

**ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ
“SIMION STOILOW”**

Sergiu LUPU

TEZĂ DE DOCTORAT

Conducător științific:
C.S. I dr. Gabriela MARINOSCHI

**BUCUREȘTI
2014**

ACADEMIA ROMÂNĂ
INSTITUTUL DE MATEMATICĂ
“SIMION STOILOW”

**CONTRIBUȚII LA STUDIUL ERORILOR
ORBITALE ALE SATELIȚILOR GPS
DATORATE PERTURBAȚIILOR
NEGRAVITAȚIONALE**

TEZĂ DE DOCTORAT

Sergiu LUPU

Conducător științific:
C.S. I dr. Gabriela MARINOSCHI

BUCUREȘTI
2014

CUPRINS

Capitolul I	5
SISTEMUL GLOBAL DE POZIȚIONARE NAVSTAR/GPS	
1.1 Structura sistemului de poziționare globală	6
1.1.1 Segmentul spațial	6
1.1.2 Segmentul terestru de control și urmărire	13
1.1.3 Segmentul utilizatorilor	15
1.2 Aplicațiile tehnologiei GPS	15
1.3 Sisteme de referință și scări de timp	17
1.3.1 Sistemul convențional inerțial (SCI)	18
1.3.2 Sistemul convențional terestru (SCT)	19
1.4 Sisteme de referință pentru timp	24
1.5 Efemerida sateliților GPS	25
Capitolul II	30
ANALIZA CANTITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS	
2.1 Ecuatiile mișcării neperturbate	30
2.2 Ecuatiile mișcării perturbate	30
2.3 Funcții de forță perturbatoare	34
2.3.1 Perturbații de tip gravitațional	36
2.3.2 Perturbații de tip negravitațional	42
Capitolul III	46
PERTURBAȚII DE TIP NEGRAVITAȚIONAL	
3.1 Efectul direct al presiunii radiației solare	46
Interacțiunea satelit-radiația solară	
3.1.1 Efectele pe termen lung asupra semiaxei mari	47
3.1.2 Efectele pe termen lung asupra altor elemente orbitale	53
3.1.3 Efectele pe termen scurt	58
3.2 Efectele indirecte ale presiunii radiației solare	60
3.2.1 Presiunea radiației reflectată de Pământ	60
3.2.2 Emisia termică anizotropă	66
3.2.3 Undele radio	69
3.2.4 Eclipsele	70
3.3 Efectul Poynting - Robertson	71
3.4 Perturbații cauzate de frânarea aerodinamică	72
3.5 Modele empirice ale presiunii radiației solare pentru sateliții GPS	73
3.5.1 Noțiuni introductive	73
3.5.2 Selectarea orbitelor adevărate	73
3.5.3 Parametrizarea modelului și combinarea soluțiilor	74
3.5.4 Caracterizarea parametrilor modelului	75
Capitolul IV	
REZULTATE NUMERICE DIN ANALIZA CANTITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS	77
CALCULUL ORBITEI SATELIȚILOR GPS	77
4.1 Soluția analitică	77
4.2 Soluția numerică	78

4.3 Metoda Runge-Kutta	80
4.4 Rezultate numerice	82
4.5 Efectele produse de perturbațiile gravitaționale	84
4.6 Efectele produse de perturbațiile negravitaționale	93
4.6.1 Presiunea de radiație solară directă	93
4.6.2 Presiunea de radiație solară indirectă. Radiația Pământului	97
Radiația reflectată	98
Radiația emisă	101
Modelul de radiație al Pământului	102
Modelul albedoului în funcție de latitudine	103
Modelul de accelerație exercitat asupra sateliților GPS	105
Modelul general al presiunii radiației solare emisă de Pământ	106
4.6.3 Emisia termică anizotropă	118
4.6.4 Accelerația produsă de emisia antenelor	120
4.6.5 Eclipsele	123
Modelarea regiunii de eclipsă	123
Modelarea regiunii de penumbră	128
4.6.6 Efectul Poynting-Robertson	129
Capitolul V	
ANALIZA CALITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS	134
5.1 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub influența armonice a doua zonale	136
5.1.1 Ecuatiile mișcării pentru analiza calitativă	136
5.1.2 Transformările McGehee	138
5.1.3 Varietatea coliziunii	139
5.1.4 Portretul de fază	141
5.2 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub diverse influențe, nu neapărat gravitaționale	146
5.2.1 Ecuatiile mișcării pentru analiza calitativă	146
5.2.2 Portretul de fază	147
5.3 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub influența armonicelor zonale de ordin superior	150
5.3.1 Ecuatiile mișcării pentru analiza calitativă	150
5.3.2 Transformările McGehee	151
5.3.3 Varietatea coliziunii	152
5.3.4 Portretul de fază	152
5.4 Analiza calitativă a mișcării satelitului GPS sub influența cumulată a armonicelor zonale de ordin superior și a altor factori	161
5.5 Aplicație practică. Satelitul GPS	161
5.6 Concluzii ale analizei calitative	163
Capitolul VI	
CONCLUZII	164
ANEXE	167
BIBLIOGRAFIE	175

INTRODUCERE

Încă de la începuturile istoriei, omul și-a ridicat privirea spre cer, bolta cerească reprezentând o sursă inepuizabilă de întrebări, mituri și legende. Personificarea naturii și a fenomenelor naturale era prima încercare timidă a omului primitiv de a-și explica lumea aparent fără sens pe care o observa.

Popoarele din antichitate au studiat cerul pentru a înțelege formarea zilei și a nopții, mișcările Soarelui și a Lunii precum și implicațiile acestora în măsurarea timpului și succesiunea anotimpurilor. Acestea au realizat că ziua nu are aceeași lungime pe toată perioada anului și au grupat stelele în formațiuni numite constelații. Mărturii ale interesului acordat fenomenelor astronomice se regăsesc pe întreg cuprinsul Pământului.

Grecii au fost cei care au sintetizat numeroasele religii și mitologii, elaborând o legătură solidă între cele șapte planete vizibile și marii zei ai Olimpului. Filosofii și învățații greci, ca Pitagora, Platon și Ptolomeu au distilat și simplificat cosmologiile babiloniene, caldeene, indiene și egiptene.

Astronomia este una dintre cele mai vechi științe datând din perioada Greciei Antice și reprezintă știința „care se ocupă cu studiul astrilor și a legilor mișcării lor, al constelațiilor, galaxiilor și al universului în totalitatea sa”.

Cel mai important astronom al antichității a fost Ptolomeu. Modelul său referitor la orbitele planetelor în jurul Pământului a fost valabil încă o sută de ani după Nicolaus Copernic.

Filosofii medievali credeau că trupul și sufletul omului, făcute după chipul lui Dumnezeu, constituiau o imagine la scară mică a cosmosului. Ei au exprimat această credință în sintagma: „Cum sunt cele de sus, așa sunt și cele de jos”. Ei credeau că dacă omul își dedica toate energiile unui studiu profund asupra propriei naturi, va ajunge într-un final la o înțelegere deplină a universului. Transformările dintr-unul ar fi reflectate de prefacerile din celălalt. Pentru gândirea medievală, părea logic ca mișcarea planetelor să se oglindească în activitățile omenești.

Până acum 500 de ani, lumea credea că Pământul este centrul universului, motivul fiind destul de evident: Luna orbita în jurul Pământului și nu există nicio dovadă că Soarele nu făcea același lucru. Și planetele puteau fi văzute rotindu-se în jurul Pământului, deși uneori păreau să se întoarcă din drumul lor pentru mai multe săptămâni, dacă nu chiar luni.

Nicolaus Copernic a fost cel care a propus modelul heliocentric, ce pune Soarele în centrul sistemului solar. A trebuit să treacă un secol pentru a fi demonstrate calculele matematice ale teoriei sale.

Astronomul german Johannes Kepler (1571-1630) a dovedit în cele din urmă teoria lui Copernic, marcând despărțirea perspectivei astrologice, umaniste și mistice, de cea obiectivă, mecanică, a spiritului științific. Perfecționarea telescopului de refracție de către Galileo Galilei (1564-1642) și elaborarea teoriilor de bază ale gravitației și mecanicii de către Isaac Newton (1642-1727) au accentuat și mai mult această diferență.

Legile lui Kepler sunt o consecință naturală a forței de atracție gravitațională, iar mișcarea rezultantă este o secțiune conică. Deși Newton se sprijină pe umerii unor giganti: Copernicus, Kepler, Galileo (Murray și Dermott, 1999), descoperirile sale au revoluționat știința

în general și mecanica cerească, în particular, iar la peste 4 secole de la descoperirea legilor care îi poartă numele, chiar și în cele mai noi domenii ale științei, aceste legi își găsesc utilitatea.

Un alt moment crucial în evoluția astronomiei îl reprezintă descoperirea „în vârful creionului” a planetei Neptun (1846) și a lui Pluton (1930), care în prezent nu mai este catalogată ca planetă. Prin compararea pozițiilor calculate ale planetelor cu cele observate s-a constatat că există o deviere de la mișcarea kepleriană, care nu poate fi explicată decât prin existența unui alt corp ceresc în vecinătate.

Din secolul al XIX-lea și până în prezent o mulțime de astronomi și matematicieni și-au adus contribuția la evoluția și dezvoltarea astronomiei.

Primii navigatori nu scăpau din vedere uscatul. Se foloseau navigatori care cunoșteau foarte bine regiunea, care se bazau pe multele treceri anterioare prin același loc: recunoașterea de stânci, sondaje cu pietre legate de frânghii pentru a ocoli adâncimile prea mici la apropierea uscatului, urmărirea direcției de mișcare a norilor, recunoașterea curenților marini, folosirea vânturilor atât pentru mers cât și pentru recunoașterea regiunii unde acestea acționează. Când țărâmul nu se mai vedea orientarea se realiza după Soare ziua și după stele noaptea.

Filozoful Tales din Milet povestea că navigatorii ionieni erau învățați să recunoască constelația Carul Mic încă la 600 de ani î.Hr.

Cristofor Columb a traversat Atlanticul folosind observații astronomice și a fost divinizat de băștinașii din golful Santa Gloria din Jamaica după ce a prevestit eclipsa de lună din 29 februarie 1504.

În navigația astronomică, reperele de navigație sunt astrii (Soarele, Luna, planetele, stelele), vizibile și identificabile pe cer, care constituie o infrastructură naturală.

Efemeridele reprezintă coordonatele exacte ale unui corp ceresc natural sau artificial și descriu locația acestuia într-un sistem de referință geocentric.

Reperetele de navigație astronomice sunt localizate pentru ora observației folosind efemeridele (suport de hârtie sau electronic) acestora. Măsurătorile la astri se realizează cu un sextant sau un teodolit.

Lansarea primului satelit artificial (Sputnik) pe 4 octombrie 1957 de către Rusia (URSS la acea vreme) a avut o mare însemnătate științifică, fiind deschizătorul de drumuri pentru multitudinea de misiuni spațiale realizate până în prezent.

În anul 1973, Departamentul Apărării al Statelor Unite a dorit crearea unui sistem spațial de poziționare, sub denumirea de NAVSTAR/GPS (NAVigation System with Timing And Ranging / Global Positioning System).

Primele obiective care vizau sistemul erau de natură militară. Ulterior însă, Congresul SUA a impus promovarea facilităților “civile” ale sistemului. Procesul a fost accelerat de lansarea pe piață a primului receptor GPS, numit “Macrometer”, utilizat pentru determinări geodezice.

Navigația satelitară folosește același principiu ca și navigația astronomică pentru determinarea poziției terestre a observatorului. Pentru determinarea precisă a poziției navei cu ajutorul sistemului satelitar de navigație sunt necesare măsurarea a patru pseudodistanțe la tot atâtea sateliți.

Pentru o precizie cât mai bună a poziției observatorului este necesară cunoașterea cât mai riguros posibil a poziției satelitului artificial. Asupra acestuia acționează o serie de perturbații care în funcție de natura lor se clasifică în perturbații de tip gravitațional și non-gravitațional.

Modelarea cât mai exactă a ecuațiilor acestor perturbații conduce în final la o determinare mai precisă a poziției observatorului.

Lucrarea de față, care se încadrează în tematica de cercetare a Institutului Astronomic al Academiei Române, își propune să abordeze și să cerceteze următoarele probleme legate de mișcarea sateliților GPS:

- elaborarea unor modele ale accelerațiilor perturbatoare care influențează mișcarea sateliților GPS, determinarea ordinului de mărime și stabilirea unui criteriu de includere a acestora în modelul dinamic;
- studiul metodei analitice de calcul al influenței accelerațiilor perturbatoare de tip gravitațional și negravitațional în elementele osculatoare ale sateliților GPS;
- studiul, prin intermediul unei aplicații numerice, al erorilor orbitale ale sateliților GPS, produse de accelerațiile perturbatoare de tip gravitațional și negravitațional, cu accent pe accelerațiile de tip negravitațional;
- studiul calitativ al mișcării sateliților GPS.

Lucrarea este structurată pe 6 capitole astfel:

Capitolul I prezintă sistemul satelitar NAVSTAR/GPS, identificarea aplicațiilor tehnologiei GPS, sisteme de referință și scări de timp necesare studiului forțelor perturbatoare care acționează asupra sateliților GPS.

Capitolul II prezintă analiza cantitativă a mișcării sateliților GPS sub influența perturbațiilor de tip gravitațional și negravitațional.

Capitolul III conține analiza cantitativă a perturbațiilor de tip negravitațional: presiunea radiației solare directe, presiunea de radiație solară indirectă, emisia termică anizotropă, emisia antenei și modelele empirice ale presiunii radiației solare.

Capitolul IV prezintă metoda originală abordată de autor utilizând algoritmul de integrare Runge – Kutta de ordinul 4, pentru determinarea accelerațiilor perturbatoare de tip gravitațional care acționează asupra sateliților GPS și efectele produse în elementele orbitale ale sateliților de perturbațiile de tip negravitațional.

Capitolul V este un studiu calitativ sau geometric al mișcării sateliților GPS. Aceasta este o abordare nouă, prin care se aplică metoda geometrică de analiză a sistemelor dinamice al cărei inițiator este Poincare, pentru studiul mișcării sateliților GPS. Analiza nu se rezumă numai la sateliții GPS, ci se iau în considerare o multitudine de cazuri, rezultând în final o analiză complexă a mișcării sateliților.

Capitolul VI conține o trecere în revistă succintă a datelor și concluziilor mai importante prezentate în capitolele precedente, punând în evidență principalele rezultate obținute de autor.

MULTUMIRI

În primul rând vreau să îi aduc un omagiu regretatului **C.S.I dr. Vasile Mioc**, conducătorul științific inițial al tezei și să-i mulțumesc pentru accesul deschis în lumea fascinantă a mecanicii cerești teoretice și practice, pentru modul în care a combinat exigența și colaborarea spre a se ajunge la această teză.

Adresez mulțumiri doamnei C.S.I. dr. Gabriela Marinoschi pentru că a acceptat să mă îndrume oferindu-mi sprijinul său pentru finalizarea tezei de doctorat.

Mulțumesc domnilor Prof.univ.dr. Crăciun Marius și C.S.I. dr. Mirel Bîrlan pentru susținerea morală, ajutorul neprecupețit oferit și deosebita colaborare profesională în îmbunătățirea tezei de doctorat.

De asemenea, mulțumesc doamnei dr. Nedelia Popescu, director adjunct al Institutului Astronomic, pentru ajutorul acordat pe toata durata stagiului de doctorat. Mulțumiri doamnei C.S.I dr. Magda Stavinschi, domnului C.S. I dr. Petre Popescu, domnului C.S.I dr. Marian Doru Șuran, Director al Institutului Astronomic și domnului C.S.I dr. Dumitrescu Alexandru pentru sfaturile date în vederea obținerii unei cât mai bune forme a tezei.

Autorul mulțumește tuturor cercetătorilor Institutului Astronomic care i-au înlesnit munca de doctorand.

Mulțumesc călduros bunului meu prieten dr. Drăgușan Adrian și domnului conf. univ. dr. Stelian Cojocar, doctori ai regretatului C.S.I.dr. Vasile Mioc pentru sprijinul acordat, încurajările și observațiile constructive.

Nu în ultimul rând, adresez sincere mulțumiri familiei pentru înțelegerea, răbdarea și sprijinul de care au dat dovadă pe tot parcursul pregătirii de doctorat.

De asemenea, mulțumiri sunt adresate tuturor celor care, într-un fel sau altul, au contribuit la finalizarea acestei teze.

CAPITOLUL I. SISTEMUL GLOBAL DE POZIȚIONARE NAVSTAR/GPS

În anul 1973, Departamentul Apărării al Statelor Unite a dorit crearea unui sistem spațial de poziționare. Cu crearea, dezvoltarea, testarea și perfecționarea sistemului a fost însărcinat Joint Program Office (JPO) situat la baza aeriană americană Los Angeles (U.S. Air Force Systems Command's Space Division).

Sistemul Global de Poziționare NAVSTAR/GPS (NAVigation System with Timing And Ranging / Global Positioning System) aflat în responsabilitatea Joint Program Office (JPO) a fost conceput în vederea:

- 1° **determinării pozițiilor** necunoscute ale diverselor puncte situate pe suprafața Pământului, pe mare ori în spațiu, din poziții cunoscute ale sateliților. Practic, semnalul emis de sateliți este marcat continuu pe scara proprie de timp a sistemului, (momentul emisiei este parte a acestui semnal), astfel că orice receptor GPS sincronizat cu această scară de timp poate măsura simultan, cu erori specifice, distanțe unghiulare la sateliții situați deasupra orizontului;
- 2° **navigației** vehiculelor terestre, maritime sau spațiale purtătoare de receptoare GPS;

Sistemul GPS este un sistem radioelectronic de poziționare cu sateliți, capabil să furnizeze pentru orice punct situat pe suprafața terestră, pe mare ori în spațiu, poziția, viteza și timpul într-un sistem de referință spațiu-timp unic, indiferent de condițiile meteorologice.

Primele obiective care vizau sistemul erau de natură militară. Ulterior însă, Congresul SUA a impus promovarea facilităților “civile” ale sistemului. Procesul a fost accelerat de lansarea pe piață a primului receptor GPS, numit “Macrometer”, utilizat pentru determinări geodezice. Ulterior, gama receptoarelor GPS s-a diversificat prin comercializarea receptoarelor de navigație.

Determinarea distanței receptor - satelit se realizează în receptor prin procesarea semnalului emis continuu de sateliții GPS. Această distanță, numită în literatura de specialitate “pseudo-distanță” datorită erorilor specifice, se poate deduce atât din:

- 1) durata traiectului satelit - receptor al semnalului (codificat) emis de satelit, multiplicată cu viteza luminii;
- 2) analiza fazei semnalului. Deoarece în determinarea pseudo-distanței intervine eroarea de nesincronizare a ceasurilor receptorului și satelitului (în timp ce eroarea de refracție se elimină aproape complet prin metoda frecvențelor duale sau prin aplicarea unui model de refracție), în ecuațiile de observare intervine ca necunoscută corecția ceasului receptorului. Pentru determinarea celor 3 coordonate ale unui punct oarecare (φ , λ , h) sau (x , y , z) vor fi necesare 4 observații simultane la tot atâția sateliți GPS (fig.1.1), rezultând un sistem de 4 ecuații cu 4 necunoscute, cea de-a 4-a necunoscută fiind, așa cum s-a precizat, corecția ceasului.

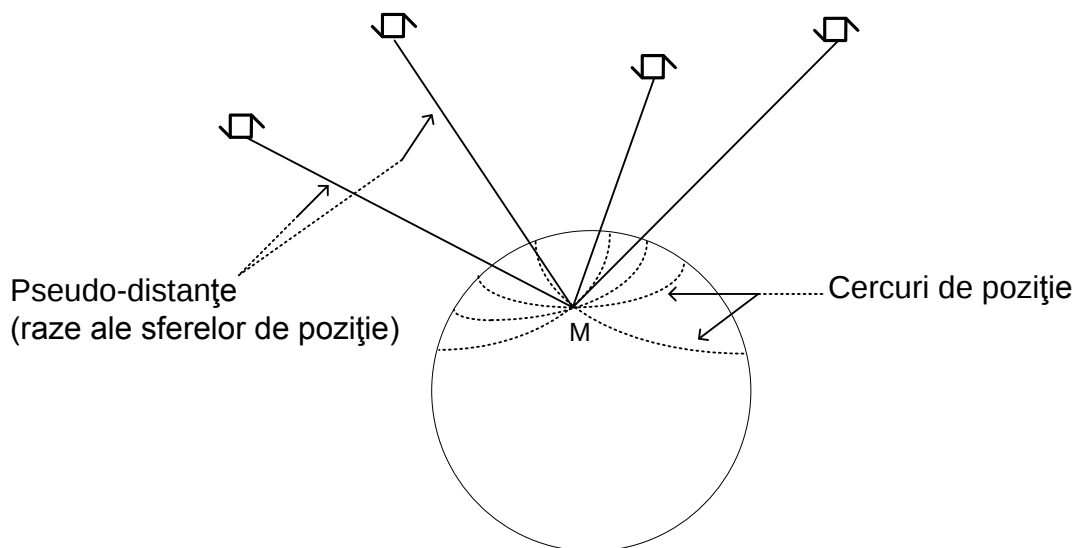


Fig. 1.1 Principiul poziționării GPS

1.1 STRUCTURA SISTEMULUI DE POZIȚIONARE GLOBALĂ

Baza sistemului GPS o constituie trei segmente, al căror rol este de a oferi continuu un serviciu de navigație și poziționare de încredere pentru utilizatorii acestui sistem. Aceste segmente sunt cunoscute sub numele de: **segmentul spațial**, **segmentul terestru de control și urmărire** și **segmentul utilizatorilor**.

