Kuang D., „*New Empirically Derived Solar Radiation Pressure Model for Global Positioning System Satellites*”, IPN Progress Report 42-159, 2004
8. Barrar, R., „*Some remarks on the motion of a satellite of an oblate planet*”, The Astronomical Journal, vol.66, 1961
9. Barrie W.J., „*Discovering the solar system*”, Marea Britanie, 2007
10. Batrakov, I.V., „*Dynamics of Sattelites*”, IUTAM Symposium, Paris 1962, Springer-Verlag, Berlin, 1963
11. Bertotti, B., Farinella, P., „*Physics of the Earth and the Solar System*”, Kluwer Academic Publishers, 1990
12. Beutler G., „*Methods of celestial mechanics*”, vol. 1 și 2, Springer, Germania, 2005
13. Born, G., „*Motion of a Satellite under the influence of an oblate Earth*”, 2001
14. Broucke, R.A., „*Numerical integration of periodic orbits in the main problem of artificial satellites*”, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1994
15. Brouwer, D., „*Solution of the problem of artificial satellite theory without drag*”, the Astronomical Journal, vol.64, 1959
16. Brouwer, D., Clemence, G.M., „*Methods of Celestial Mechanics*”, Academic Press, New York and London, 1961
17. Burns, A.J., „*Elementary Derivation of the Perturbation Equations of Celestial Mechanics*”, American Journal of Physics, 1976
18. Capitaine, N., „*Systèmes de références spatio-temporelles*”, Romanian Astronomical Journal, București, 2002
19. Christoiu A., Murray C. D., „*A second order Laplace-Lagrange theory applied to the uranian satellite system*”, 1997
20. Claessens, S.J., Featherstone, W.E., „*Computation of geopotential coefficients from gravity anomalies on the ellipsoid*”, Western Australian Centre for Geodesy, 2004
21. Collins G., „*The foundations of Celestial Mechanics*”, SUA, 2004
22. Cojocaru, S., „*Sistemul global de poziționare GPS/GLONASS – prezent și viitor*”, Zilele Academiei Clujene, Cluj-Napoca 1996
23. Cojocaru, S., „*Contribuții la studiul erorilor orbitale ale sateliților GPS pe seama potențialului gravitațional terestru*”, Teză de doctorat, Institutul Astronomic, București, 1997
24. Cojocaru, S., „*Elemente de dinamica sateliților GPS*”, Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân”, Constanța, 1999
25. Cojocaru, S., „*Tratat de navigație maritimă – Metodele moderne ale navigație maritime*”, Editura Ars Academica, București, 2008

26. Cojocaru S., Draguşan A., Lupu S., "*Upon a possible common geostationary and GPS constellation: a dynamical investigation*", Recent Insights into our Universe Workshop, 28-29 Oct 2009, Bucuresti,
27. Dinescu, A., "*Introducere în geodezia geometrică spațială*", Ed.Tehnică, Bucureşti 1980
28. Drăguşan A., Contribuţii la teoria mişcării sateliţilor ecuatoriali, Teză de doctorat, Institutul Astronomic, Bucureşti 2008
29. Drăguşan, A., Lupu, S., „*Methods for representing the gravitational potential*”, Romanian Astronomical Journal, vol.16 Supplement, p.127, 2005
30. Drăguşan, A., Lupu, S., „*EPIRB Distress Signal Via Satellite*”, Romanian Astronomical Journal, 2006
31. Drăguşan, A., Lupu, S., Cojocaru S., „*Astronomical Principles of Satellite Positioning*”, Exploring the solar system and the Universe, American Institute of Physics, 2008
32. Escobal, P. R., „*Methods of orbit determination*”, New York, 1965
33. Eriksson, P., „*Orbital and attitude perturbation on a small satellite*”, 2002
34. Expertier, P., „*Geopotential from space techniques*”, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1994
35. Farinella, P. Et al., „*Dynamics of an artificial satellite in an Earth-fixed reference frame: effect of polar motions in Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics*”, ed. E M Gasposchkin and B Kolaczek (Dordrecht: Reidel) 1981
36. Garfinkel, B., „*The Orbit of a Satellite of an Oblate Planet*”, The Astronomical Journal, vol.64, 1959
37. Geyling F., Wersternan R., „*Introduction to orbital mechanics*”, Canada, 1971
38. Gube, M., „*Planetary albedo estimates from Meteosat data*”, ESA Journal 1982
39. Heiskanen and Moritz, „*Physical Geodesy*”, Technical University of Graz, 1967
40. Hofmann-Wellenhof, B. et al., „*GPS - Theory and Practice*”, New York 1993.
41. Huang, S.S., „*Some Dynamical properties of natural and artificial satellites*”, The Astronomical Journal, 1961
42. Iacob, C., „*Mecanica teoretică*”, Ed. Didactică şi Pedagogică, Bucureşti 1980
43. Jamet O., Thomas E., „*A linear algorithm for computing the spherical harmonic coefficients of the gravitational potential from a constant density polyhedron*”, Institut Geographique National, Laboratoire de Recherche en Geodesie, 2004
44. Kaula, W.M., „*Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite*”, The Astronomical Journal, 1962
45. Kaula, W.M., „*Theory of satellite geodesy*”, Blaisdell Publ.Co., Waltham 1966
46. Kovalevsky, J., „*Introduction to the celestial mechanics*”, Olanda, 1967
47. Kovalevsky, J., Mueller, Kolaczek, „*Reference Frames in Astronomy and Astrophysics*”, Kluwer Academics, 1989.
48. Kozai, Y., „*Numerical Results from Orbits*”, Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report 101, 1962
49. Kozai, Y., „*Revised zonal harmonics in the geopotential*”, SAO Special Report, 1969
50. Lala, P., Sechnal, L., „*The Earth Shadowing Effects in the Short - Periodic Perturbations of the Satellite Orbits*”, BAC, 1969
51. Levallois, J.J., Kovalevsky, J., „*Geodesie Generale*”, Tome IV, Paris 1971
52. Lupu S., Zaharescu E., *Effects of direct and indirect solar radiation pressure in orbital parameters of GPS satellites*, Analele Univ. Ovidius Constanţa, Seria Matematică, ISSN 1224-1784, Vol. 22(2), 2014, 141-150, DOI: 10.2478/auom-2014-0039
53. Lupu E.C., Lupu S., Adina Petcu, *EB lifetime distributions as alternative to the EP lifetime distributions*, Analele Univ. Ovidius Constanţa, Seria Matematică, ISSN 1224-1784, Vol. 22(3), 2014, 115-125, DOI: 10.2478/auom-2014-0053

54. Lupu S. „*Elemente de dinamica sistemului global de poziționare NAVSTAR - GPS*”, Ed. Academiei Navale “Mircea cel Bătrân”, Constanța 2011
55. Lupu S. - *The evaluation of gravitational perturbation acceleration actions on GPS satellites*, Constanta Maritime University's Annals, Volume 18 - 2012, Ed. Nautica, ISSN 1582 – 3601
56. Lupu S. - *The effects caused by non-gravitational perturbations: the anisotropic thermal emission and antennas emission on GPS satellites*, Constanta Maritime University's Annals, Volume 18 - 2012, Ed. Nautica, ISSN 1582 – 3601
57. Lupu S., Pocora A., Lupu E.C. – *Modelling the eclipse region for GPS satellites*, “Mircea cel Batran” Naval Academy Scientific Bulletin, Volume XV – 2012 – Issue 1 Published by “Mircea cel Batran” Naval Academy Press, Constanta, ISSN 1454-864X
58. Lupu S., Lupu E.C., Crețu G. – *Some remarks on GPS satellites orbites*, “Mircea cel Batran” Naval Academy Scientific Bulletin, Volume XIV – 2011 – Issue 2 Published by “Mircea cel Batran” Naval Academy Press, Constanta, ISSN 1454-864X
59. Manakov, Yu. M., „*Perturbing effect of terrestrial thermal radiation pressure on an artificial Earth satellite Geodesy*”, Mapping and Photogrammetry 1977
60. Mathuna D., „*Integrable systems in celestial mechanics*”, Springer, SUA, 2008
61. McFadden L.A., Weissman P.R., Johnson T.V., „*Encyclopedia of the Solar System*”, Academic Press, 2007
62. Milani, A., and all, „*Non-gravitational perturbations and satellite geodesy*”, Dipartimento di Matematica, Universita di Pisa, Adam Hilger, Bristol, 1987