1.1.1 Segmentul spațial

În configurație standard, constelația GPS cuprinde 24 de sateliți, care satisfac necesitatea fundamentală de acoperire globală. Schema corespunzătoare prevede dispunerea sateliților pe orbite cvasi-circulare, la o altitudine de 20200 km și cu o perioadă orbitală de aproximativ 12 ore siderale.

Constelația GPS prevăzută inițial cuprindea 21 sateliți activi plus 3 de rezervă, plasați în 3 plane orbitale înclinate la 63° (aproximativ înclinarea critică) față de planul ecuatorului, cu orbite cvasicirculare ($e = 0.003$), la altitudinea medie de 20186 km și cu un decalaj de 120° în ascensia dreaptă a nodului ascendent. Ulterior, din motive bugetare, segmentul spațial a fost redus la 18+3 sateliți dispuși pe 6 plane orbitale, dar și acest plan a fost abandonat urmare a neacoperirii globale a acestei scheme. În iunie 1986 s-a convenit asupra segmentului standard final, care trebuie să cuprindă 21 sateliți, plasați pe 6 orbite cvasicirculare ($e = 0.003$), decalate cu 60° în ascensia dreaptă a nodului ascendent și cu o înclinare de 55° față de planul ecuatorului. Sateliții de rezervă utilizați în diverse etape sunt sateliții care nu emit mesaje utile, dar care sunt activați de la sol în vederea înlocuirii celor cu eventuale defecțiuni.

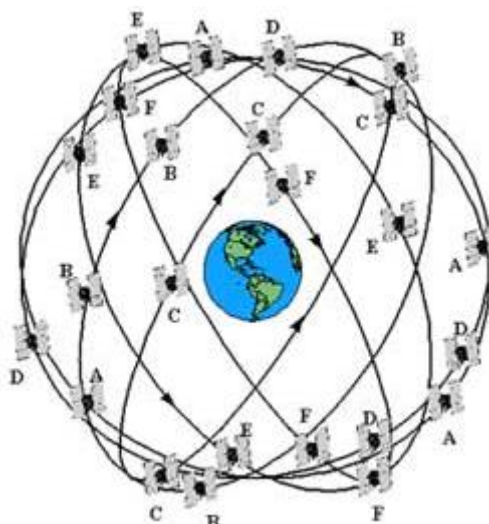


Fig. 1.2 Constelația satelitară

SATELITII GPS sunt vehiculele spațiale purtătoare ale aparaturii radioelectronice de procesare și emisie a semnalului purtător de informații către utilizatorii tereștri, a ceasului atomic, a bateriilor și a echipamentului auxiliar. Echipamentul de bord permite fiecărui satelit emisia unui semnal modulat cu informațiile necesare utilizatorilor tereștri pentru poziționare, precum și recepția periodică a unor mesaje provenite de la sol, conținând corecții ale elementelor orbitale, necesare determinării precise ale pozițiilor ulterioare pe orbită. Echipamentul auxiliar conține, printre altele, două panouri solare și un sistem de propulsie radio-comandat de la sol, ce permite ajustarea periodică a orbitei afectate de perturbații. Se cunosc următoarele clase de sateliți GPS:

Block I.

Este prima categorie de sateliți utilizați în perioada 1978 - 1985. Aceștia au fost lansați de la baza aeriană americană Vandenberg, California, cu rachete Atlas F. Sateliții cântăresc 845 kg, și, cu excepția unui singur eșec (în 1981), toate cele 11 plasări pe orbite au reușit. Dispunerea acestor sateliți pe 3 plane orbitale înclinate cu 63° față de planul ecuatorului nu a realizat acoperirea globală dorită, dar a corespuns necesităților din faza de testare a sistemului.

Trebuie remarcat faptul că, ambele frecvențe purtătoare ale mesajului emis de sateliți erau necodificate, deci accesibile oricărui utilizator civil sau militar. Durata de viață proiectată a acestora era de doar 4 ani și jumătate.

Tabelul 1.1 Sateliții GPS Block I

<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb1.txt>

Numărul curent	Numărul SVN	Numărul PRN	Data lansării
1.	01	04	22 FEB 78
2.	02	07	13 MAY 78
3.	03	06	06 OCT 78
4.	04	08	10 DEC 78
5.	05	05	09 FEB 80
6.	06	09	26 APR 80
7.	07	Lansare fără succes	
8.	08	11	14 JUL 83
9.	09	13	13 JUN 84
10.	10	12	08 SEP 84
11.	11	03	09 OCT 85

Block II.

S-a construit un număr de 28 de sateliți din această clasă, iar fiecare satelit cântărește 1500 kg și costă în medie 50 milioane \$. Primul satelit Block II a fost lansat la 14 februarie 1989 de la Cape Canaveral, cu o rachetă Delta II. Durata medie de viață proiectată a sateliților este de 6 ani, dar se așteaptă ca aceștia să se mențină în stare de funcționare până la 10 ani (funcție de calitățile acumulatorilor). Diferența majoră dintre sateliții GPS Block I și Block II este aceea că ambele frecvențe purtătoare ale mesajului emis de sateliții Block II sunt modulate cu un cod pseudo - aleator, numit cod P, ceea ce face imposibil accesul utilizatorilor civili la ambele frecvențe purtătoare ale mesajului emis de sateliți.

Tabelul 1.2 Sateliții GPS Block II
<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>

Numărul curent	Numărul SVN	Data lansării
1.	14	14 FEB 1989
2.	13	10 JUN 1989
3.	16	18 AUG 1989
4.	19	21 OCT 1989
5.	17	11 DEC 1989
6.	18	24 JAN 1990
7.	20	26 MAR 1990
8.	21	02 AUG 1990
9.	15	01 OCT 1990

Block IIA. (Advanced)

Această clasă de sateliți GPS au o autonomie de 180 ore (interval în care sateliții sunt capabili să transmită mesaje de navigație fără a avea contact cu segmentul de control). S-au construit un număr de 18 sateliți din această clasă. Aceștia sunt echipați cu două ceasuri atomice cu rubidiu și două cu cesiu. Primul satelit a fost lansat la data de 26 noiembrie 1990 iar ultimul la data de 12 septembrie 1996. Pe data 29 aprilie 2008, 6 sateliți au fost scoși din uz. Sateliți (35 și 36) sunt echipați cu laseri retro-reflectorii.

Tabelul 1.3 Sateliții GPS Block IIA
<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>

Numărul curent	Numărul PRN	Numărul SVN	Data lansării	Tipul ceasului	Poziția pe orbită
1.	32	23	26 NOV 1990	Rb	E5
2.		24	04 JUL 1991	Cs	
3.		25	23 FEB 1992	Rb	
4.		28	10 APR 1992		
5.	26	26	07 JUL 1992	Rb	F2F
6.		27	09 SEP 1992	Cs	
7.		32	22 NOV 1992		
8.		29	18 DEC 1992		
9.		22	03 FEB 1993		
10.		31	30 MAR 1993		
11.		37	13 MAY 1993		
12.	09	39	26 JUN 1993	Cs	A5
13.		35	30 AUG 1993	Rb	
14.	04	34	26 OCT 1993	Rb	D4
15.		36	10 MAR 1994	Rb	
16.	03	33	28 MAR 1996	Cs	C5
17.	10	40	16 JUL 1996	Cs	E3
18.		30	12 SEP 1996	Cs	
19.	08	38	06 NOV 1997	Cs	A2

Block IIR. (Replenishment)

Sunt sateliții ce au înlocui generația de sateliți GPS din clasa Block II. Primul satelit Block IIR a fost lansat în 23 iulie 1997. Sateliții din generația Block IIR asigură facilitatea de măsurare a distanței satelit – satelit prin tehnica SSR (satellite - to - satellite ranging) cu efect direct în optimizarea determinării precise a orbitelor sateliților. Această clasă de sateliți GPS este superioară tehnologic clasei Block II, prin introducerea a doi maseri cu hidrogen în locul ceasurilor atomice cu rubidiu 133, precum și prin introducerea posibilității de comunicație inter-satelitară, cu efect direct în optimizarea determinării precise a orbitelor sateliților. Acești sateliți cântăresc 2000 kg, iar prețul de fabricație este redus la jumătatea celui al sateliților Block II.

Tabelul 1.4 Sateliții GPS Block IIR
<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>

Numărul curent	Numărul PRN	Numărul SVN	Data lansării	Tipul ceasului	Poziția pe orbită
1.		42	17 JAN 1997	Lansare fără succes	
2.	13	43	23 JUL 1997	Rb	F3
3.	11	46	07 OCT 1999	Rb	D5
4.	20	51	11 MAY 2000	Rb	E1
5.	28	44	16 JUL 2000	Rb	B3
6.	14	41	10 NOV 2000	Rb	F1
7.	18	54	30 JAN 2001	Rb	E4
8.	16	56	29 JAN 2003	Rb	B1
9.	21	45	31 MAR 2003	Rb	D3
10.	22	47	21 DEC 2003	Rb	E2
11.	19	59	20 MAR 2004	Rb	C3
12.	23	60	23 JUN 2004	Rb	F4
13.	02	61	06 NOV 2004	Rb	D1

Block IIR-M. (Modernize)

S-a preconizat lansarea a unui număr de 8 sateliți din această clasă. Primul a fost lansat pe 26 septembrie 2005, iar ultimul pe 17 august 2009. Această variantă îmbunătățită include un nou semnal militar (codul M) modulat pe ambele purtătoare (L1 și L2) și un semnal mai robust civil pe L2 (cunoscut ca L2C).

Tabelul 1.5 Sateliții GPS Block IIR-M
<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>

Numărul curent	Numărul PRN	Numărul SVN	Data lansării	Tipul ceasului	Poziția pe orbită
1.	17	53	26 SEP 2005	Rb	C4
2.	31	52	25 SEP 2006	Rb	A2
3.	12	58	17 NOV 2006	Rb	B4
4.	15	55	17 OCT 2007	Rb	F2A
5.	29	57	20 DEC 2007	Rb	C1
6.	07	48	15 MAR 2008	Rb	A4
7.	06	49	24 MAR 2009	Rb	C6
8.	05	50	17 AUG 2009	Rb	E3

Block IIF. (Follow on)

Compania Boeing anunța pe 12 septembrie 2007 realizarea primului satelit din această serie. Sunt contractați lansarea a 12 sateliți. Primul a fost lansat pe 28 mai 2010 cu ajutorul

unei rachete Delta IV, iar cel mai recent la 1 februarie 2014. Sateliții au o greutate de 1,630 kilograme și o durată de viață de 12 ani.

Tabelul 1.6 sateliții GPS Block IIF
<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>

Numărul curent	Numărul PRN	Numărul SVN	Data lansării	Tipul ceasului	Poziția Pe orbită
1.	25	62	28 MAY 2010	Rb	B2
2.	01	63	16 JUL 2011	Rb	D2
3.	24	65	04 OCT 2012	Cs	A1
4.	27	66	15 MAY 2013	Rb	C2
5.	30	64	21 FEB 2014		A3

Block III (IIIA).

Vor fi sateliții preconizați a fi gata de lansare în 2014. Această generație de sateliți va transmite un nou semnal civil L1C desemnat să conlucreze cu sistemul GALILEO iar pe segmental militar va oferi o mai mare securitate cu ajutorul codului M.

Tabelul 1.7 Constelația GPS la data de 03 martie 2014
<ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/gpsb2.txt>

Numărul curent	Tipul satelitului	Numărul PRN	Data lansării	Tipul ceasului	Poziția pe orbită
1.	IIA-10	32	26 NOV 1990	Rb	E5
2.	IIA-14	26	07 JUL 1992	Rb	F2F
3.	IIA-21	09	26 JUN 1993	Cs	A5
4.	IIA-23	04	26 OCT 1993	Rb	D4
5.	IIA-25	03	28 MAR 1996	Cs	C5
6.	IIA-26	10	16 JUL 1996	Cs	E3
7.	IIA-28	08	06 NOV 1997	Cs	A2
8.	IIR-2	13	23 JUL 1997	Rb	F3
9.	IIR-3	11	07 OCT 1999	Rb	D5
10.	IIR-4	20	11 MAY 2000	Rb	E1
11.	IIR-5	28	16 JUL 2000	Rb	B3
12.	IIR-6	14	10 NOV 2000	Rb	F1
13.	IIR-7	18	30 JAN 2001	Rb	E4
14.	IIR-8	16	29 JAN 2003	Rb	B1
15.	IIR-9	21	31 MAR 2003	Rb	D3
16.	IIR-10	22	21 DEC 2003	Rb	E2
17.	IIR-11	19	20 MAR 2004	Rb	C3
18.	IIR-12	23	23 JUN 2004	Rb	F4
19.	IIR-13	02	06 NOV 2004	Rb	D1
20.	IIR-14M	17	26 SEP 2005	Rb	C4
21.	IIR-15M	31	25 SEP 2006	Rb	A2
22.	IIR-16M	12	17 NOV 2006	Rb	B4
23.	IIR-17M	15	17 OCT 2007	Rb	F2A
24.	IIR-18M	29	20 DEC 2007	Rb	C1
25.	IIR-19M	07	15 MAR 2008	Rb	A4
26.	IIR-20M	06	24 MAR 2009	Rb	C6
27.	IIR-21M	05	17 AUG 2009	Rb	E3
28.	IIF-1	25	28 MAY 2010	Rb	B2
29.	IIF-2	01	16 JUL 2011	Rb	D2
30.	IIF-3	24	04 OCT 2012	Cs	A1
31.	IIF-4	27	15 MAY 2013	Rb	C2
32.	IIF-5	30	1 FEB 2014		A3

Cele 6 plane orbitale sunt numerotate de la A la F, iar numerele PRN (pseudo-range number) – reprezintă numărul de identificare al fiecărui satelit.

După cum se poate vedea, în constelația actuală nu mai este activ niciun satelit din clasa Block I sau Block II.

Dezvoltarea sistemului a cunoscut 3 faze importante:

FAZA 1 (decembrie 1973 – iunie 1979), cuprinzând următoarele etape:

- 1° validarea conceptului,
- 2° evaluarea elementelor tehnice,
- 3° definitivarea costurilor,
- 4° conturarea interesului militar.

În acest interval de timp au fost plasați pe orbite 8 sateliți Block I, iar testele și observațiile ulterioare au confirmat așteptările specialiștilor. La data de 14 august 1979, s-a dispus trecerea la faza următoare.

FAZA 2 (august 1979 – decembrie 1988), cuprinzând următoarele etape:

- 1° validarea sistemului,
- 2° dezvoltarea constelației de sateliți GPS,
- 3° dezvoltarea rețelei de stații de urmărire de la sol și perfecționarea

receptoarelor GPS.

Desfășurarea acestei faze era planificată inițial până la finele anului 1985, însă termenul a fost devansat până în 1988 ca urmare a eșuării navetei Challenger.

FAZA 3 (ianuarie 1989 -) reprezintă etapa actuală. Scopul principal al acesteia este implementarea operațională a sistemului cu constelația finală, constând din 21 sateliți + 3 de rezervă din clasa Block II. În această etapă sunt de reținut următoarele date:

- 1989 A fost instalat și activat primul satelit Block II
- 1990 – 1991 Pe perioada desfășurării războiului din Golf a fost dezactivat temporar modul selective availability (SA). În această perioadă au fost folosite receptoare civile ca urmare a numărului limitat de receptoare militare. Pe 01 iulie 1991 SA a fost activată.
- 08.12.1993 A fost anunțată decizia de autorizare liberă a utilizatorilor civili la precizia maximă a sistemului.
- 1994, martie; Ultimul satelit Block II completează constelația satelitară
- 17.07.1995 A fost anunțată operaționalizarea completă a sistemului (Full Operational Capability)
- 01.05.2000 Dezactivarea finală a modului SA având ca efect creșterea preciziei în punct pentru utilizatorii civili de la 100m la 20m.
- 20.03.2004 Lansarea celui de-al 50-lea satelit.
- 25.09.2005 Lansarea primului satelit de tip Block IIR-M, acesta suportând un nou tip de semnal militar cod M și civil L2C.

SEMNALUL SATELIT. Purtătoarea emisă de sateliții GPS este un semnal cu spectru larg, ceea ce reduce considerabil posibilitatea bruiajului. Cheia preciziei poziționării cu sateliți GPS este faptul că semnalele emise de satelit sunt controlate de 4 standarde de timp (în cazul sateliților Block II este vorba de două ceasuri atomice cu rubidiu și două cu cesiu cu o stabilitate a frecvenței de 10^{-13} până la 10^{-14} fracțiuni de secundă pe zi). La sateliții Block IIR, odată cu introducerea maserilor cu hidrogen, stabilitatea a crescut până la 10^{-15} s/zi.

Aceste standarde extrem de stabile produc frecvența fundamentală de 10.23 Mhz (banda L de frecvență). Prin multiplicarea frecvenței fundamentale cu 154 și 120, se obțin două frecvențe purtătoare L_1 și L_2 :

$$L_1 = 1575.42 \text{ MHz}, \quad L_2 = 1227.60 \text{ MHz},$$

esențiale, așa cum s-a precizat, pentru eliminarea celei mai importante surse de erori în măsurarea pseudo-distanței, eroarea datorată refracției ionosferice.

În algoritmul de calcul al pseudo-distanțelor din durata traiectului satelit-receptor (a semnalului emis de satelit), se utilizează două coduri pseudo – aleatoare numite coduri PRN care sunt modulate peste cele două purtătoare ale acestui semnal:

CODUL C/A (Coarse / Acquisition Code), denumit și **SPS** (Standard Positioning Service), este accesibil tuturor utilizatorilor civili și este modulat doar pe purtătoarea L_1 (nefiind astfel posibilă înlăturarea completă a erorii de refracție ionosferică). La receptoarele care nu pot recepționa decât frecvența L_1 (numite și receptoare de navigație), corecția pentru refracția ionosferică se face pe baza unui model de ionosferă, iar abaterile condițiilor reale față de condițiile medii prevăzute de model, se traduc într-o eroare de măsurare a pseudo-distanțelor, deci într-o eroare în poziția calculată. Aceasta este o metodă de interdicere a accesului utilizatorilor non-militari la precizia totală a sistemului GPS.

CODUL P (Precision Code), denumit și **PPS** (Precise Positioning Service) este rezervat utilizatorilor militari americani și a unui număr limitat de alți utilizatori autorizați. Codul P, cu o lungime de undă de doar 30 m, este modulat (spre deosebire de codul C/A) pe ambele purtătoare, L_1 și L_2 . Receptoarele bi-frecvență (numite și receptoare cod-P) pot astfel recepționa ambele purtătoare L_1 și L_2 , pseudo-distanțele calculate fiind libere de eroarea de refracție ionosferică (fiind posibilă aplicarea metodei frecvențelor duale).

CODUL M O componentă majoră a procesului de modernizare, este un semnal militar nou. Codul M, a fost proiectat pentru a îmbunătăți anti-bruiatul și a securiza accesul la semnalele GPS militare. Foarte puține au fost publicate despre acest nou și restricționat cod. Conține un cod PRN de lungime necunoscută transmis la 5.115 Mb/sec. Diferit de codul P(Y), codul M este proiectat să fie autonom; însemnând că utilizatorul își poate calcula poziția folosind numai codul M.

În afara acestor coduri, purtătoarele sunt modulate cu mesajul de navigație cuprinzând: efemerida satelitului, coeficienții de model ionosferic, informațiile de stare, timpul sistemului și eroarea ceasului satelitului față de scara de timp GPS a sistemului etc.