63. Milone E., Wilson W., „*Solar system astrophysics*”, Springer, New York, 2008
64. Mioc, V., Radu, E., „*Aerodynamic Drag Perturbations in Artificial Satellite Nodal Period*”, Astron.Nachr., 5, p.327-334, 1991
65. Mioc, V., Radu, E., „*A complete first-order approximation for the motion in a noncentral attraction field*”, Rev. d'Analyse Num.et de Theorie de l'Approx., 1993
66. Mioc, V., Stoica, C., „*The Schwarzschild problem in astrophysics*”, 1997
67. Mioc, V., „*Teza de doctorat*”, Universitatea Babeș Boliay, Cluj-Napoca 1980
68. Moore P., „*The data book of astronomy*”, Institute of Physics, SUA, 2000
69. Mueller, I., „*Spherical and Practical Astronomy*”, Frederick Ungar Publ. Co., New York 1969
70. Munyamba, N. „*Derivation of a Solar Radiation Pressure Model of the latest GLONASS Spacecraft*”, 2010
71. Murray C., *Solar system dynamics*, 1999
72. Nakiboglu, S.M., Krakiwski, E.J., Schwary. K.P., Buffet, B., Wanless, B., „*a multi-station, multi-pass approach to Global Positioning System improvement and precise positioning*”, Geodesy Survey of Canada, Rep. 85-003, Ottawa 1985
73. Pal, A., Ureche, V., „*Astronomie*”, Ed.Didactică și Pedagogică, București 1983
74. Rodrigues-Solano, C. Master Thesis: „*Impact of albedo modelling on GPS orbits*”, 2009
75. Rodrigues-Solano, C. Et al. „*Estimating on-orbit optical properties for GNSS satellites*”, Bremen 2010
76. Seeber, G., „*Satellite Geodesy - Foundations, Methods and Applications*”, Berlin, 1993
77. Sehnal, L., „*Effects of the terrestrial infrared radiation pressure on the motion of an artificial satellite*”, Celestial Mech. 1981
78. Sehnal, L., „*The Theory of Orbits in the Solar System and in Stellar Systems*”, IAU Symposium, Thessaloniki, Academic Press 1964
79. Syma A., Thesis: „*Thermal Re-Radiation Modelling for the Precise Prediction and Determination of Spacecraft Orbits*”, 2005
80. Smith, D. E., „*Earth-reflected radiation pressure in Dynamics of Satellites*”, ed. B Morando (Berlin: Springer) 1970

81. Su, H., "Precise orbit determination of global navigation satellite system of second generation", Germania, 2000
82. Tataru N., Lupu S. „The optimization of the calculus of the distances on the electronic charts", Buletinul Institutului Politehnic Iași, Tomul LII (LVI), Fasc. 5, 2006
83. Tscherning, C.C., Sanso, M., „Prediction of spherical harmonic coefficients using Least-Squares Collocation", Copenhagen, Danemarca, 2000
84. Vascoviak, S.N., 'Funcția Teni b Zadace o Vlianii Svetogo Davlenia na Dviscenie', V.M.U., Ser. fiz.-astr., 5, p.584, 1974.
85. Zierbart M., Thesis: "Hight Precision Analitical Solar Radiation Pressure Modelling for GNSS Spacecraft", 2001
86. Xu G., „GPS Theory, Algorithms and applications", Springer, Germania, 2007
87. Xu G., „Orbits", Springer, Germania, 2008
88. Wolf, R., "Satellite orbit and ephemeris determination using inter satellite link", Germania, 2000
89. <ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/>
90. <http://www.bsu.edu>
91. http://ceres-tool.larc.nasa.gov/org_tool/srbavg
92. <http://www.esa.int>
93. <http://www.hyperphysics.phy-astr.gsu.edu>
94. <http://www.icgem.gfz-postdam.de>
95. <http://www.iers.org>
96. <http://igs.org/igscb/product/1780/>
97. [http:// www.imcce.fr/en/ephemerides/formulaire](http://www.imcce.fr/en/ephemerides/formulaire)
98. <http://www.nasa.gov>
99. <http://www.scienceworld.wolfram.com>
100. <http://www.spaceandtech.com>
101. *** *IERS Annual Report 2001*", International Earth Rotation Service, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main 2002
102. GRANT - „Studiul erorilor orbitale ale sateliților de poziționare GPS" poz. 80 din Planul Sectorial de Cercetare Dezvoltare al Ministerului Apărării Naționale pe anul 2009