Identificarea sateliților GPS se face după următoarele sisteme:

1. numărul de ordine al lansării (NAVSTAR 1, 2, ...);
2. numărul corespunzător poziției orbitale;
3. numărul cod PRN;
4. numărul din catalogul NASA;
5. numărul internațional.

Pentru a evita orice fel de confuzie, se folosește uzual numărul PRN, care intră și în combinația codului pseudo-aleator C/A.

În configurație standard, 4 până la 8 sateliți pot fi vizibili deasupra orizontului (peste 15° înălțime) simultan, din orice punct terestru. Dacă masca se poate reduce la 10° , atunci până la 10 sateliți ar putea fi vizibili, iar dacă se va considera o mască de doar 5° , atunci numărul de sateliți va crește la 12. Trebuie subliniat că o configurație geometrică satelitară anume se va repeta la fiecare 23 ore și 56 minute. S-au pus la punct, până în prezent, două metode pentru limitarea accesului utilizatorilor civili la precizia totală a sistemului, active odată cu lansarea primului satelit Block II.

METODA S/A (SELECTIVE / AVAILABILITY) constă în alterarea intenționată a informației de timp conținută în mesajul de navigație. Efectul acestei metode se poate elimina prin determinarea unei diferențe de pseudo-distanțe, măsurate din puncte diferite de stație la aceiași sateliți. Metoda S/A este activă la sateliții GPS Block II începând cu 1 iulie 1991, ora 04.00 UTC. Această metodă poate consta și din trunchierea intenționată a mesajului de

navigație emis de sateliți, producând o eroare importantă în poziția satelitului (sateliților), care se transferă integral în poziția receptorului GPS.

METODA AS (ANTI – SPOOFING) constă în înlocuirea codului P cu un alt cod, numit **cod Y**, care să limiteze strict accesul utilizatorilor non-militari la precizia sistemului și care să facă imposibilă emisia din afara sistemului a unor semnale purtând semnătura GPS care să creeze confuzii sau erori în determinarea poziției. Deocamdată, este operativ codul P, iar accesul unui utilizator la acesta se poate face prin instalarea în receptorul GPS a unui cip auxiliar, ce se poate procura doar cu autorizație specială.

Tabelul 1.8 Principalele surse de erori și valorile deviației standard (erori medii pătratic) în determinarea unei pseudodistanțe (cf. Seebe4 1993, pag 290)

Sursa	Cod P		Cod C/A	
	SA inactiv	SA activ	SA inactiv	SA activ
Satelit				
Orbită	5m	10-40m	5m	10-40m
Ceas	1m	10-50m	1m	10-50m
Propagare semnal				
Ionosferă (2 frecvențe)	cm-dm	cm-dm	cm-dm	cm-dm
Ionosferă (model)	-	-	2-00m	2-100m
Troposferă (model)	dm	dm	dm	Dm
Reflexie multiplă	1m	1m	5m	5m
Receptor				
Zgomot	0,1-1m	0,1-1m	0,1-1m	0,1-1m
Întârzieri datorate componentelor	dm-m	dm-m	m	M
Centrul fazelor antenei	mm-cm	mm-cm	mm-cm	mm-cm

1.1.2 Segmentul terestru de control și urmărire

Sistemul Operațional de Control (OCS – Operational Control System) este denumirea acestui segment, care este compus dintr-o stație principală (master), stații terestre de monitorizare și stații de control. Principalele sarcini ale segmentului de control sunt:

- observarea sateliților,
- determinarea orbitelor,
- determinarea precisă a timpului și elaborarea unui model de predicție a corecției de timp GPS pentru fiecare satelit în parte,
- sincronizarea ceasurilor atomice ale sateliților cu scara de timp atomic a sistemului,
- transmiterea periodică a unui mesaj către sateliții GPS, conținând corecții ale elementelor orbitale, corecții de ceas etc.

STAȚIA PRINCIPALĂ (MASTER CONTROL STATION) începând cu 14 septembrie 2007 este localizată la baza aeriană Holloman, statul New Mexico, Statele Unite aflată sub controlul unei entități a forțelor armate americane, 746 Test Squadron (Fisher, Doucet, 2008). Această stație colectează date de la celelalte componente ale segmentului de control, calculează (mediază) orbitele și parametrii ceasurilor folosind un estimator (filtru) Kalman. Rezultatele sunt transmise apoi către una din stațiile de control care le emite (în banda S de frecvențe) către sateliții GPS. În cadrul MCS se generează și se păstrează scara de timp GPS (GPST) de către un maser cu hidrogen, denumit “master clock”. Stația master a segmentului de control este responsabilă de controlul și operabilitatea întregului sistem GPS.

STAȚIILE DE MONITORIZARE

În prezent, Agenția Națională Geospațială (National Geospatial-intelligence Agency – NGA) operează o rețea distribuită global cu 11 stații de monitorizare GPS automate. Misiunea principală a Centrului de Control a Rețelei Stațiilor de Monitorizare (Monitor Station Network Control Center – MNSNCC) este de a colecta observațiile de la constelația GPS. Aceste observații, împreună cu observațiile provenite de la Segmentul de Control Operațional GPS (OCS) și 4 stații de control, sunt utilizate pentru a calcula efemeride precise și informațiile de timp pentru toți sateliții GPS. Stațiile de monitorizare, în număr de 11, sunt dispuse astfel: Adelaide, Australia; Buenos Aires, Argentina; Hermitage, Anglia; Manama, Bahrain; Quito, Ecuador; Washington D.C.; Fairbanks Alaska; Wellington, Noua Zeelandă; Pretoria, Africa de Sud; Osan, Coreea de Sud; Papeete, Tahiti aflate în responsabilitatea National Geospatial – Intelligence Agency (NGA). Mai sunt încă două stații de monitorizare care sunt în stadiul de testare, evaluare și antrenament situate în St. Louis, Missouri și Austin, Texas – U.S.A., acestea necontribuind la producerea efemeridelor precise. Primele 6 stații de monitorizare sunt folosite de către Departamentul Apărării (Departament of Defence – DoD) în cadrul Inițiativei de Îmbunătățire a Preciziei (Accuracy Improvement Initiative – Aii) începând din vara 2005 cu 100%.

Restul de 5 stații de monitorizare sunt programate pentru îmbunătățirea comunicațiilor începând cu sfârșitul lui 2005 și pentru intrarea în cadrul procesului Aii începând cu primăvara 2006. Aceste stații sunt dotate cu ceasuri atomice cu cesiu și cu receptoare GPS cod-P și măsoară continuu (cu o cadență de 1.5 s) pseudo-distanțe la sateliții aflați deasupra orizontului. Din aceste măsurători se determină pozițiile precise ale sateliților pe orbite, din 15 în 15 minute, iar aceste date se transmit stației Master. Rețeaua de stații descrisă mai sus este rețeaua oficială de urmărire de la sol a sateliților GPS, responsabilă de efemerida transmisă de sateliții GPS, precum și de modelul de ceas atomic al sateliților.

Există, în afara rețelei OCS, și alte rețele de urmărire a sateliților GPS, din care se amintește rețeaua CIGNET (Cooperative International GPS Network), care emite efemeride exacte GPS abia după câteva zile (spre deosebire de OCS care emite efemerida exactă și o “injectează” zilnic sateliților GPS).



Fig. 1.3 Dispunerea globală a stațiilor din cadrul segmentului de control

STAȚIILE DE CONTROL, în număr de 4, se găsesc localizate împreună cu stațiile de monitorizare în Florida, Ascension, Diego Garcia și Kwajalein și constituie legătura dintre segmentul de control și sateliții GPS. Mai exact, aceste stații sunt constituite dintr-o serie de antene, cu ajutorul cărora se emit către sateliții GPS, o dată pe zi, datele de efemeridă (coordonatele exacte ale unui satelit și descrie locația acestuia într-un sistem de referință geocentric) și de ceas, culese și calculate de stațiile de monitorizare și procesate de stația

Master. Dacă, eventual, nici una din stațiile de control nu poate emite către sateliții GPS mesaje de “împrospătare” a efemeridei și parametrilor ceasului, atunci intră în funcțiune, în fiecare satelit GPS, un program de predicție a acestor parametri pentru următoarele 14 zile. Într-o astfel de situație se prevede o degradare suplimentară a poziției determinată a receptorului GPS cu până la 200m.

1.1.3. Segmentul utilizatorilor

În principiu, segmentul utilizatorilor al sistemului GPS este compus din deținătorii de receptoare GPS. Segmentul utilizatorilor are ca intrări semnalele de radiofrecvență și mesaje de navigație. Utilizatorii se pot clasifica în:

- **utilizatori militari**, adică acei utilizatori care dețin receptoare cod-P, capabili să determine pozițiile unor puncte (considerate strategice) cu precizii foarte bune, dat fiind faptul că pseudo-distanțele măsurate la sateliți sunt libere de eroarea de refracție ionosferică.
- **utilizatori civili**, acei utilizatori care dețin receptoare GPS mono-frecvență (capabile să recepționeze doar purtătoarea L_1), și ale căror determinări au o precizie net inferioară primei categorii.

În funcție de metoda de măsurare a pseudo-distanței, receptoarele GPS se pot clasifica astfel:

- **Receptoare GPS cod C/A** (numite și receptoare de navigație) sunt receptoarele GPS mono-frecvență care măsoară durata traiectului satelit-receptor a semnalului emis de satelit din codul C/A cu care este modulată purtătoarea L_1 . Durata traiectului se multiplică apoi cu viteza luminii, rezultând pseudo-distanța satelit-receptor. Aceste receptoare au posibilitatea recepției simultane a semnalelor provenite de la mai mulți sateliți (există modele de receptoare cu 12 canale) și sunt cele utilizate în navigația maritimă și aeriană, în dirijarea traficului rutier, etc, adică în aplicațiile în care nu este necesară o precizie mare a poziționării.

- **Receptoare GPS cod C/A cu analiză a fazei purtătoarei** (numite și receptoare geodezice) sunt receptoarele GPS care determină pseudo-distanțele atât din durata traiectului purtătoarei L_1 , cât și din analiza fazei purtătoarei L_2 (prin multiplicarea semnalului L_2 cu el însuși, obținând astfel faza purtătoarei L_2 la jumătate din lungimea sa de undă). Codul P cu care este modulată purtătoarea L_2 se pierde în acest proces, astfel că și a doua frecvență purtătoare devine disponibilă, în vederea eliminării erorii de refracție ionosferică. Aceste receptoare sunt cele utilizate în aplicațiile geodezice, hidrografice etc., unde cerințele de precizie sunt mari.

- **Receptoare GPS cod-P** sunt receptoarele capabile să recepționeze ambele purtătoare ale mesajului emis de sateliții GPS. De regulă, acestea sunt utilizate în aplicațiile militare, iar accesul utilizatorilor non-militari este strict limitat.

1.2 APLICAȚIILE TEHNOLOGIEI GPS

POZIȚIONAREA ABSOLUTĂ ÎN NAVIGAȚIE. Tehnica aceasta constă în corelarea codului pseudoaleator (PRN) în receptor și transformarea sa în pseudodistanță. Cu 4 astfel de pseudodistanțe măsurate simultan la 4 sateliți GPS cu poziții cunoscute (din mesajele de navigație emise de către aceștia) se determină poziția absolută în modul navigație. Prin degradarea intenționată a poziției satelitului sau a informației de timp (metoda S/A) se obțin erori de poziționare de $\pm 50\text{m}$ (precizie 1σ).

POZIȚIONAREA RELATIVĂ ÎN NAVIGAȚIE. Se operează cu un receptor plasat într-un punct fix de coordonate cunoscute. Coordonatele unui al doilea receptor mobil pot fi determinate față de receptorul fix prin culegerea datelor simultan în cele două receptoare, asigurând identitatea de stare a acestora, și prin postprocesare (Cojocaru, Trifănescu 1995). Tehnica reduce erorile sistematice și furnizează precizii de $5\div 10\text{m}$ (1σ) pentru linii de bază

medii (de până la 40÷60 km). Calculul poziției receptorului mobil (postprocesarea) are la bază tehnica celor mai mici pătrate. Se remarcă posibilitatea poziționării în timp real dacă se atașează sistemului un instrument de determinare continuă a distanței dintre cele două receptoare. De asemenea trebuie amintită tehnica relaxării, care presupune îmbunătățirea elementelor de postprocesare pe baza unei efemeride exacte (observate).

OPERAREA GPS ÎN GEODEZIE

POZIȚIONAREA ÎN MOD GEODEZIC. În acest mod, două sau mai multe receptoare GPS operează simultan într-o rețea de control. Cel puțin o stație este de referință (fixă, în punct de coordonate cunoscute). Poziția receptoarelor mobile (M) din rețea se determină relativ la stația de referință (R). Durata culegerii de date în punctele mobile este funcție de tipul receptorului, calitatea datelor, softul de post-procesare și lungimea liniei de bază. Datele se culeg pe HD. Post-procesarea presupune calculul diferențelor de coordonate M-R prin metoda celor mai mici pătrate.

MODUL PSEUDO-CINEMATIC. Această tehnică, cunoscută și sub numele de antena-swap, elimină de la începutul sesiunii de lucru ambiguitatea, astfel:

- se plasează două receptoare pe o linie de bază cunoscută,
- se culeg date din două receptoare (timp de cca. 30 min), după care se inversează antenele, urmând o nouă sesiune de culegere de date de 30 min. După această manevră, un receptor rămâne fix, celălalt deplasându-se în punctele ce urmează a fi determinate, cu staționări de 1-3 minute. Pentru linii de bază scurte (până la 10 km) se asigură o precizie de 1-3 cm.

MODUL RAPID-CINEMATIC. Este o metodă pseudo-cinematică îmbunătățită, cu perioade de staționare mici (de 1-3 min). Practic, receptorul mobil se deplasează continuu, operatorul marcând momentul trecerii prin punctul ce urmează a fi determinat.

ÎN GEODEZIE ȘI NAVIGAȚIE

În prezent, tehnicile de poziționare GPS se aplică în:

- scopuri militare (independent sau în combinație cu sistemele hiperbolice de poziționare),
- scopuri științifice (în astronomie, geodezie, geofizică și geodinamică, hidrografie, navigația aeriană, maritimă și fluvială etc),
- activitatea socială (industrie, agricultură, cadastru, sistematizare, construcții civile și industriale, activități de supraveghere a traficului rutier și aerian etc.).

În ceea ce privește aplicațiile tehnologiei GPS în navigație și geodezie (incluzând și hidrografia, ca element component al geodeziei), trebuie subliniat că cerințele de precizie ale aplicațiilor (și implicit tehnicile care se vor utiliza) sunt diferite. Astfel, în navigație, în general, este necesară poziționarea continuă, în timp real a navei/aeronavei, precum și determinarea direcției și vitezei de deplasare față de scoarța terestră, însă necesitatea de precizie este relativ scăzută. În geodezie în schimb, este necesară poziționarea foarte precisă a unor puncte de stație fixe (poziționare absolută) sau determinarea precisă a unor vectori spațiali, ceea ce implică abordarea unor tehnici speciale de poziționare, cu post-procesare, fundamental diferite decât cele folosite în navigație. Dat fiind caracterul special al aplicațiilor hidrografice, cerințele care se impun sunt speciale, în sensul că, dacă este posibil, poziționarea trebuie realizată continuu, în timp real și cu o precizie corespunzătoare aplicațiilor geodezice. În cele ce urmează sunt prezentate principalele aplicații în navigație, geodezie și hidrografie:

DETERMINAREA POZIȚIEI NAVELOR (în particular a navelor hidrografice) se face prin instalarea la bord a unui receptor GPS de navigație care, operând în mod navigație, determină continuu poziția absolută, drumul și viteza navei pe elipsoidul terestru. Determinarea poziției

absolute a navei hidrografice este indispensabilă în ridicările batimetrice, și ca urmare se impune conectarea receptorului GPS și a sondei la un computer, care să centralizeze, la cadența mesajelor (cuvintelor) GPS de 2 secunde, informația de poziție și de adâncime a apei.

POZIȚIONAREA STAȚIILOR ȘI CALIBRAREA SISTEMELOR HIPERBOLICE DE NAVIGAȚIE este de asemenea o operațiune extrem de importantă, orientată cu precădere către rețelele locale de stații, a căror poziționare și calibrare este extrem de pretențioasă, mai ales în ceea ce privește legarea acestora la rețeaua geodezică de litoral ori la cea națională.

DETERMINĂRI PRECISE ALE GEOIDULUI, necesare în calculele de determinare a adâncimii apei, se vor executa prin măsurarea înălțimii (altitudinii) elipsoidale (cu ajutorul unui receptor GPS cod P) și a unei rețele de puncte din rețeaua de nivelment (a căror altitudine ortometrică este evident cunoscută). În acest mod se poate realiza o bază de date conținând ondulația geoidului în zona acoperită de rețeaua considerată, care poate servi ulterior la determinări precise ale măsurătorilor topohidrografice.

MĂSURAREA ELEMENTELOR MAREELOR OCEANICE. Măsurătorile mareelor, (mai exact a amplitudinii acestora) reprezintă legătura dintre măsurătorile de adâncime a apei (sondaje) și măsurătorile de nivelment utilizate pe hărțile marine. Tradițional, elementele mareelor se determinau din măsurători de nivelment, față de un punct al rețelei naționale. Pentru aplicarea unei tehnici GPS de transfer de altitudine, se va lucra în mod geodezic (diferențial), cu un receptor GPS într-un punct cunoscut din rețeaua națională de nivelment, și un alt receptor (preferabil mai multe) poziționate în punctele de interes de pe suprafața mării. Diferențele de altitudine vor rezulta de ordinul centimetrilor sau chiar milimetri. Procedul ridică însă două mari probleme. În primul rând, altitudinile pot fi compatibile doar dacă se cunoaște geoidul (mai exact, receptoarele GPS dau altitudinea elipsoidală, în timp ce rețeaua de nivelment dă altitudinea ortometrică). În al doilea rând, dacă receptoarele GPS sunt de tip geodezic, atunci se impune orizontalizarea acestora. Dacă aceste două probleme tehnice pot fi depășite, atunci valorile înălțimii mării, ora apei înalte precum și amplitudinea acestora pot fi determinate foarte precis.

Se poate concluziona faptul că cel mai competitiv mod de lucru pentru rezolvarea principalelor probleme în geodezie, și în particular în geodezia marină, este modul cinematic.

1.3 SISTEME DE REFERINȚĂ ȘI SCĂRI DE TIMP

Determinarea orbitelor sateliților artificiali ai Pământului din date observaționale, precum și modelarea acestor date în termenii parametrilor cinematici și dinamici ai Pământului, necesită definirea a două sisteme de coordonate și a unui sistem de referință pentru timp, în cadrul cărora să se poată poziționa puncte:

1. un sistem de coordonate fix în spațiul extraterestru, în care se va analiza mișcarea satelitului GPS, numit sistemul convențional inerțial SCI;
2. un sistem de coordonate legat rigid de Pământ (rotitor), în care se va defini poziția observatorului terestru, numit sistemul convențional terestru SCT;
3. un sistem de referință pentru timp, în cadrul căruia să se poată stabili cu precizie succesiunea și durata evenimentelor.

Necesitatea definirii riguroase a celor două sisteme de coordonate este sugerată chiar de ecuația fundamentală a geodeziei spațiale (fig. 1.4, cf. Dinescu 1980):

$$r = \|\vec{r}^S - \vec{r}^R\| \quad (1.1)$$

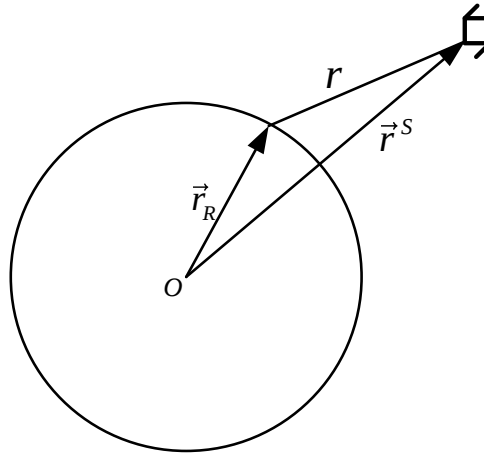


Fig. 1.4 Determinarea poziției satelitului

în care $\vec{r}^S$ se exprimă în sistemul SCI iar $\vec{r}_R$ se exprimă în sistemul SCT.

În geodezia spațială este necesar ca sistemele de coordonate enumerate mai sus să fie sisteme rectangulare geocentrice ecuatoriale.

1.3.1. Sistemul convențional inerțial (SCI)

Axa fundamentală ($\underline{Z}^\circ$) a sistemului coincide cu direcția momentului unghiular al rotației Pământului corespunzător epocii de referință J_{2000} , iar planul fundamental este planul ecuatorului asociat, care conține axa $\underline{X}^\circ$ orientată spre punctul vernal mijlociu corespunzător aceleiași epoci de referință, precum și axa $\underline{Y}^\circ$ care completează sistemul în sens direct.

Vectorul viteză unghiulară a rotației Pământului $\vec{\omega}_t$ este legat de vectorul moment unghiular $\vec{N}$ prin tensorul inerției $\vec{C}$:

$$\vec{N} = \vec{C} \vec{\omega}_t \quad (1.2)$$

Vectorul $\vec{\omega}_t$ se poate exprima sub forma $\vec{\omega}_t = \omega_t \vec{\omega}$, în care ω_t este norma iar $\vec{\omega}$ este versorul său. Variația acestui vector în timp se poate descompune în:

- variația versorului $\vec{\omega}$, responsabilă pentru oscilația în timp a orientării axei $\underline{Z}^\circ$;
- variația normei ω_t responsabilă pentru neuniformitatea scărilor de timp astronomic.

Sistemul SCI este materializat practic de un catalog al radiosurselor extragalactice, sau, mai puțin precis, de un catalog stelar, de exemplu FK5. Coordonatele ecuatoriale absolute (α , δ) ale acestor repere, împreună cu mișcările proprii (în cazul stelelor), materializează sistemul de coordonate SCI. În acest context, orientarea axelor sistemului SCI se poate reformula, mai riguros, astfel:

- axa fundamentală a SCI ($\underline{Z}^\circ$) este aleasă convențional, astfel încât să coincidă cu polul ceresc mijlociu la epoca de referință J_{2000} (PCM^o),
- axa $\underline{X}^\circ$ coincide, într-o aproximație optimă, cu echinoxul mijlociu dinamic corespunzător aceleiași epoci de referință γ°_M (Kovalevsky et al. 1989, p.94).

În practică se mai utilizează următoarele sisteme de coordonate cvasi-inerțiale intermediare, asociate SCI:

1. Sistemul convențional inerțial mijlociu la epoca observației (SCIM^t), adoptat de IAU în 1976, având axele $\underline{Z}^{Mt}$ și $\underline{X}^{Mt}$ orientate către polul ceresc mijlociu la epoca observației (PCM^t), respectiv către echinoxul (punctul) vernal mijlociu la epoca observației (γ^t_M).

Orientarea SCIM^t diferă de orientarea SCI cu valori unghiulare corespunzătoare efectului de precesie.

2. Sistemul convențional inerțial adevărat la epoca observației (SCIA^t) are axele $\underline{Z}^{At}$ și $\underline{X}^{At}$ orientate către polul ceresc adevărat la epoca observației (PCA^t), respectiv către punctul vernal adevărat corespunzător epocii observației t (γ_A^t).

Orientarea SCIA^t diferă de orientarea SCIM^t cu valori unghiulare corespunzătoare efectului de nutație. În astronomie, polul ceresc adevărat la epoca observației (PCA^t) se mai numește și polul efemeridelor (PE).

1.3.2 Sistemul convențional terestru (SCT)

Mișcarea polului este deplasarea polului efemeridelor pe sfera terestră, ca urmare a variației orientării spațiale a axei instantanee de rotație a Pământului în timp. Pentru evaluarea acestei mișcări a fost necesară definirea unei origini față de care să se stabilească poziția, la orice epocă t , a poziției axei instantanee de rotație, deci implicit a polului efemeridelor. Sistemul SCT se definește astfel:

- originea SCT este plasată în geocentru;
- axa fundamentală (axa $\underline{Z}^T$) este orientată spre originea stabilită de organismele internaționale autorizate. Această origine poartă numele de polul convențional terestru (PCT);
- planul fundamental este planul ecuatorului corespunzător PCT;
- axa $\underline{X}^T$ este conținută în planul ecuatorului, orientată pe direcția meridianului astronomic mijlociu Greenwich, iar axa $\underline{Y}^T$ completează sistemul în sens direct.

Unii autori consideră CIO ca fiind nesatisfăcătoare din punct de vedere al preciziei (Kovalevsky et al. 1989, p.166). Mai mult, în 1988, UAI a înființat IERS (International Earth Rotation Service) care administrează o rețea de stații de observare VLBI și SLR, 3 laseri lunari și 30 sateliți dotați cu reflectoare laser și care elaborează lunar un buletin, conținând, printre altele, coordonatele zilnice ale polului instantaneu (PE) față de CIO (Tab. 1.3). Aceste coordonate (x , y) sunt măsurate pe două axe rectangulare orientate astfel: originea este plasată în CIO, axa Ox pe direcția meridianului mijlociu astronomic Greenwich către sud, iar axa Oy este defazată în sens retrograd cu 90° (către vest).

Tabelul 1.9 Extras din Buletinul IERS ianuarie 2009

International Earth Rotation Service

Earth Rotation Parameters

EOP (IERS) 90 C 04

Format (2x,A4,I3,2x,I5,2F9.5,F10.6,2x,F10.6,2x,2F9.5)

2008/09	MJD	x	y	UT1-UTC	UT1-UT1R	D	dPsi	dEpsilon	
(0 h UTC)		"	"	s	ms	ms	0.001"	0.001"	
JAN 21	54852	-0.08449	0.18413	0.386797	-1.104	0.402	-62.1	-4.4	
JAN 22	54853	-0.08720	0.18643	0.386455	-0.584	0.324	-62.2	-4.5	
JAN 23	54854	-0.09000	0.18873	0.386161	-0.020	0.318	-62.1	-4.6	

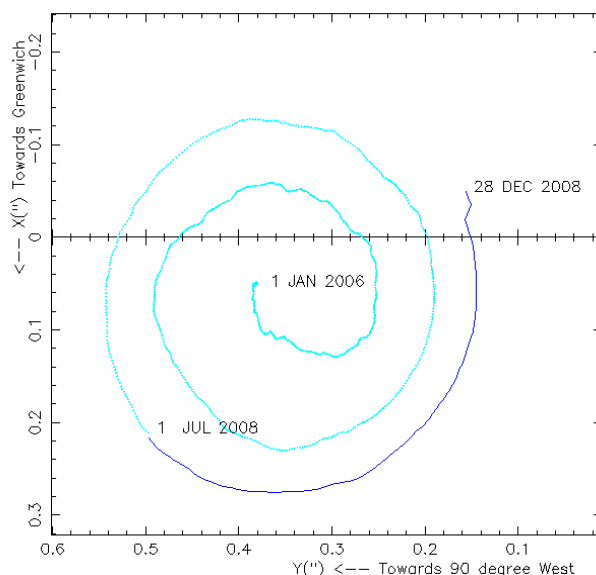


Fig. 1.5 Mișcarea polului 2006-2008

În practică, sistemul SCT este materializat de o rețea de stații terestre, care servesc drept puncte de referință, de coordonate precis determinate. Majoritatea stațiilor SCT sunt dotate cu sisteme SLR și VLBI. Începând cu anul 1987, sistemul GPS utilizează ca model de geopotențial, modelul WGS84. Asociat acestui model, se utilizează elipsoidul echipotențial geocentric de revoluție WGS84, care are drept axă polară axa CIO și este caracterizat de următorii parametri (Wellenhof et al. 1993, p.26):

Tabelul 1.10 Parametrii elipsoidului WGS84

$a = 6378137 \text{ m}$	semi-axa ecuatorială
$b = 6356752.314 \text{ m}$	semi-axa polară
$f = 1/298.2572221$	prima turtire
$J_2 = 1082630 \times 10^{-9}$	coeficientul armonice zonale
$\mu = 3986005 \times 10^8 \text{ m}^3 \text{ s}^{-2}$	parametrul gravitațional
$\omega_t = 7292115 \times 10^{-11} \text{ rad} \cdot \text{sec}^{-1}$	viteza unghiulară

TRANSFORMAREA SCI ÎN SCT

Fie satelitul S, a cărui poziție este definită de raza vectorială geocentrică $\vec{r}^S$ (fig.1.4). Se cunosc coordonatele $\vec{r}_{SCI}^S$ (la epoca J_{2000}), și se cer coordonatele $\vec{r}_{SCT}^S$ (la epoca observației t). Transformarea de coordonate $\vec{r}_{SCI}^S \rightarrow \vec{r}_{SCT}^S$ se realizează cu ajutorul *matricelor de rotație* (Hofmann-Wellenhof, 1993, pg. 28-31):

$$\vec{r}_{SCT}^S = \vec{R}^M \vec{R}^S \vec{R}^N \vec{R}^P \vec{r}_{SCI}^S \quad (1.3)$$

în care: $\vec{R}^P$ - matricea de rotație pentru precesie,
 $\vec{R}^N$ - matricea de rotație pentru nutație,
 $\vec{R}^S$ - matricea de rotație pentru timp sideral,
 $\vec{R}^M$ - matricea de rotație pentru mișcarea polului.

Matricele de rotație sunt compuse, la rândul lor, din matrice elementare de rotație $\vec{R}_i$ $\{\alpha\}$, care descriu o rotație pozitivă a sistemului de coordonate în jurul axei $\underline{X}_i$ cu unghiul α .

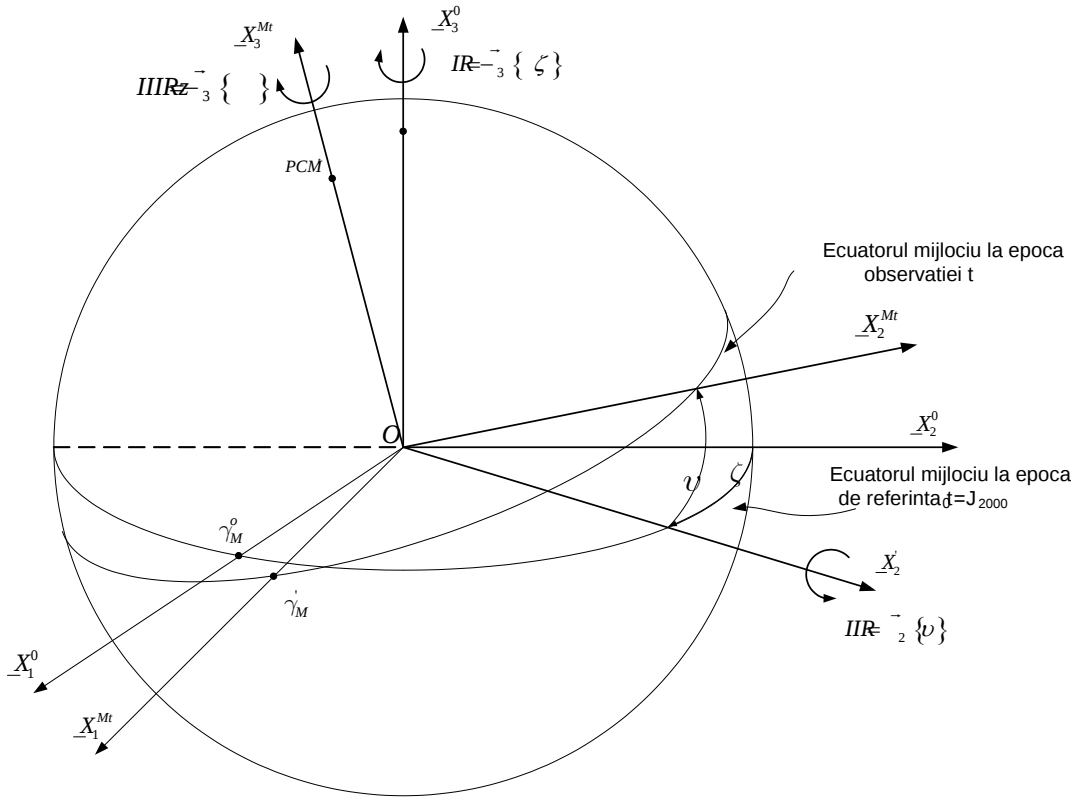


Fig. 1.6 Rotația sistemului SCI ca urmare a precesiei

Rotația este pozitivă, deci $\alpha > 0$, dacă se vede în sens retrograd din originea sistemului de coordonate. Matricele elementare de rotație sunt date de relațiile generale:

$$\bar{R}_1\{\alpha\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \bar{R}_2\{\alpha\} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{bmatrix}, \bar{R}_3\{\alpha\} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

MATRICEA PRECESIEI ($\bar{R}^P$) este formată, la rândul ei, din 3 matrice de rotație:

$$\bar{R}^P = \bar{R}_3\{-z\} \bar{R}_3\{-v\} \bar{R}_3\{-\zeta\} \quad (1.4)$$

Înlocuind fiecare matrice cu relația sa generală, rezultă:

$$\bar{R}^P = \begin{bmatrix} \cos z \cos \vartheta \cos \zeta - \sin z \sin \zeta & -\cos z \cos \vartheta \sin \zeta - \sin z \cos \zeta & -\cos z \sin \vartheta \\ \sin z \cos \vartheta \cos \zeta + \cos z \sin \zeta & -\sin z \cos \vartheta \sin \zeta + \cos z \cos \zeta & -\sin z \sin \vartheta \\ \sin \vartheta \cos \zeta & \sin \vartheta \sin \zeta & \cos \vartheta \end{bmatrix}$$

în care argumentele matricelor de rotație (z, v, ζ) sunt *parametrii precesiei*. Cele 3 rotații din relația (2.3) aduc axele sistemului SCI din poziția mijlocie la epoca de referință J_{2000} în poziția mijlocie corespunzătoare epocii observației t ; acestea sunt numerotate în fig.2.3 cu I, II și III. După efectuarea acestor trei rotații, axa Z^0 a sistemului SCI este adusă peste axa Z^{Mt} a sistemului SCIM^t. Argumentele precesiei sunt date de următoarele serii de timp:

$$z = 2306.2181 \cdot T + 0.9468 \cdot T^2 + 0.018203 \cdot T^3$$

$$\vartheta = 2004.3109 \cdot T - 0.42665 \cdot T^2 - 0.041833 \cdot T^3$$

$$\zeta = 2306.2181 \cdot T + 0.30188 \cdot T^2 + 0.017998 \cdot T^3$$

unde T reprezintă fracțiuni de secole juliene (1 secol julian = 36525 zile solare mijlocii) măsurate de la J_{2000} până la epoca observației.

MATRICEA NUTAȚIEI ($\vec{R}^N$) este compusă tot din 3 matrice elementare de rotație:

$$\vec{R}^N = \vec{R}_1 \{ \varepsilon^* \} \vec{R}_1 \{ -\delta\psi \} \vec{R}_1 \{ -(\varepsilon^* + \delta\varepsilon) \} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\delta\psi & \cos\varepsilon \cdot \sin\delta\psi & \sin\varepsilon \sin\delta\psi \\ -\cos\varepsilon^* \sin\delta\psi & \cos\varepsilon^* \cos\varepsilon \cos\delta\psi + \sin\varepsilon^* \sin\varepsilon & \cos\varepsilon^* \sin\varepsilon \cos\delta\psi - \sin\varepsilon^* \cos\varepsilon \\ -\sin\varepsilon^* \sin\delta\psi & \sin\varepsilon^* \cos\varepsilon \cos\delta\psi - \cos\varepsilon^* \sin\varepsilon & \sin\varepsilon^* \sin\varepsilon \cos\delta\psi + \cos\varepsilon^* \cos\varepsilon \end{bmatrix}$$

unde: $\varepsilon^* = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150 \cdot T - 5''.9 \cdot 10^{-4} \cdot T^2 + 1''.813 \cdot 10^{-3} \cdot T^3$, înclinarea mijlocie a eclipticii,

- $\delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon^*$ - nutația în înclinarea eclipticii,

- $\delta\psi$ - nutația în longitudinea ecliptică.

Nutația în înclinarea eclipticii și respectiv cea în longitudinea eclipticii se reprezintă ca serii trigonometrice, de forma:

$$\delta\psi = \sum_{j=1}^{106} \left\{ (A_{0j} + A_{1j} \times T) \times \sin \left[\sum_{i=1}^5 k_{ji} \times \alpha_i(T) \right] \right\}$$

$$\delta\varepsilon = \sum_{j=1}^{64} \left\{ (B_{0j} + B_{1j} \times T) \times \cos \left[\sum_{i=1}^5 k_{ji} \times \alpha_i(T) \right] \right\} \quad (1.5)$$

în care cele 5 argumente fundamentale:

α_1 este anomalia mijlocie a Lunii,

α_2 este anomalia mijlocie a Soarelui,

α_3 este argumentul (mijlociu) de latitudine al Lunii,

α_4 este elongația mijlocie a Lunii față de Soare,

α_5 este longitudinea mijlocie a nodului ascendent al orbitei Lunare,

sunt date de relațiile:

$$\alpha_1 = 485866''.733 + (1325^r + 715922''.633) \cdot T + 31''.310 \cdot T^2 + 0''.064 \cdot T^3$$

$$\alpha_2 = 1287099''.804 + (99^r + 1292581''.224) \cdot T - 0''.577 \cdot T^2 - 0''.012 \cdot T^3$$

$$\alpha_3 = 335778''.877 + (1342^r + 295263''.137) \cdot T - 13''.257 \cdot T^2 + 0''.011 \cdot T^3$$

$$\alpha_4 = 1072261''.307 + (1236^r + 1105601''.328) \cdot T - 6''.891 \cdot T^2 + 0''.019 \cdot T^3$$

$$\alpha_5 = 450160''.280 - (5^r + 482890''.539) \cdot T + 7''.455 \cdot T^2 + 0''.008 \cdot T^3 \quad (1.6)$$

iar $1^r = 360^\circ = 1296000''$

Tabelul 1.11 Argumentele nutației (extras)

j	Perioada (zile)	k_{j1}	k_{j2}	k_{j3}	k_{j4}	k_{j5}	A_{0j} 0''.0001	A_{1j} 0''.0001	B_{0j} 0''.0001	B_{1j} 0''.0001
1	6798.4	0	0	0	0	1	-171996	-174.2	92025	8.9
2	3399.2	0	0	0	0	2	2062	0.2	-895	0.5
3	1305.5	-2	0	2	0	1	46	0	-24	0
4	1095.2	2	0	-2	0	0	11	0	0	0
5	1615.7	-2	0	2	0	2	-3	0	1	0
6	3232.9	1	-1	0	-1	0	-3	0	0	0
7	6786.3	0	-2	2	-2	1	-2	0	1	0
8	943.2	2	0	-2	0	1	1	0	0	0
:										
106	27.3	0	1	0	1	0	1	0	0	0

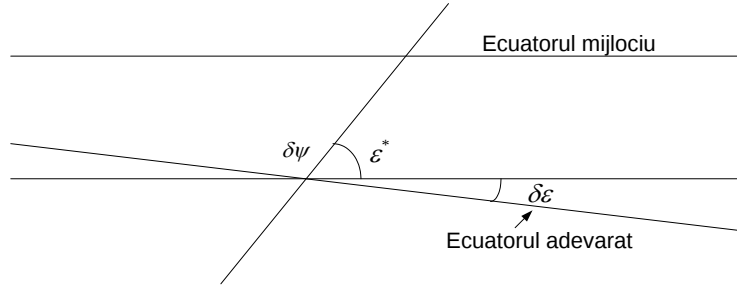


Fig. 1.7 Parametrii nutației

Cele 3 rotații care compun matricea nutației transformă sistemul inerțial mediu la epoca observației (SCIM^t) în sistem inerțial adevărat la epoca observației (SCIA^t).

MATRICEA DE TIMP SIDERAL are forma:

$$\vec{R}^S = \vec{R}_3 \{ \theta_0 \} \quad (1.7)$$

în care θ_0 este *timpul sideral aparent (adevărat) la Greenwich*. Pentru sistemul GPS se utilizează θ , *timpul sideral mijlociu la Greenwich* (necorectat de nutație), și care se calculează cu relația:

$$\theta = 1.0027379093 \cdot UT1 + \nu_0 \quad (1.8)$$

în care $\nu_0 = 24110^s.54841 + 8640184^s.812866 \cdot T + 0^s.093104 \cdot T^2 - 6^s.2 \cdot 10^{-6} \cdot T^3$, iar UT1 se va calcula cu relația $UT1 = UTC - dUT1$ (cu valori extrase din Buletinul IERS, Tab. 1.3).

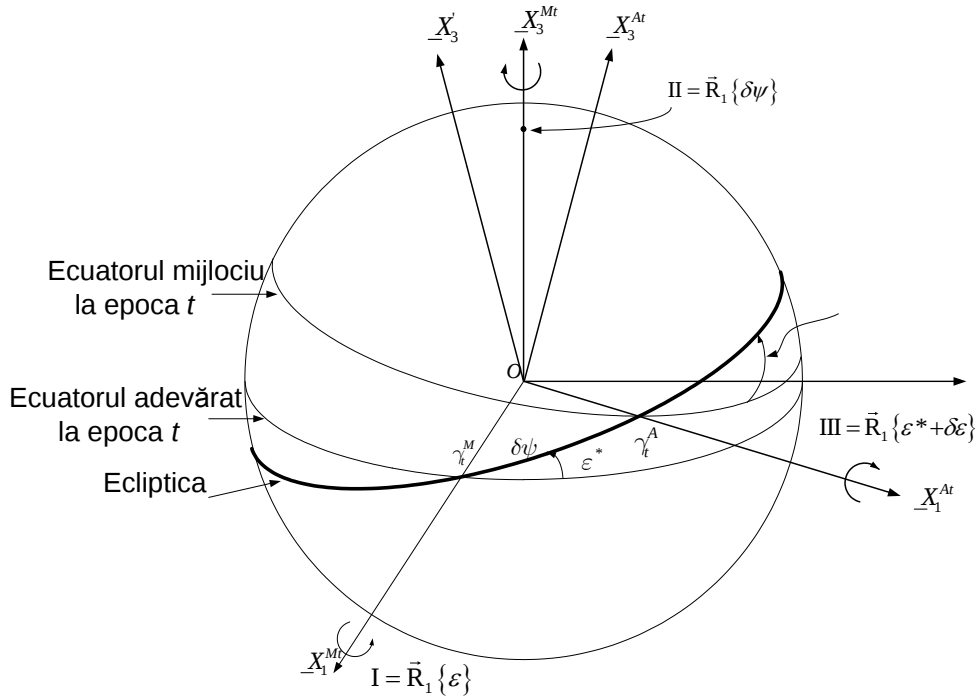


Fig. 1.8 Rotația sistemului SCI ca urmare a nutației

MATRICEA PENTRU MIȘCAREA POLULUI are forma:

$$\vec{R}^M = \vec{R}_2 \{ -x \} \vec{R}_1 \{ -y \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -y \\ -x & y & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

în care valorile argumentelor x și y se extrag din Buletinul IERS, Tab. 1.3.

În final, cu cele patru matrici definite, rezultă că poziția unui satelit definită în SCI poate fi exprimată imediat în SCT cu relația (2.3).

1.4 SISTEME DE REFERINȚĂ PENTRU TIMP

Datorită faptului că baza de timp GPS este atomică, se vor face referiri în cele ce urmează doar la scările de timp atomic.

Timpul atomic este un timp integrat: standardul de timp este furnizat de perioada oscilației de tranziție între două nivele energetice ale unui atom. Scara de timp asociată se definește ca o acumulare de unități ideale de timp, în anumite condiții, care însă trebuie să țină cont de efectele relativiste. Obținerea unității de timp atomic necesită un instrument care să realizeze tranziția și să dividă frecvența oscilației ce are loc în procesul de tranziție cu un factor stabilit. Acest instrument se numește standard de frecvență atomică. Cuantificarea continuă a unităților de timp atomic se realizează practic cu ajutorul ceasurilor atomice.

Axioma invariabilității frecvenței atomice se aplică doar atomului în stare de repaus, neperturbat. Orice influență exterioară introduce deviații ale unității de timp. Precizia unui standard de frecvență atomică este dată, în consecință, de capacitatea sa de a reduce aceste deviații.

Ideea utilizării oscilației atomice ca standard de timp superior ca precizie și stabilitate celui astronomic (bazat pe mișcările Pământului) a fost emisă încă de Maxwell în 1873.

Era ceasurilor atomice a fost deschisă de Essen și Parry, care au construit în 1955, în Anglia la National Physical Laboratory, primul standard de frecvență atomică cu Cesium (Cs 133), cu o frecvență de lucru de 9.2 GHz și cu o stabilitate de $2 \cdot 10^{-14}$ s/an. Ulterior, în 1968, Ramsey a pus la punct primul maser cu hidrogen, cu o frecvență de 1.42 GHz și o precizie de 10^{-12} s/an. Această tehnică s-a utilizat ulterior în determinările VLBI, la care stabilitatea pe intervale scurte de timp este esențială.

O a treia categorie de standarde de frecvență atomică este cea a ceasurilor cu rubidiu (Rb 87), cu rezonanță hiperfină, la o frecvență de 6.8 GHz. Primul ceas atomic cu rubidiu a fost construit de Carver în 1957, având avantajul unei stabilități foarte mari pe intervale scurte de timp, precum și un preț scăzut.

Ca urmare a stabilității mult superioare pe intervale mari de timp, oscilația tranziției hiperfine a atomului Cs 133 s-a impus ca standard de timp atomic. În consecință, cea de-a 13-a Conferință Generală pentru Măsură și Unități (CGPM) din 1967 a adoptat definiția atomică pentru secunda de timp, și ulterior, în 1983, și cea a metrului echivalent. Din aceste două definiții rezultă valoarea constantei vitezei luminii cu o valoare strictă de 299792458 m/s.

TIMPUL ATOMIC INTERNAȚIONAL (TAI) se găsește în responsabilitatea BIPM (Bureau International des Poids et Mesures). Unitatea fundamentală este secunda atomică.

Prin definiție, TAI este o scară coordonată de timp, definită într-un sistem de referință geocentric.

Scara de timp atomic TAI este menținută de 170 ceasuri atomice (în 1987, cf. Kovalevsky et al. 1989), distribuite cvasi-uniform în întreaga lume, și comparată continuu cu scara de timp GPS.

Pentru a servi în egală măsură și interesele utilizatorilor de timp universal (TU), la 01 ianuarie 1965 s-a instituit o scară de timp atomic, suficient de apropiată de TU1 și în strictă corelație cu TAI, numită Timp Universal Coordonat (TUC). Corelarea TUC cu TU1 se face prin salturi anuale sau bianuale de secundă întreagă. Întotdeauna, secunda întreagă care se adaugă la TUC este ultima secundă din lunile iunie și/sau decembrie. IERS hotărăște oportunitatea corectării TUC cu secunda întreagă și anunță acest lucru cu cel puțin 8 săptămâni înainte. În consecință:

$$\begin{aligned} \text{TAI} - \text{TUC} &= n - \text{secunde întregi} \quad (n = 24 \text{ la } 01 \text{ ianuarie } 1988, n = 26 \text{ la } 01 \text{ ianuarie } 1992) \\ | \text{TU1} - \text{TUC} | &\leq 0.9 \text{ secunde.} \end{aligned}$$

Pentru marcarea evenimentelor în cadrul sistemului GPS, s-a instituit o scară atomică proprie de timp, numită scara de timp GPS (TGPS), menținută în principal de 5 etaloane atomice Cs133 atașate stațiilor de control la sol ale segmentului de control GPS. Semnalele de

timp emise de sateliții GPS (parte componentă a mesajului de navigație) sunt sincronizate periodic cu etalonul de timp atomic GPS de la sol. Între sincronizări, mesajul de navigație emis de sateliți conține și o serie de coeficienți care estimează un model de corecție a ceasului satelitului față de TGPS. La rândul său, TGPS este periodic sincronizat cu TUC.

Originea TGPS este localizată la miezul nopții de 05 spre 06 ianuarie 1980. Trebuie precizat că TGPS nu se incrementează cu secunde întregi. În fig.2.6 sunt schițate scările de timp corelate cu TGPS.

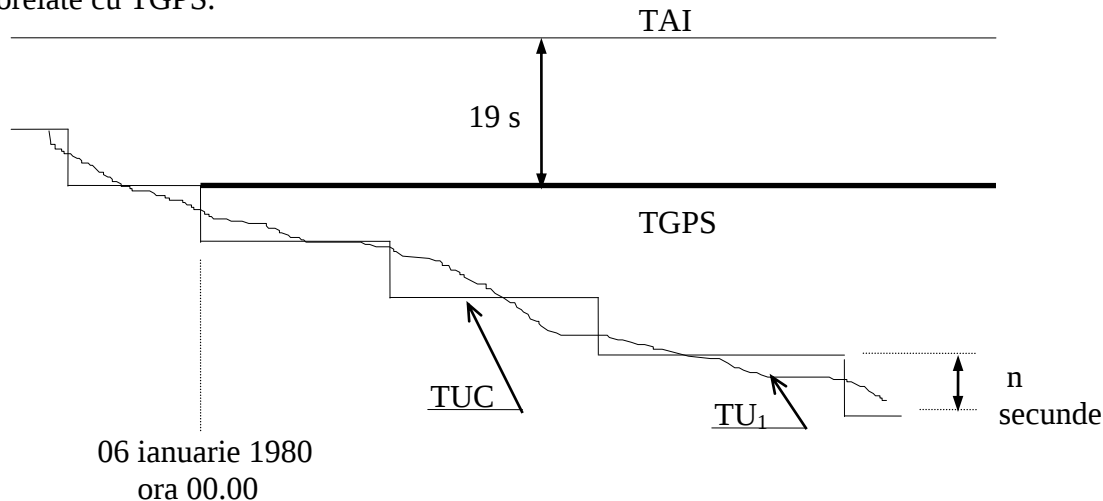


Fig. 1.9 Scara de timp atomic GPS (TGP)

1.5 EFEMERIDA SATELIȚILOR GPS

În general, prin date de efemeridă GPS se înțeleg următoarele tipuri de date: date tip almanah, transmise de sateliții GPS, conținând elemente de efemeridă de precizie scăzută, necesare selecției în receptorul GPS a geometriei satelitare optime pentru planificarea de către operatori a sesiunilor de lucru.

Efemerida transmisă este cea calculată de stația master (principală) pe baza datelor culese timp de 7 zile de către stațiile de monitorizare, utilizând un algoritm de integrare numerică a orbitei perturbate. Diferențele dintre efemerida calculată numeric și pozițiile sateliților determinate din stațiile de monitorizare se procesează de către un filtru Kalman liniar care furnizează corecțiile efemeridei de referință.

Stațiile de monitorizare, ale căror poziții sunt foarte precis determinate, sunt dotate cu receptoare GPS cod P, capabile să determine pseudodistanțele la sateliții vizibili cu precizie foarte înaltă (nivel centimetric). Aceste măsurători sunt corectate pentru refracția ionosferică și troposferică, precum și pentru efectele relativiste. Măsurătorile corectate se reduc la intervale de 15 minute și sunt introduse într-un filtru Kalman care furnizează următoarele elemente (Russel, Schaibly, 1978):

- 6 elemente orbitale pentru fiecare satelit;
- 3 parametri de corecție a ceasului fiecărui satelit;
- 3 coeficienți ai presiunii radiației solare pentru fiecare satelit;
- 2 parametri de corecție a ceasului fiecărei stații de monitorizare;
- 1 factor de scară troposferică pentru fiecare stație de monitorizare;
- 3 parametri ai mișcării polului.

Pozițiile sateliților astfel estimate de către filtrul Kalman se reprezintă ulterior sub forma celor 6 elemente kepleriene, însoțite de perturbații.

Tabelul 1.12 Conținutul efemeridei transmise

Parametrii keplerieni	
$\sqrt{a}$	Rădăcina pătrată a semiaxei mari a orbitei satelitului
e	Excentricitatea
i_0	Înclinarea orbitei la epoca de referință t_0
Ω_0	Ascensia dreaptă a nodului ascendent la t_0
ω	Argumentul perigeului
M_0	Anamalia medie la t_0
Parametrii de timp	
t_{0e}	Timpul de referință al parametrilor efemeridei
t_{0c}	Timpul de referință al parametrilor ceasului
a_0, a_1, a_2	Coeficienții polinomiali ai corecției ceasului
Corecțiile (datorate perturbațiilor) parametrilor keplerieni	
Δn	Corecția mișcării medii
$\dot{i}$	Viteza de variație a înclinării orbitei
$\dot{\Omega}$	Viteza de variație a longitudinii nodului ascendent
Cus	Amplitudinea termenului în sinus al corecției argumentului de latitudine
Cuc	Amplitudinea termenului în cosinus al corecției argumentului de latitudine
Cis	Amplitudinea termenului în sinus al corecției înclinării
Cic	Amplitudinea termenului în cosinus al corecției înclinării
Crs	Amplitudinea termenului în sinus al corecției în raza vectoare geocentrică
Crc	Amplitudinea termenului în cosinus al corecției în raza vectoare geocentrică

Parametrii de timp sunt utilizați pentru corectarea timpului satelitului față de scara de referință a sistemului, timpul GPS (GPST).

Datorită variațiilor de frecvență ale oscilatoarelor atomice de la bordul sateliților, scara de timp a satelitului GPS (t_{SAT}) diferă de scara de timp GPS (GPST) iar corecția ce trebuie adusă valorilor de timp satelit va fi:

$$GPST = t_{SAT} - \Delta t_{SAT} \quad (1.10)$$

Comportamentul oscilatoarelor individuale (cu rubidiu sau cesiu) de la bordul unui satelit GPS este controlat de stațiile de monitorizare care modelează pentru fiecare dintre acestea o corecție polinomială de ordinul al doilea. Coeficienții polinomiali sunt a_0, a_1, a_2 iar corecția va avea forma:

$$\Delta t_{SAT} = a_0 + a_1(GPST - t_{0c}) + a_2(GPST - t_{0c})^2, \quad (1.11)$$

în care t_{0c} este epoca de referință a coeficienților a_0, a_1, a_2 . Pentru simplificare, GPST poate fi înlocuit de t_{SAT} fără a diminua precizia estimării. Diferențiind (1.11) în raport cu timpul, se obține expresia „alunecării” ceasului satelitului:

$$\dot{\Delta t}_{SAT} = a_1 + 2a_2(GPST - t_{0c}) \quad (1.12)$$

Coordonatele satelitului la epoca GPST se determină față de SCT. Timpul t_k scurs de la epoca de referință t_{0e} este:

$$t_k = GPST - t_{0e} \quad (1.13)$$

Efectul perturbațiilor cauzate de necentralitatea câmpului gravitațional terestru, atracția gravitațională luni-solară și de presiunea radiației solare directe este luat în considerare de ultimii 9 parametri din tab. 1.6. Pentru calculul poziției satelitului GPS la o epocă oarecare t_k , se aplică relațiile:

$$M = M_0 + \left[\sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \Delta n \right] (t - t_e)$$

$$I = I_0 + \dot{\Omega}(t - t_e) - \omega_e(t - t_0)$$

$$\begin{aligned}\omega &= \omega_0 + Cuc \cdot \cos(2u) + Cus \cdot \sin(2u) \\ r &= r_0 + Crs \cdot \cos(2u) + Crc \cdot \sin(2u) \\ i &= i_0 + Cic \cdot \cos(2u) + Cis \cdot \sin(2u) + i(t - t_e)\end{aligned}\tag{1.14}$$

Efemerida de tip almanah

Conține elemente de efemeridă de precizie scăzută, necesare selecției în receptorul GPS a geometriei satelitare optime sau pentru planificarea de către operatori a sesiunii de lucru.

Este prezentat în continuare un extras din almanahul sateliților GPS (săptămâna GPS 493):

***** Week 493 almanac for PRN-02 *****

ID: 02
Health: 000
Eccentricity: 0.8957386017E-002
Time of Applicability(s): 503808.0000
Orbital Inclination(rad): 0.9414176941
Rate of Right Ascen(r/s): -0.8101778803E-008
SQRT(A) (m 1/2): 5153.543457
Right Ascen at Week(rad): 0.1595175982E+001
Argument of Perigee(rad): 2.714943051
Mean Anom(rad): 0.5563211441E+000
Af0(s): 0.1583099365E-003
Af1(s/s): 0.0000000000E+000
week: 493

***** Week 493 almanac for PRN-31 *****

ID: 31
Health: 000
Eccentricity: 0.7192611694E-002
Time of Applicability(s): 503808.0000
Orbital Inclination(rad): 0.9710483551
Rate of Right Ascen(r/s): -0.8159986464E-008
SQRT(A) (m 1/2): 5153.588867
Right Ascen at Week(rad): -0.1537099719E+001
Argument of Perigee(rad): -1.193156123
Mean Anom(rad): -0.1336338401E+001
Af0(s): -0.5054473877E-004
Af1(s/s): 0.0000000000E+000
week: 493

***** Week 493 almanac for PRN-32 *****

ID: 32
Health: 000
Eccentricity: 0.1354598999E-001
Time of Applicability(s): 503808.0000
Orbital Inclination(rad): 0.9656906128
Rate of Right Ascen(r/s): -0.7614289643E-008
SQRT(A) (m 1/2): 5153.599609
Right Ascen at Week(rad): 0.2739692688E+001
Argument of Perigee(rad): -1.201396108
Mean Anom(rad): -0.4812258482E+000

Af0(s):	0.2975463867E-003
Af1(s/s):	-0.3637978807E-011
week:	493
ID:	Numărul PRN al satelitului
Health:	Starea de sănătate (000 – sănătos/utilizabil)
Eccentricity:	Excentricitatea orbitei
Time of Applicability(s):	Numărul de secunde trecute de la momentul generării almanahului
Orbital Inclination(rad):	Înclinarea orbitei
Rate of Right Ascen(r/s):	Viteza de variație a ascensiei drepte a nodului ascendent
SQRT(A) (m 1/2):	Radicalul semiaxei mari a orbitei satelitului GPS
Right Ascen at Week(rad):	Longitudinea geografică a nodului ascendent
Argument of Perigee(rad):	Argumentul perigeului
Mean Anom(rad):	Anomalia medie
Af0(s):	Abaterea (eroarea) ceasului satelitului față de GPST
Af1(s/s):	Viteza de variație a abaterii satelitului față de GPST
Week:	Săptămâna GPS, care începe la miezul fiecărei nopți de sâmbătă spre duminică, fiind numărată începând cu data de 22.VIII.1999. Voate lua valoarea maximă 1024, după care parametrul „week” se resetează.

Efemerida precisă (observată).

Efemeridele precise se bazează pe datele observate obținute de rețelele de urmărire de la sol și se calculează de câteva instituții (NGS, JPL, CMR, GFZ, SIO).

În anul 1994 a luat ființă IGS – International GNSS Service, cu misiunea de a furniza date de cea mai înaltă precizie despre costelațiile sistemelor globale de navigație satelitară (GNSS) comunității internaționale în scopul de a sprijini cercetarea științifică, aplicațiile multidisciplinare și educația (cf. Moore, A., GPS World, ian. 2007). IGS urmărește sprijinirea procesului general de cunoaștere a componentelor și sistemelor de referință legate de Pământ, precum și a modului lor de interacțiune. IGS cuprinde peste 200 de instituții contribuatoare, din peste 80 de țări, precum și o rețea de 379 de stații terestre de monitorizare a sateliților artificiali.

Datele sunt disponibile utilizatorilor abia după câteva săptămâni de la epoca observației și se exprimă sub forma unei baze de date conținând coordonatele (x, y, z) și componentele vitezei ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) ale satelitului GPS la epoci echidistante (de regulă 15 minute). Datele colectate se arhivează în 4 centre de date globale și în 6 centre regionale. Un număr de 10 centre de analiză procesează regulat și independent aceste date și furnizează rezultatele coordonatorilor care combină datele individuale în procesul IGS final. Biroul central al IGS este găzduit de NASA/JPL (Jet Propulsion Laboratory).

Efemerida exactă/observată a sateliților GPS este produsă într-un format accesibil utilizatorilor, denumit „sp.3”, care se poate pune la dispoziția utilizatorilor, la cerere, cel mai devreme după o săptămână de la epoca efemeridei. Efemerida exactă GPS conține:

- data, epoca inițială (de regulă ora 00:00:00)
- numărul PRN al fiecărui satelit GPS
- coordonatele (x, y, z) în [Km] ale sateliților GPS din 15 în 15 minute
- componentele vitezei ($\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$) în [Km/s] ale sateliților GPS din 15 în 15 minute

Exemplu: Efemerida exactă în format scurt (conține doar pozițiile) a constelației GPS la data de 16 ianuarie 2009.

```
#cP2009 1 16 18 0 0.00000000 192 ORBIT IGS05 HLM IGS
## 1514 496800.00000000 900.00000000 54847 0.75000000000000
+ 31 G02G03G04G05G06G07G08G09G10G11G12G13G14G15G16G17G18
+ G19G20G21G22G23G24G25G26G27G28G29G30G31G32 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
+ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 4 4 4 5 4 4 5 4 4 4 5 4 4 4 5 4 4
++ 4 4 4 4 5 4 5 4 4 5 4 5 4 4 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
++ 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
%c G cc GPS ccc cccc cccc cccc cccc ccccc ccccc ccccc
%c cc cc ccc ccc cccc cccc cccc cccc ccccc ccccc ccccc
%f 1.2500000 1.025000000 0.00000000000 0.000000000000000
%f 0.0000000 0.000000000 0.00000000000 0.000000000000000
%i 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
%i 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0
/* ULTRA ORBIT COMBINATION 15146_18 (54848.750) FROM:
/* cou emu esu gfu siu usu
/* REFERENCED TO emu CLOCK AND TO WEIGHTED MEAN POLE:
/* PCV:IGS05_1514 OL/AL:FES2004 NONE Y ORB:CMB CLK:CMB
* 2009 1 16 18 0 0.00000000
PG02 2030.987480 -15602.810376 21296.863951 161.344686 11 10 6 143
PG03 -5750.299759 22008.319769 -13718.097202 339.800054 12 8 10 146
PG04 17118.750974 -8501.508684 18462.678894 -302.064941 8 12 4 159
PG05 -14982.555199 -18039.707434 12291.198717 -553.429902 14 16 11 173
PG06 -11239.750434 21689.478303 -10210.010587 90.256249 12 10 10 156
PG07 25687.825042 6542.688262 -2456.855919 23.304289 7 12 9 188
PG08 22354.230927 -1711.850331 -14679.865335 -186.637346 12 11 7 160
PG09 -17825.593002 -14794.525129 -13732.525363 35.315050 10 11 8 163
PG10 -1128.381534 -25803.074242 5215.874514 -9.620572 12 10 10 154
PG11 20163.532381 12423.917461 -12550.018598 10.343596 10 12 8 152
PG12 -11993.309029 -21244.583708 10701.608781 -324.984756 12 9 10 166
PG13 18991.925289 26.771922 18447.500041 285.202537 7 11 8 172
PG14 -20996.549731 16044.988710 -1866.847910 -167.409763 10 11 7 158
PG15 -2377.717327 -17120.152413 -20120.700622 -243.084280 9 8 9 197
PG16 -3497.849910 23626.187345 11441.536460 81.561485 12 8 6 156
PG17 21594.275073 -14550.280282 -4656.213796 44.451452 10 12 7 135
PG18 -15885.813465 -2669.915282 -20958.170151 -92.482344 6 13 7 152
PG19 3299.626351 16017.484102 -20823.042974 33.751554 12 11 8 157
PG20 13792.923567 18856.526161 12558.339502 93.502527 10 10 9 148
PG21 -25726.811384 -3774.982764 -6599.434891 33.580094 9 13 10 158
PG22 -12988.071086 11035.947125 -20199.765711 206.532021 12 12 5 151
PG23 12843.936098 8388.291093 21660.568577 385.205916 12 13 8 159
PG24 -21807.697343 -13405.153628 6665.129941 158.059889 9 12 10 161
PG25 24185.794178 9349.088501 5630.539770 178.307283 9 12 10 140
PG26 4364.920731 -18949.067255 -18341.057367 36.715907 10 11 7 136
PG27 19322.088816 -6533.382889 -16412.387679 16.796210 9 10 4 141
PG28 13215.032864 -8403.403595 -20988.442701 -23.747875 8 11 7 160
PG29 -18718.395371 -1345.790885 18884.620568 -17.659573 7 12 9 173
PG30 -16071.643685 -9877.592208 18370.436052 120.185231 10 10 4 181
PG31 -14215.180474 10030.869484 20318.254118 -47.954258 7 11 6 130
PG32 8178.015176 24435.257795 7333.332171 303.060321 11 10 11 156
```

CAPITOLUL II. ANALIZA CANTITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS

2.1. ECUAȚIILE MIȘCĂRII NEPERTURBATE

Ecuția diferențială vectorială a mișcării relative a unui satelit în jurul corpului central, în condițiile absenței oricărei influențe perturbatoare, are forma (Brouwer și Clemence 1961, Pal și Ureche 1983):

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} \quad (2.1)$$

iar ecuațiile scalare sunt:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu \frac{z}{r^3} \quad (2.2)$$

În procesul integrării analitice a sistemului de 3 ecuații diferențiale de ordinul 2 rezultă 4 integrale prime (integrala energiei și integralele ariilor), ecuația orbitei și ecuațiile de mișcare ale satelitului în planul orbitei, precum și 6 constante de integrare determinabile din condiții inițiale (poziție inițială și viteză inițială):

- a , semiaxa mare a orbitei;
- i , înclinarea planului orbitei față de planul de referință;
- e , excentricitatea orbitei;
- ω , argumentul perigeului;
- Ω , ascensia dreaptă a nodului ascendent;
- M , anomalia medie.

Cele 6 constante de integrare reprezintă de fapt parametrii orbitei eliptice kepleriene și definesc poziția orbitei în spațiul inerțial (i, Ω), orientarea orbitei în planul său (ω), forma orbitei (a, e) și poziția satelitului pe orbită (M). Singurul parametru orbital care depinde de timp este anomalia medie. Ca urmare, în locul său se poate utiliza momentul trecerii prin perigeu (t_0).

2.2. ECUAȚIILE MIȘCĂRII PERTURBATE

Orbita kepleriană este o noțiune pur teoretică deoarece nu ia în considerare factorii perturbatori ce influențează dinamica satelitului. Pentru a descrie mișcarea reală a satelitului în jurul corpului central, ecuațiile trebuie să conțină o serie de termeni care să însumeze toate accelerațiile perturbatoare care acționează în sensul abaterii satelitului de la mișcarea kepleriană.

Rezultă astfel ecuația diferențială de ordinul 2 neomogenă a mișcării perturbate a satelitului, în forma vectorială:

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \frac{\partial \vec{\mathfrak{R}}}{\partial r} \quad (2.3)$$

și în forma scalară:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\mu \frac{x}{r^3} + \frac{\partial \mathfrak{R}_x}{\partial x}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = -\mu \frac{y}{r^3} + \frac{\partial \mathfrak{R}_y}{\partial y}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = -\mu \frac{z}{r^3} + \frac{\partial \mathfrak{R}_z}{\partial z} \quad (2.4)$$

unde $\vec{\mathfrak{R}}$ - vectorul perturbație.

Forma canonică a ecuațiilor diferențiale de ordinul 2 care descriu mișcarea perturbată a satelitului este:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial F}{\partial X}, \quad \frac{dX}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial Y}, & \frac{dY}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial y}, \\ \frac{dz}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial Z}, & \frac{dZ}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial z},\end{aligned}\quad (2.5)$$

iar hamiltonianul are forma:

$$F = \frac{1}{2}(X^2 + Y^2 + Z^2) - \frac{\mu}{r} - \mathfrak{R}. \quad (2.6)$$

Pentru a găsi soluțiile analitice (de regulă aproximative) ale ecuației (2.3) se va aplica teoria perturbațiilor. Pentru început, din această ecuație se va considera doar partea omogenă, ceea ce va conduce la o orbită kepleriană definită de cei 6 parametri orbitali constanți $[a, e, i, \omega, \Omega, t_0]$, notați în cele ce urmează cu u_{i_0} ($i = 1..6$), valabili la momentul de referință t_0 .

Fiecare accelerație perturbatoare va produce variații temporale ale parametrilor orbitali. Ca urmare, la un moment oarecare t , parametrii u_i descriu o elipsă numită *osculatoare*, diferită de cea inițială (kepleriană), definită de parametrii:

$$u_i = u_{i_0} + \dot{u}_{i_0}(t - t_0) \quad (2.7)$$

Este necesar să se determine în cele ce urmează variațiile $\dot{u}_{i_0}$. Pentru acesta, se compară mișcarea perturbată (adică elipsa osculatoare u_i la momentul t) cu mișcarea kepleriană (cu elipsa kepleriană u_{i_0} la epoca t_0). Ca urmare, pentru vectorii pozițiilor $\vec{r}$ și vitezei $\frac{d\vec{r}}{dt}$ în mișcarea perturbată, se poate scrie:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{r}(t, u_i(t)), \\ \frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{d\vec{r}}{dt}(t, u_i(t)).\end{aligned}\quad (2.8)$$

Derivând aceste relații în raport cu timpul și ținând cont de (2.4) se obține:

$$\begin{aligned}\frac{d\vec{r}}{dt} &= \frac{\partial \vec{r}}{\partial t} + \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dt} \right), \\ \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} &= \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t^2} + \sum_{i=1}^6 \left(\frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial t \partial u_i} \cdot \frac{du_i}{dt} \right) = -\mu \frac{\vec{r}}{r^3} + \vec{\mathfrak{R}}.\end{aligned}\quad (2.9)$$

Ecuațiile vectoriale (2.9) corespund unui număr de 6 ecuații scalare, care pot fi reprezentate simplificat, sub forma vectorială:

$$\vec{A} \cdot \vec{m} = \vec{\ell} \quad (2.10)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \vec{A} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial \vec{r}}{\partial a} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial e} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial i} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial \omega} & \frac{\partial \vec{r}}{\partial M} \\ \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial a} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial e} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial i} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \Omega} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial \omega} & \frac{\partial \dot{\vec{r}}}{\partial M} \end{bmatrix}, \\ \vec{m} &= \begin{bmatrix} \frac{da}{dt} & \frac{de}{dt} & \frac{di}{dt} & \frac{d\omega}{dt} & \frac{d\Omega}{dt} & \frac{dM}{dt} \end{bmatrix}^T \\ \vec{\ell} &= \begin{bmatrix} \vec{0} \\ \vec{\mathfrak{R}} \end{bmatrix}. \end{aligned} \right. \quad (2.11)$$

unde:

$\vec{A}$ - jacobianul elementelor de poziție și al elementelor orbitale, iar în formă completă conține 36 de elemente (6 linii și 6 coloane);

$\vec{m}$ - matricea celor 6 necunoscute (adică variațiile celor 6 elemente orbitale sub acțiunea accelerației perturbatoare);

$\vec{\ell}$ - matricea accelerației perturbatoare.

Inversând sistemul (2.10) se obține **sistemul ecuațiilor planetare ale lui Lagrange** în care, în locul accelerației perturbatoare, apare potențialul perturbator $\mathcal{R}$ (sau funcția de forță perturbatoare), unde $\nabla \mathcal{R} = d\vec{r}$.

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M}, \\ \frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega}, \\ \frac{di}{dt} = \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \omega} - \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial \Omega}, \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e} - \frac{\cos i}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial i}, \\ \frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial \mathcal{R}}{\partial e}. \end{cases} \quad (2.12)$$

Pentru orbite cu excentricitatea nulă sau foarte mică ($e \cong 0$) argumentul perigeului (ω) devine nedeterminat iar pentru orbite cu înclinare nulă sau foarte mică ($i \cong 0$) ascensia dreaptă a nodului ascendent (Ω), devine nedeterminată, sistemul EPL ne mai având sens.

Mai mult, utilizarea acestor sisteme de ecuații diferențiale este restrictivă datorită faptului că forța perturbatoare trebuie să fie conservativă (să derive dintr-un potențial).

Pentru aceasta, se definește un sistem de coordonate rectangular, cu originea în satelit și cu axele orientate astfel:

- axa $\underline{q}_1$ este orientată de-a lungul razei vectoriale geocentrice;
- axa $\underline{q}_2$ este orientată în planul orbitei, perpendicular pe $\underline{q}_1$, în sensul mișcării;
- axa $\underline{q}_3$ este perpendiculară pe planul orbitei, cu sensul pozitiv dat de regula burghiului drept.

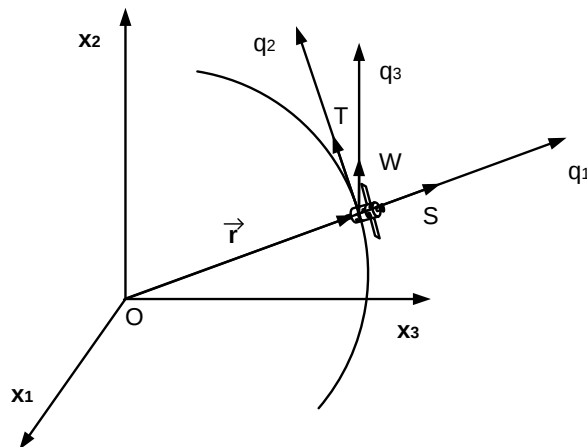


Figura 2.1 Sistem de coordonate locale

În consecință funcția de forță perturbatoare trebuie exprimată prin componentele sale (metoda lui Gauss):

$$\nabla \mathfrak{R} = \begin{bmatrix} \vec{W} \\ \vec{T} \\ \vec{S} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

unde:

$\vec{S}$ - componenta radială, orientată pe direcția q_1 ,

$\vec{T}$ - componenta normală, orientată pe direcția q_2

$\vec{W}$ - componenta bi-normală, orientată pe direcția q_3 .

Relațiile dintre componentele gaussiene ale forței perturbatoare și variațiile în timp ale elementelor osculatoare sunt (cf. Levallois și Kovalevsky 1971, Brouwer și Clemence 1961, p. 301): Sistemul este cunoscut ca **sistemul ecuațiilor Newton-Euler**. (Levallois și Kovalevsky 1971):

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} [Se \sin v + (1+e \cos v)W] \\ \dot{e} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2} [S \sin v + (\cos E + \cos v)W] \\ \dot{i} = \frac{r \cos(\omega+v)}{na^2 \sin i \sqrt{1-e^2}} T \\ \dot{\omega} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[-S \cos v + \left(1 + \frac{1}{1+e \cos v}\right) W \sin v \right] - \frac{r \cos i \sin(\omega+v)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} T \\ \dot{\Omega} = \frac{r \sin(\omega+v)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} T, \\ \dot{M} = n + \frac{1-e^2}{nae} \left[S \left(\frac{-2e}{1+e \cos v} + \cos v \right) - \left(1 + \frac{1}{1+e \cos v}\right) W \sin v \right]. \end{cases}$$

unde n - mișcarea medie, iar v - anomalia adevărată.

Utilizând variabilele Delaunay:

$$\begin{aligned} l &= M & L &= na^2 \\ g &= \omega & G &= L\sqrt{1-e^2} \\ h &= \Omega & H &= G \cos i \end{aligned} \quad (2.14)$$

se poate scrie forma canonică a ecuațiilor mișcării perturbate:

$$\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l} & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g} & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h} & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H}. \end{aligned} \quad (2.15)$$

2.3. FUNCȚII DE FORȚĂ PERTURBATOARE

Asupra unui satelit artificial al Pământului, acționează, așa cum este cunoscut, un număr important de forțe (acceleerații) perturbatoare, mult mai mici (ca magnitudine) decât forța (acceleerația) centrală, dar care influențează semnificativ, în timp, dinamica acestuia. Relațiile care exprimă mărimea deformării elipsei osculatoare în funcție de timp au fost prezentate (rel. 3.8 și 3.8'), însă este la fel de important să se deducă relațiile funcțiilor de forță perturbatoare $\vec{R}$, respectiv a componentelor $\vec{S}$, $\vec{T}$, $\vec{W}$ ale acceleerațiilor perturbatoare.

Pentru dezvoltarea teoriei liniare de ordinul I, este necesar să se exprime principalele categorii de funcții de forță perturbatoare în termenii elementelor orbitale, în timp ce pentru integrarea numerică a ecuației diferențiale (2.2) a mișcării perturbate, este necesar ca acestea să fie exprimate în termenii coordonatelor carteziane.

În funcție de natura lor se întâlnesc acceleerații perturbatoare **gravitaționale** și acceleerații perturbatoare **non-gravitaționale**.

Acceleerații perturbatoare gravitaționale:

- necentralitatea câmpului gravitațional al Pământului;
- atracția gravitațională a Soarelui și a Lunii;
- efectul indirect al atracției Soarelui și Lunii (efectul mareic indirect);
- atracția gravitațională a celorlalte planete;
- efectele relativiste;

Acceleerații perturbatoare **non-gravitaționale**:

- presiunea radiației solare directe;
- presiunea radiației solare re-emise de suprafața Pământului (albedo-ul);
- efectul Poynting – Robertson;
- frânarea aerodinamică;
- vântul solar;
- alte acceleerații, precum praful inter-planetar, radiația termică a satelitului, etc.

Magnitudinea acceleerațiilor perturbatoare depinde pe de o parte de natura fenomenului care le produce, iar pe de altă parte de valorile parametrilor orbitali ai satelitului.

Modificarea unui parametru orbital al satelitului se poate scrie sub forma (Escobal, 1965):

$$u(t) = u(t_0) + \frac{du}{dt}(t - t_0) + k_1 \cos(2\omega) + k_2 \sin(2v + \omega) + k_3 \cos(2v) \quad (2.16)$$

unde:

v – anomalia adevărată;

k_1, k_2, k_3 – sume și produse funcție de semi-axa mare, excentricitate și înclinare.

Efectul produs de o acceleerație perturbatoare poate fi:

- **secular**, $\frac{du}{dt}(t - t_0)$, adică are evoluție liniară și este cumulativ în timp;
- **lung – periodic**, $k_1 \cos(2\omega)$, în cazul în care amplitudinea perturbației crește și scade cu o anumită perioadă de timp definită, această perioadă fiind mai mare decât perioada orbitală;
- **scurt – periodic**, $k_3 \cos(2v)$, cazul în care perioada de variație este mai mică decât perioada orbitală;

- **mixt – periodic**, $k_2 \cdot \sin(2v + \omega)$, combinație de perturbații cu perioade lungi și scurte.

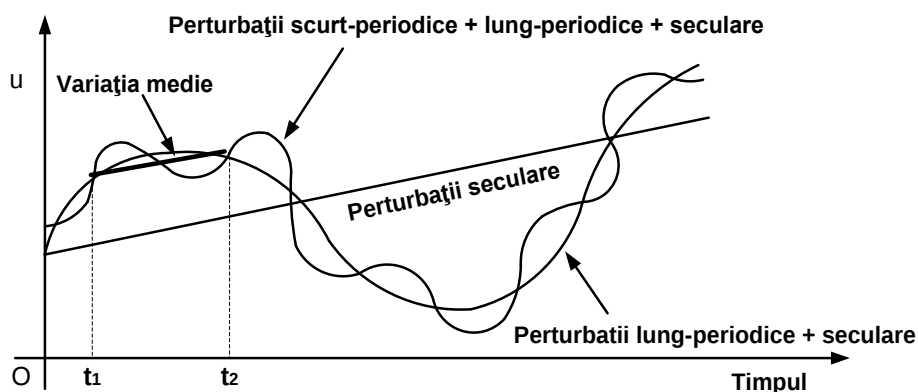


Figura 2.2. Tipuri de perturbații

Magnitudinea acestor accelerații este funcție de natura fenomenului care le produce și de valorile parametrilor orbitali medii ai orbitei satelitului. Oricum însă, efectul predominant asupra orbitelor sateliților artificiali este produs de accelerația cauzată de necentralitatea câmpului gravitațional terestru, adică de abaterea formei Pământului de la simetria sferică.

Efectul produs de o accelerație perturbatoare asupra elementelor osculatoare poate fi, în general:

- secular, caz în care efectul perturbator (perturbația) în anumite elemente osculatoare este cumulativ în timp,
- periodic, caz în care amplitudinea perturbației produse în anumite elemente osculatoare crește și scade cu o perioadă de timp definită.

Sunt prezentate în continuare categoriile de perturbații introduse de necentralitatea câmpului gravitațional în elementele osculatoare ale sateliților GPS:

Tabelul 2.1 Perturbațiile cauzate de necentralitatea câmpului gravitațional terestru asupra orbitelor sateliților GPS
(Seeber, G., 1993, pg. 83)

ELEMENTUL OSCULATOR	PERTURBAȚII SECULARE	PERTURBAȚII LUNG-PERIODICE	PERTURBAȚII SCURT-PERIODICE
a	-	-	X
e	-	X	X
i	-	X	X
ω	X	X	X
Ω	X	X	X
M	X	X	X

În cazul sateliților GPS se neglijează frânarea aerodinamică, urmare a altitudinii mari de zbor a acestora. Perturbațiile medii introduse în raza vectoare geocentrică a acestor sateliți de către accelerațiile perturbatoare caracteristice sunt prezentate în tabelul 2.2.

Tabelul 2.2. Perturbații caracteristice în r
(Seeber, G., 1993, pg. 97)

SURSA PERTURBATOARE	MAGNITUDINEA ACCELERAȚIEI PERTURBATOARE (m/s ²)	ARCE DE 3 ORE (m)	ARCE DE 2 ZILE (m)
1. Armonica a II-a zonală	$5 \cdot 10^{-5}$	≈ 2 km	≈ 14 km
2. Alte armonice	$3 \cdot 10^{-7}$	$5 \div 80$	$100 \div 1500$
3. Atracția luni-solară	$5 \cdot 10^{-6}$	$5 \div 150$	$1000 \div 3000$
4. Mareele terestre	10^{-9}	-	$0.5 \div 1.0$
5. Mareele oceanice	10^{-9}	-	$0 \div 2$
6. Presiunea radiației solare directe	10^{-7}	$5 \div 10$	$100 \div 800$
7. Albedoul	10^{-9}	-	$1.0 \div 1.5$
8. Efecte relativiste	10^{-10}	-	-

În continuare, se vor analiza pe rând expresiile funcțiilor de forță ale acestor perturbații, alături de considerațiile analitice și numerice privind influența lor asupra orbitelor sateliților din Sistemul Global de Poziționare (GPS).

2.3.1. PERTURBAȚII DE TIP GRAVITAȚIONAL

Funcția de forță perturbatoare a necentralității câmpului gravitațional al Pământului

Forma cea mai generală a potențialului gravitațional al Pământului este reprezentată de o serie infinită de funcții armonice sferice, care în coordonate polare (r, φ, λ) are forma (Heiskanen și Moritz 1967, p.342):

$$V = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} J_{\ell} P_{\ell}(\sin \varphi) - \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\ell} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} [C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda] P_{\ell m}(\sin \varphi) \right\} \quad (2.17)$$

în notațiile utilizate de Kaula (1966).

Primul termen (μ/r) reprezintă potențialul (V_0) al Pământului sferic iar gradientul său [grad (μ/r) = $-\mu \vec{r} / r^3$] este acceleerația centrală în mișcarea kepleriană.

În consecință, funcția de forță perturbatoare a necentralității ($\mathfrak{R}_T$) va fi dată de diferența:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_T &= V - V_0 = \\ &= -\frac{\mu}{r} \left\{ \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} J_{\ell} P_{\ell}(\sin \varphi) - \sum_{\ell=2}^{\infty} \sum_{m=1}^{\ell} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{\ell} [C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda] P_{\ell m}(\sin \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (2.18)$$

Pentru analiza perturbațiilor cauzate de acest potențial perturbator în elementele orbitale ale sateliților GPS (cu ajutorul rel.2.17), este necesar ca acesta să se exprime în termenii elementelor orbitale (cf. Kaula 1966):

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_T &= \frac{\mu a_e^{\ell}}{a^{\ell+1}} \sum_{p=0}^{\ell} F_{\ell mp}(i) \sum_{q=-\infty}^{\infty} G_{\ell pq}(e) S_{\ell mpq}(\omega, M, \Omega, \theta), \\ S_{\ell mpq} &= \begin{bmatrix} C_{\ell m} \\ -S_{\ell m} \end{bmatrix}_{\ell-m \text{ impar}}^{\ell-m \text{ par}} \cos[(\ell-2p)\omega + (\ell-2p+q)M + m(\Omega-\theta)] + \\ &+ \begin{bmatrix} S_{\ell m} \\ C_{\ell m} \end{bmatrix}_{\ell-m \text{ impar}}^{\ell-m \text{ par}} \sin[(\ell-2p)\omega + (\ell-2p+q)M + m(\Omega-\theta)], \end{aligned} \quad (2.19)$$

în care θ este timpul sideral mediu la Greenwich, iar $F_{mp}(i)$ și $G_{pq}(e)$ sunt funcțiile de înclinare și excentricitate definite de Kaula.

Pe de altă parte, în vederea evaluării numerice a perturbațiilor introduse de partea necentrală a geopotențialului, în particular pentru integrarea numerică a ecuațiilor diferențiale de ordinul 2 ale mișcării perturbate (2.2), este necesară exprimarea acestui potențial în coordonate carteziene. Transformarea cea mai comodă este cea de la forma în coordonate polare în coordonate carteziene terestre (SCT) și apoi în coordonate carteziene inerțiale (SCI). Relațiile dintre coordonatele polare (r, φ, λ) și cele carteziene SCT (x^T, y^T, z^T) rezultă imediat:

$$\begin{cases} r = \sqrt{(x_T)^2 + (y_T)^2 + (z_T)^2} \\ \theta = \text{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{(x_T)^2 + (y_T)^2}}{(z_T)^2} \right) \\ \lambda = \text{tg}^{-1} \left(\frac{y_T}{x_T} \right) \end{cases} \quad (2.20)$$

în care $\theta = (90^\circ - \varphi)$ este colatitudinea, utilizată în locul latitudinii satelitului (φ) pentru comoditatea calculelor. Accelerația perturbatoare cauzată de necentralitatea câmpului gravitațional terestru este materializată de gradientul său ($d\ddot{\vec{r}} = \nabla \mathfrak{R}_T$) și se exprimă, pe axele de coordonate SCT astfel:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{R}_T}{\partial x^T} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x^T} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x^T} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial x^T} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}_T}{\partial y^T} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y^T} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y^T} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial y^T} \\ \frac{\partial \mathfrak{R}_T}{\partial z^T} = \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial z^T} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z^T} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial z^T}. \end{cases} \quad (2.21)$$

La rândul lor, derivatele parțiale ale funcției de forță perturbatoare $\mathfrak{R}_T$ după coordonatele polare sunt:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathfrak{R}_T}{\partial r} = -\frac{\mu a_e^\ell}{r^{\ell+2}} (\ell+1) [C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda] P_{\ell m}(\cos \theta) \\ \frac{\partial \mathfrak{R}_T}{\partial \theta} = \frac{\mu a_e^\ell}{r^{\ell+1}} [C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda] P'_{\ell m}(\cos \theta) \sin \theta \\ \frac{\partial \mathfrak{R}_T}{\partial \lambda} = -\frac{\mu a_e^\ell}{r^{\ell+1}} m [-C_{\ell m} \sin m\lambda + S_{\ell m} \cos m\lambda] P_{\ell m}(\cos \theta). \end{cases} \quad (2.22)$$

Cel de-al doilea set de derivate din relațiile (2.21) se calculează direct. Forma completă (până la ordinul 12) a funcției de forță perturbatoare a necentralității câmpului gravitațional terestru în coordonate rectangulare terestre SCT, va rezulta, în virtutea relațiilor (2.21 - 2.22):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{\ell m}}{\partial x} = & \left(-3 \frac{\mu a_e^2 C_2 P_2}{r^5} x - 4 \frac{\mu a_e^3 C_3 P_3}{r^6} x - 5 \frac{\mu a_e^4 C_4 P_4}{r^7} x - 6 \frac{\mu a_e^5 C_5 P_5}{r^8} x - 7 \frac{\mu a_e^6 C_6 P_6}{r^9} x - \right. \\
& 8 \frac{\mu a_e^7 C_7 P_7}{r^{10}} x - 9 \frac{\mu a_e^8 C_8 P_8}{r^{11}} x - 10 \frac{\mu a_e^9 C_9 P_9}{r^{12}} x - 11 \frac{\mu a_e^{10} C_{10} P_{10}}{r^{13}} x - 12 \frac{\mu a_e^{11} C_{11} P_{11}}{r^{14}} x - \\
& \left. 13 \frac{\mu a_e^{12} C_{12} P_{12}}{r^{15}} x \right) + \left(\frac{\mu a_e^2 C_2 q_2 \cos \varphi}{r^3} + \frac{\mu a_e^3 C_3 q_3 \cos \varphi}{r^4} + \frac{\mu a_e^4 C_4 q_4 \cos \varphi}{r^5} + \right. \\
& \frac{\mu a_e^5 C_5 q_5 \cos \varphi}{r^6} + \frac{\mu a_e^6 C_6 q_6 \cos \varphi}{r^7} + \frac{\mu a_e^7 C_7 q_7 \cos \varphi}{r^8} + \frac{\mu a_e^8 C_8 q_8 \cos \varphi}{r^9} + \frac{\mu a_e^{10} C_{10} q_{10} \cos \varphi}{r^{11}} + \\
& \left. + \frac{\mu a_e^{11} C_{11} q_{11} \cos \varphi}{r^{12}} + \frac{\mu a_e^{12} C_{12} q_{12} \cos \varphi}{r^{13}} \right) \left(\frac{-z \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{z^2}{r^2}} \cdot r^3} \right) \quad (2.23)
\end{aligned}$$

în care: C_n este coeficientul celei de-a n -a armonice zonale, P_n este polinomul Legendre de ordinul n iar q_n este derivata de ordinul n a polinomului Legendre de ordinul n în raport cu $\cos \varphi$.

Funcția de forță perturbatoare a atracției gravitaționale a Soarelui și a Lunii

Atracția Lunii și Soarelui reprezintă a doua categorie importantă de influențe de tip gravitațional asupra mișcării sateliților artificiali. În evaluarea acestora, se vor avea în vedere următoarele ipoteze simplificatoare:

- 1°) Efectul produs de Lună este similar cu cel produs de Soare, și ca urmare se vor trata analog,
- 2°) Mișcările Lunii și Soarelui în decursul unei revoluții complete a satelitului se vor neglija,
- 3°) Perturbațiile cauzate de planetele din Sistemul Solar se consideră nule.

Fie un satelit S de coordonate geocentrice rectangulare (x, y, z) pe o orbită eliptică în jurul Pământului (P) și un al treilea corp P' de masă m' , de coordonate (x', y', z') , al cărui câmp gravitațional acționează în sens perturbator. Se notează cu Δ distanța satelit-al 3-lea corp ($\Delta = [(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2]^{1/2}$).

Pentru dezvoltarea teoriei analitice de ordinul I este necesară exprimarea funcției de forță perturbatoare a atracției luni-solare în elemente osculatoare, în timp ce pentru integrarea ecuațiilor mișcării perturbate, este necesară deducerea expresiei acestei funcții în coordonate carteziane inerțiale. Prima formă a fost dedusă de mai mulți autori (Kaula 1962, Giacaglia 1973, Nakiboglu 1985) și este analogă expresiei funcției de forță a necentralității :

$$\mathfrak{R}_{L-S} = \frac{\mu'}{r'} \sum_{\ell=2}^{\infty} \left(\frac{a}{r'} \right)^{\ell} \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{\ell mp}(i) G_{\ell pq}(e) S_{\ell mpq}^*(\omega, \Omega, M) \quad (2.24)$$

în care:

$$\begin{aligned}
S_{\ell mpq}^* = & \left| \begin{matrix} A_{\ell m} \\ -B_{\ell m} \end{matrix} \right|_{\ell-m \text{ impar}}^{\ell-m \text{ par}} \cos \left[\ell - 2p \omega + \ell - 2p + q M + m\Omega \right] + \\
& + \left| \begin{matrix} B_{\ell m} \\ A_{\ell m} \end{matrix} \right|_{\ell-m \text{ impar}}^{\ell-m \text{ par}} \sin \left[\ell - 2p \omega + \ell - 2p + q M + m\Omega \right],
\end{aligned}$$

$A_{\ell m}$ și $B_{\ell m}$ sunt coeficienții armonicilor sferice în coordonate ecuatoriale absolute (α' , δ') ale celui de-al 3-lea corp:

$$A_{\ell m} = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \varepsilon_m P_{\ell m}(\sin \delta') \cos m\alpha',$$

$$B_{\ell m} = \frac{(\ell - m)!}{(\ell + m)!} \varepsilon_m P_{\ell m}(\sin \delta') \sin m\alpha'.$$

$\varepsilon_m = 1$ dacă $m = 0$ și $\varepsilon_m = 0$ dacă $m > 0$,

funcția $\vec{F}_{imp}(i)$ este funcția de înclinare (Kaula),

funcția $\vec{G}_{lpq}(e)$ este funcția de excentricitate (Kaula).

În coordonate rectangulare, funcția de forță perturbatoare a celui de-al 3-lea corp va avea forma:

$$\mathfrak{R}_{L-S} = \mu' \left(\frac{1}{\Delta} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right) \quad (2.25)$$

în care $\mu' = Gm'$ - este parametrul gravitațional al celui de-al 3-lea corp.

În virtutea ipotezei 1^o) va rezulta forma completă a funcției de forță perturbatoare a Lunii și Soarelui, ca sumă a relațiilor corespunzătoare:

$$\mathfrak{R}_{L-S} = \mu' \left(\frac{1}{\Delta'} - \frac{xx' + yy' + zz'}{r'^3} \right) + \mu'' \left(\frac{1}{\Delta''} - \frac{xx'' + yy'' + zz''}{r''^3} \right). \quad (2.26)$$

Efectul indirect al atracției Soarelui și a Lunii

Aceste perturbații se datorează deformării Pământului sub acțiunea atracției gravitaționale exercitate de corpul perturbator (Lună, Soare, altă planetă). Astfel, ca urmare a variației distribuției de masă pe suprafața Pământului (fenomen ce include *mareele oceanice* și *mareele continentale*), are loc o modificare a potențialului perturbator al atracției Lunii și Soarelui. În studiile efectuate până în prezent, funcția de forță perturbatoare este analizată separat, pentru marea oceanice și pentru cele continentale.

Deformația figurii Pământului reprezintă de fapt o modificare a coeficienților armonicilor sferice din dezvoltarea geopotențialului. Aceste deviații ale coeficienților armonici de ordinul 2 și 3 se pot exprima sub forma (ITRS 2000):

$$\Delta \vec{C}_{nm} - i \vec{S}_{nm} = \frac{k_{nm}}{2^{n+1}} \frac{M_{3c}}{M} \left(\frac{a_{ec}}{r_{3c}} \right)^{n+1} \vec{P}_{nm}(\sin \varphi_{3c}) e^{-im\lambda_{3c}} \quad (2.27)$$

unde:

k_{nm} – numărul Love de grad n și ordin m . Pentru $n=2$ și $m=0$ rezultă $k_2=0,29525$.

M_{3c} – masa corpului perturbator (Luna sau Soarele)

M – masa Pământului

φ_{3c} - latitudinea geocentrică a corpului perturbator

λ_{3c} - longitudinea geocentrică a corpului perturbator

$\vec{P}_{nm}$ - funcțiile Legendre asociate, normalizate.

Mareea oceanică este mult mai dificil de modelat datorită geometriei coastei, a curenților oceanici, densității apei, etc. De asemenea, deformația figurii Pământului cauzată de marea oceanică se regăsește în variația coeficienților armonici (ITRS2000).

$$\Delta \vec{C}_{nm} - i \vec{S}_{nm} = F_{nm} \sum_{s(n,m)} \sum_{+} (C_{snm}^{\pm} \pm i S_{snm}^{\pm}) e^{\pm i \theta_s} \quad (2.28)$$

unde:

$$F_{nm} = \frac{4\pi \cdot G \cdot \rho}{g_{ec}} N_{nm} \frac{1+k'_n}{2n+1} \quad (2.29)$$

G – constanta atracției gravitaționale;

ρ – densitatea apei de mare;

g_{ec} – gravitația medie la Ecuator;

N_{nm} – coeficient de normalizare;

C_{snm}, S_{snm} – coeficienții mării oceanice pentru constituentul s ;

k'_n – coeficientul deformării de încărcare;

θ_s – argument al constituentului mareic.

Accelerația perturbatoare cauzată de variația distribuției maselor oceanice și atmosferice (mareele oceanice) este mult mai dificil de evaluat, datorită faptului că prezintă un spectru mult mai larg al armonicelor sferice. Pentru evaluări numerice sunt necesare hărți ale distribuției mării oceanice și atmosferice, precum și valorile coeficienților de încărcare cu mase oceanice și atmosferice (aceștia descriu *răspunsul Pământului deformabil la încărcarea cu mase oceanice și atmosferice*). Datorită acestui neajuns, precum și datorită ordinului de mărime scăzut, accelerația cauzată de mareele oceanice se va ignora în aplicațiile numerice.

Accelerația perturbatoare introdusă de mareele continentale poate fi înglobată în expresia accelerației perturbatoare produsă de Lună și Soare (Gaposchkin 1973) sau poate fi calculată separat (Hoffman W. 1993). Accelerația perturbatoare se poate deduce - prin derivare pe axele de coordonate - din expresia simplificată a potențialului perturbator, funcție doar de componenta zonală de ordinul 2 (Hofmann W. 1993):

$$\begin{aligned} a_{xm} &= 3k_n a_{ec}^5 GM_{3c} \frac{x_{3c}^2}{(r \cdot r_{3c})^5} x \\ a_{ym} &= 3k_n a_{ec}^5 GM_{3c} \frac{y_{3c}^2}{(r \cdot r_{3c})^5} y \\ a_{zm} &= 3k_n a_{ec}^5 GM_{3c} \frac{z_{3c}^2}{(r \cdot r_{3c})^5} z \end{aligned} \quad (2.30)$$

unde k_n este numărul Love, în acest caz $k_2 = 0,29525$ (Munk, MacDonald 1960, Gaposchkin 1973).

Efectul perturbator este evident asupra semiaxei mari (a) și excentricității (e).

Variația acestor elemente orbitale datorită efectelor mareice sunt date de relațiile (Malhotra, 1991):

$$\frac{da_s}{dt} = 3 \frac{k_2^p n_s m_s a_{ec}^5}{Q_p a_s^4 m_p} \left(1 + \frac{51}{4} e_s^2 \right) - 21 \frac{k_2^s n_s m_p a_{ec}^5}{Q_s a_s^4 m_s} \quad (2.31)$$

$$\frac{de_s}{dt} = \frac{57}{8} \frac{k_2^p n_s m_s}{Q_p m_p} \left(\frac{a_{ec\ p}}{a_s} \right)^5 e_s - \frac{21}{2} \frac{k_2^s n_s m_p}{Q_s m_s} \left(\frac{a_{ec\ s}}{a_s} \right)^5 e_s \quad (2.32)$$

unde:

s – indice care semnifică parametrul satelitului;

p – indice care semnifică parametrul planetei;

k_2 – numărul Love. Pentru Uranus $k_2 = 0,36$;

n – mișcarea medie;

a_{ec} – raza corpului ceresc;

a – semiaxa mare;

m – masa corpului;

e – excentricitatea;

Q – funcția mareică disipativă.

Funcția mareică disipativă Q a planetei sau a satelitului reprezintă cantitatea de energie disipată pe timpul unui ciclu complet de maree atunci când corpul este supus unei excitații sinusoidale de amplitudine E_0 :

$$Q = 2\pi \frac{E_0}{\Delta E}. \quad (2.33)$$

Mareea determină o variație a razei ecuatoriale (Fitzpatrick, 2008):

$$\Delta a_{ec} = \frac{15}{4} \frac{m_p}{m} \frac{a_{ec}^4}{r^3} \quad (2.34)$$

unde:

m_p – masa corpului perturbator;

m – masa corpului perturbat;

a_{ec} – raza ecuatorială a corpului perturbat;

r – distanța dintre cele două corpuri.

O altă noțiune importantă pentru efectele mareice în sistemul solar o reprezintă limita Roche. Aceasta este distanța de la planetă unde efectele mareice determină un satelit natural să se dezintegreze (atracția gravitațională este mai mare decât forța de atracție dintre particulele satelitului). Aceasta nu se întâmplă în cazul unui câmp gravitațional uniform sau pentru un satelit de dimensiuni reduse (diametru mai mic de 100 km). Valoarea limitei este dată de relația:

$$L = 2.456 R \sqrt[3]{\frac{\rho_p}{\rho_s}} \quad (2.35)$$

unde R este raza planetei, iar ρ este densitatea corpului ceresc (planetă și satelit). Pentru Pământ are valoarea 18 470 km.

Efectele relativiste

Accelerația perturbatoare introdusă de efectul relativității este o consecință a faptului că sateliții artificiali se mișcă în câmpul gravitațional al Pământului. Sub o formă simplificată (ținând cont doar de armonica a doua zonală), aceasta are expresia (Hoffman W., et al. 1993):

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\frac{3\mu^2 a(1-e^2)}{r^5 c^2} x \\ \ddot{y} = -\frac{3\mu^2 a(1-e^2)}{r^5 c^2} y \\ \ddot{z} = -\frac{3\mu^2 a(1-e^2)}{r^5 c^2} z. \end{cases} \quad (2.36)$$

Pentru valori medii ale razei vectoare geocentrice (r), semiaxei mari (a) și excentricității (e) orbitelor sateliților GPS, accelerația perturbatoare cauzată de efectele relativității are ordinul de mărime de $3 \cdot 10^{-10} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

Valoarea acestei perturbații se determină cu formula (IERS 2000):

$$\vec{a}_{rel} = -\frac{\mu}{c^2 \cdot |\vec{r}|^3} \left[\left(4 \frac{\mu}{|\vec{r}|} - |\dot{\vec{r}}|^2 \right) \cdot \vec{r} + 4(\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}) \cdot \dot{\vec{r}} \right] \quad (2.37)$$

unde:

μ – constanta gravitațională a planetei;

$\vec{r}$ - vectorul de poziție planetocentric al satelitului;

$\dot{\vec{r}}$ - vectorul viteză al satelitului;

c – viteza luminii.

Câmpul magnetic terestru

Ca urmare a deplasării prin atmosfera terestră, oricât de rarefiată ar fi aceasta, satelitul artificial dobândește sarcină electrică, urmare a:

- 1) coliziunii cu ionii și electronii liberi din atmosferă,
- 2) emisiei secundare de electroni,
- 3) a efectului fotoelectric datorat, la rândul său, radiației solare ultraviolete.

Influența câmpului magnetic terestru (asimilat cu un dipol) asupra parametrului orbitei și excentricității acesteia este concretizată de expresiile (Nesterenko 1969):

$$\Delta p = \alpha_p [\cos(u - \omega_0) - \cos(u_0 - \omega_0)] \quad (2.38)$$

$$\Delta e = -\alpha_e [\cos(u - \omega_0) - \cos(u_0 - \omega_0)]$$

în care indicele "0" fixează parametrii la epoca de referință a orbitei și:

$$\alpha_p = (2QMe \cos i) / [ma(\mu p)^{1/2}]$$

$$\alpha_e = (QM \cos i) / [ma(\mu p)^{1/2}]$$

unde Q este sarcina electrică a satelitului, iar M este momentul magnetic al dipolului.

2.3.2 PERTURBAȚII DE TIP NE-GRAVITAȚIONAL

Funcția de forță perturbatoare a presiunii radiației solare

În cadrul forțelor negravitaționale ce influențează mișcarea unui satelit artificial în general și a unui satelit GPS în mod special, presiunea radiației solare directe are un rol principal. Necesitatea luării în calcul a acestei forțe perturbatoare a fost considerată, printre primii, de către Musen (1960) și Parkinson et al. (1960) și a fost impusă de studiul mișcării satelitului Vanguard 1. Abia după luarea în considerare a acestei accelerații perturbatoare (pe lângă cele de natură gravitațională enumerate deja) s-a putut obține o concordanță satisfăcătoare între calcule și observații.

În primele studii s-a neglijat efectul umbrei Pământului și s-a presupus că orbita satelitului este integral iluminată de Soare. Printre primii care studiază efectul de umbră creat de Pământ s-au aflat Kozai (1961), Bryant (1961) și Zadunaisky (1961). Un moment important îl constituie introducerea noțiunii de funcție de umbră de către Ferraz-Mello (1964). Ulterior, alți autori au dat noi expresii acestei funcții: Lala și Sehna (1969) și Vașkoviak (1974), fapt ce a permis elaborarea teoriei analitice complete a mișcării perturbate a sateliților artificiali.

Prin presiunea luminii se înțelege acțiunea mecanică a luminii solare asupra corpului satelitului. Aceasta influențează apreciabil orbitele sateliților cu altitudini mari de zbor, așa cum este cazul sateliților GPS. În continuare se vor accepta următoarele ipoteze simplificatoare:

- 1°) Paralaxa Soarelui se neglijează,
- 2°) Mișcarea Pământului în jurul Soarelui este uniformă,
- 3°) Fluxul solar este constant de-a lungul orbitei, exceptând arcele din umbră,
- 4°) Funcția de forță perturbatoare nu depinde de forma satelitului, ci doar de raportul arie-masă,
- 5°) Se neglijează efectul indirect (albedoul).

Accelerația perturbatoare introdusă de presiunea solară directă are, în aceste condiții, forma (Cârșmaru și Oproiu 1990):

$$F = k' \cdot (A/m) q \quad (2.39)$$

în care:

$k' =$ constanta de reflectivitate a satelitului. Astfel, în calcule se va considera $k = 1$ dacă reflexia sau absorbția luminii solare de către suprafața expusă a satelitului este totală, iar $k' = 1.44$ dacă reflexia este difuză,

$A =$ aria secțiunii transversale a satelitului, perpendiculară pe direcția forței perturbatoare.

$m =$ masa satelitului,

$q =$ raportul dintre constanta solară și viteza luminii.

Considerând mișcarea satelitului față de axele sistemului geocentric rectangular inerțial SCI, atunci accelerația perturbatoare introdusă are expresia:

$$\vec{F} = -F\vec{u}_0 \quad (2.40)$$

$$\vec{u}_0 = \begin{bmatrix} \cos \lambda_0 \\ \sin \lambda_0 \cos \varepsilon \\ \sin \lambda_0 \sin \varepsilon \end{bmatrix}$$

unde $\vec{u}_0$ este versorul direcției Soare-Pământ, cu componentele:

în care λ_0 și ε sunt longitudinea ecliptică a Soarelui, respectiv înclinarea eclipticii pe planul ecuatorului. Se remarcă faptul că vectorii $\vec{F}$ și $\vec{u}_0$ au sensuri opuse.

Componentele accelerației perturbatoare sunt:

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{S} \\ \vec{T} \\ \vec{W} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F \cos \lambda_0 \\ -F \sin \lambda_0 \cos \varepsilon \\ -F \sin \lambda_0 \sin \varepsilon \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

În continuare se va construi o funcție $\mathfrak{R}_R$ numită funcție de forță, ale cărei derivate parțiale pe axele de coordonate sunt egale cu componentele accelerației pe axe (relația 2.41), și care deși nu este o funcție potențial, se va utiliza ca atare în cele ce urmează:

$$\mathfrak{R}_R = -F(x \cdot \cos \lambda_0 + y \cdot \sin \lambda_0 \cdot \cos \varepsilon + z \cdot \sin \lambda_0 \cdot \sin \varepsilon). \quad (2.42)$$

Se fac următoarele notații:

$\vec{u} =$ versorul direcției Pământ - satelit,

$\vec{v} =$ versorul normalei,

$\vec{w} =$ versorul binormalei.

Componentele accelerației perturbatoare pe aceste 3 direcții fundamentale au expresiile:

$$\begin{cases} \vec{S} = \vec{F} \cdot \vec{u} = -F \cdot \vec{u}_0 \cdot \vec{u} \\ \vec{T} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -F \cdot \vec{u}_0 \cdot \vec{v} \\ \vec{W} = \vec{F} \cdot \vec{w} = -F \cdot \vec{u}_0 \cdot \vec{w} \end{cases} \quad (2.43)$$

în care produsele scalare sunt date de :

$$\begin{cases} \vec{u}_0 \cdot \vec{u} = A \cos u + B \sin u \\ \vec{u}_0 \cdot \vec{v} = B \cos u - A \sin u \\ \vec{u}_0 \cdot \vec{w} = C \end{cases} \quad (2.44)$$

iar coeficienții A , B , și C se exprimă prin elementele orbitale osculatoare ale satelitului și coordonatele ecliptice ale Soarelui (2.41 și 2.42):

$$\begin{aligned} A &= \cos \lambda_0 \cos \Omega + \sin \lambda_0 \sin \Omega \cos \varepsilon \\ B &= -\cos \lambda_0 \sin \Omega \cos i + \sin \lambda_0 \cos \Omega \cos \varepsilon \cos i + \sin \varepsilon \sin \lambda_0 \cos i \\ C &= \cos \lambda_0 \sin \Omega \cos i - \sin \lambda_0 \cos \Omega \cos \varepsilon \sin i + \sin \varepsilon \sin \lambda_0 \cos i \end{aligned} \quad (2.45)$$

Ca urmare, funcția de forță perturbatoare a presiunii de radiație are forma:

$$\mathfrak{R}_R = \vec{F} \cdot \vec{r} = F \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \cdot \vec{u}_O \cdot \begin{bmatrix} \vec{u} \\ \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

prin relațiile (2.45) și (2.46).

În continuare este necesar să se ia în considerare efectul umbrei Pământului asupra mișcării sateliților. Plecând de la aproximarea conului de umbră (creat de Pământ) cu un cilindru (dată fiind înălțimea mare a conului = $1.4 \cdot 10^6$ km, precum și altitudinile mari de zbor ale sateliților) și ținând cont că funcția de forță perturbatoare, în acest caz, este discontinuuă, se definește funcția de umbră $\vec{\psi}(\lambda)$, cu proprietatea:

$$\vec{\psi}(\lambda) = \begin{cases} 1 & \text{dacă satelitul este iluminat de Soare} \\ 0 & \text{dacă satelitul se află în umbra Pământului} \end{cases}$$

Condiția de iluminare: $\vec{r} \cdot \vec{u}_O > 0$,

Condiția de eclipsă: $\vec{r} \cdot \vec{u}_O < 0$ și $\vec{r} \cdot \vec{u}_O < R$

Expresia pentru funcția de umbră este (cf. Vaskoviak, 1974):

$$\psi(\lambda) = (1/2) \left\{ 1 - P_l(\cos \lambda) + \sum_{l=1}^{\infty} P_l(\cos \Phi) [P_{l-1}(\cos \lambda) - P_{l+1}(\cos \lambda)] \right\} \quad (2.47)$$

în care P_l sunt polinoame Legendre, iar unghiurile λ și Φ au semnificațiile din fig. 2.3.

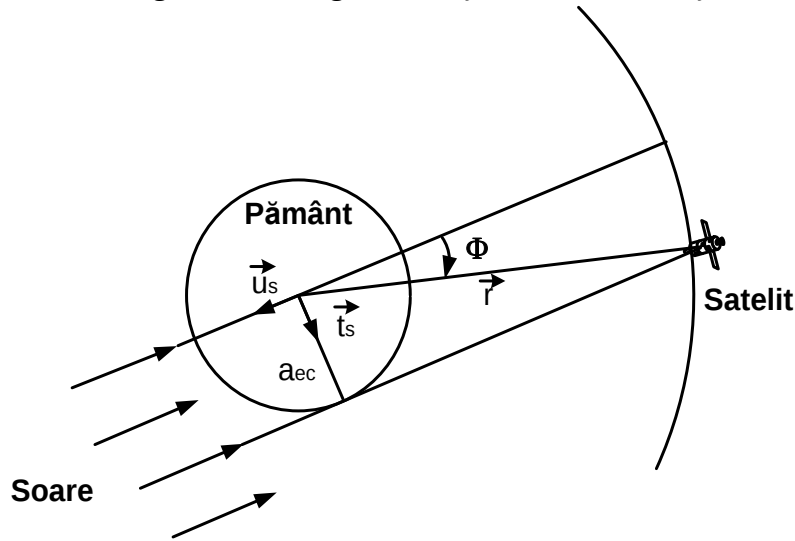


Fig. 2.3 Argumentele funcției de umbră

Funcția $\psi(\lambda)$ este periodică, de perioadă 2π și pară în raport cu λ .

Integrarea numerică a ecuațiilor (2.1) se face încorporând în membrul drept al acestora componentele pe axe de coordonate ale accelerației perturbatoare cauzate de presiunea radiației solare directe. Această accelerație perturbatoare are forma (2.46) înmulțită însă cu funcția de umbră $\psi(\lambda)$. Este deci necesar ca la fiecare pas al integrării să se evalueze condiția de iluminare. Dacă satelitul este iluminat de Soare atunci $\psi(\lambda)=1$, iar în caz contrar trebuie calculate:

- 1) λ_O , longitudinea ecliptică a Soarelui,
- 2) $\psi(\lambda)$, funcția de umbră

În virtutea celor arătate mai sus, componentele pe axe ale funcției de forță perturbatoare au expresiile generale:

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\psi(\lambda) k' \frac{A}{m} q \left(\frac{x^O - x}{x^O} \right) \\ \ddot{y} = -\psi(\lambda) k' \frac{A}{m} q \left(\frac{y^O - y}{y^O} \right) \\ \ddot{z} = -\psi(\lambda) k' \frac{A}{m} q \left(\frac{z^O - z}{z^O} \right) \end{cases} \quad (2.48)$$

în care:

x^O, y^O, z^O = coordonatele rectangulare ale Soarelui, obținute din coordonatele ecliptice (calculate pentru momentul observației),

x, y, z = coordonatele rectangulare ale satelitului.

Pentru un satelit GPS, funcția de umbră devine nulă (deci satelitul intră în conul de umbră al Pământului) doar de două ori pe an și anume atunci când Soarele se găsește în planul orbitei satelitului ($\alpha_O = \Omega$ sau $\alpha_O = \Omega + 180^\circ$) iar o astfel de “eclipsa” nu poate dura mai mult de o oră. Considerând $\psi(\lambda) = 1$, accelerația perturbatoare introdusă de presiunea radiației solare directe va avea valoarea aproximativă:

$$\|\ddot{r}\| \cong 10^{-7} \text{ m}\cdot\text{s}^{-2},$$

pentru $k = 1.44$, $A \cong 7 \text{ m}^2$, $m \cong 1500 \text{ kg}$, $q = 4.65 \cdot 10^{-7} \text{ dyne}\cdot\text{m}^{-2}$.

CAPITOLUL III. PERTURBAȚIILE DE TIP NEGRAVITAȚIONAL

3.1 EFECTUL DIRECT AL PRESIUNII RADIĂȚIEI SOLARE

INTERACȚIUNEA SATELIT-RADIȚIA SOLARĂ

Prin efectul direct al radiației solare asupra satelitelui, înțelegem accelerația ce rezultă din interacțiunea luminii solare cu fiecare suprafață elementară a satelitelui (absorbție, reflexie sau difuzie). Fiecare foton este purtător al unei cantități de moment dat de energia sa (proporțional cu frecvența luminii) divizat cu viteza luminii, și acest moment poate fi modificat pe timpul interacțiunii cu o suprafață solidă. În acest sens, lumina solară se comportă ca un mediu de particule materiale emis continuu de către Soare.

Pentru fiecare suprafață elementară dS a satelitelui, numim α , ρ și δ fracțiuni ale luminii solare incidente care sunt absorbite, reflectate și respectiv difuzate. Coeficienții α , ρ și δ reprezintă coeficienții de absorbție, reflexie și difuziune a suprafeței elementare dS (depind de proprietățile microscopice fizice și chimice) și sunt în următoarea relație:

$$\alpha + \rho + \delta = 1. \quad (3.1)$$

Se fac următoarele presupuneri simplificatoare:

- lumina absorbită nu este re-emisă (real, energia corespunzătoare este practic re-emisă ca radiație termică);
- pentru o direcție dată, intensitatea luminii difuzate este proporțională cu cosinusul unghiului dintre versorul $\vec{n}$ perpendicular pe dS ;
- Reflexia este o reflexie totală;
- Suprafața elementară dS se comportă ca o combinație liniară dintre un corp negru, o oglindă perfectă și ca o difuziune Lambert (α , ρ și δ descriu complet proprietățile optice ale suprafeței dS și nu depind de unghiul β dintre $\vec{n}$ și vectorul $\vec{S}$).

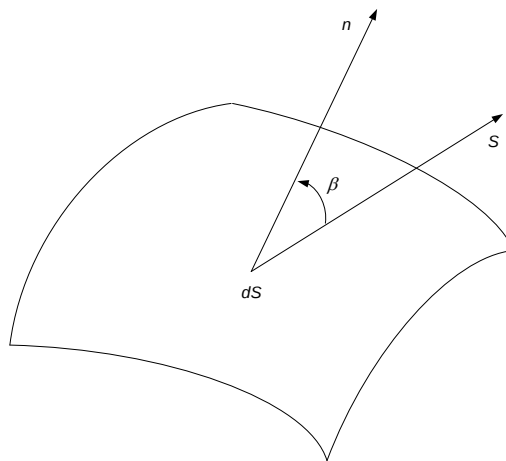


Fig. 3.1 Unitatea de suprafață

În aceste ipoteze, rezultanta forței elementare dF cauzată de lumina solară incidentă pe suprafața dS este dată de (Milani A. et al., 1987, p. 49):

$$dF = -\frac{\Phi_{\odot}}{c} \left[(1 - \rho)S + 2 \left(\frac{\delta}{3} + \rho \cos \beta \right) n \right] dS |\cos \beta| \quad (3.2)$$

unde $\Phi_{\odot}$ este fluxul solar, c este viteza luminii și valoarea absolută a lui $\cos \beta = \vec{n} \cdot \vec{S}$

Expresia de mai sus este obținută prin însumarea forțelor elementare dF_α , dF_ρ și dF_δ datorate absorbției, reflexie și difuziei luminii solare pe suprafața dS .

Forța elementară dF_α este evident orientată de-a lungul suprafeței S și este proporțională cu secțiunea:

$$dF_\alpha = -\frac{\Phi_\odot}{c} \alpha dS |\cos \beta| S. \quad (3.3)$$

Lumina reflectată împinge suprafața în lungul lui $\vec{n}$ cu o forță proporțională cu $dS |\cos \beta|$ și de asemenea cu componenta n a momentului transferat de fotonii incidenți - $2 \cos \beta$

$$dF_\rho = -\frac{\Phi_\odot}{c} 2\rho \cos \beta dS |\cos \beta| n. \quad (3.4)$$

Forța datorată difuziei luminii are componentele în lungul lui $\vec{S}$ și $\vec{n}$; aceasta deoarece acești fotoni pot fi inițial absorbiți transferând suprafeței dS momentul lor liniar (în lungul lui S) și apoi sunt re-emiși conform legii lui Lambert. Cel de-al doilea proces produce o forță care poate fi obținută prin integrarea intensității luminii peste emisfera externă a lui dS . Deoarece, pentru fiecare unghi θ față de $\vec{n}$, intensitatea este proporțională cu $\cos \theta$, această forță este proporțională cu integrala următoare:

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta (2\pi \sin \theta d\theta) = \frac{2}{3} \pi \quad (3.5)$$

(unde un alt factor $\cos \theta$ rezultă din faptul că pentru simetrie doar componenta $\vec{n}$ a luminii difuzate produce o forță diferită de zero) divizat prin integrala:

$$\int_0^{\pi/2} \cos \theta (2\pi \sin \theta d\theta) = \pi, \quad (3.6)$$

care este proporțională cu suma totală a luminii difuzate. Prin urmare, dF_δ în final va fi:

$$dF_\delta = -\frac{\Phi_\odot}{c} \delta dS |\cos \beta| S - \frac{\Phi_\odot}{c} \cdot \frac{2}{3} \delta dS |\cos \beta| n \quad (3.7)$$

și expresia (3.2) pentru dF este obținut din $dF = dF_\alpha + dF_\rho + dF_\delta$.

3.1.1 Efectele pe termen lung asupra semiaxei mari

Pentru a realiza o investigare teoretică a efectului direct al presiunii radiației solare asupra mișcării unui satelit artificial trebuie scrisă o expresie generală pentru efectul total al radiației solare care să depindă de câțiva parametri fizici de bază. Înainte de toate, deoarece distanța Pământ – satelit este mult mai mică decât distanța Pământ – Soare, este de așteptat ca fluxul solar $\Phi_\odot$ pe satelit să fie aproape identic cu cel de pe Pământ ($\simeq 1.38 \times 10^6 \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$).

Pornind de aici, efectul fluxului fonic se va modifica în mare parte datorită excentricității orbitei Pământului în jurul Soarelui ($\approx 0,017$) de exemplu forța radiației solare asupra satelitului va conține un factor $(a_\odot^2 / r_\odot^2)$, unde $a_\odot = 1 \text{ AU}$ este semiaxa mare a orbitei Pământului și $r_\odot$ este distanța instantanee până la Soare. Considerând cazul în care satelitul este simetric axial cu axa de simetrie fixă în spațiul inerțial le-a lungul vectorului $\vec{w}$ (acesta este un model convenabil pentru un satelit de formă arbitrară care se rotește rapid în jurul unei axe); indiferent de direcția $\vec{S}$ a Soarelui, rezultanta forței de radiație solară va fi conținută în planul generat de vectorul $\vec{S}$ și $\vec{w}$. Forța datorată absorbției luminii Soarelui va împinge satelitul de-a lungul vectorului S , componentele luminii reflectată și difuză vor ridica forța cu ambele componente w și S , iar accelerația totală a satelitului va avea forma (Milani A. et al., 1987):

$$F = -\frac{a_{\odot}^2}{r_{\odot}^2} A(\psi)S + B(\psi)w, \quad (3.8)$$

unde $\cos \psi = \vec{S} \cdot \vec{w}$

Semiaxa mare a este funcție de E (integrala energiei $E = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r}$)

$$a = -\mu(2E). \quad (3.9)$$

Diferențiind în funcție de timp, devine $\dot{a} = 2a^2 \dot{E} / \mu$ iar în funcție de direcțiile R , T și W :

$$\dot{a} = \frac{2}{n\beta} T + e(T \cos f + R \sin f) \quad (3.10)$$

unde $\beta = \sqrt{1-e^2}$.

Așa cum se știe, doar componentele R și T ale forței perturbatoare contribuie la variația în timp a semiaxei mari a .

$$\dot{a} = \frac{2e \sin f}{n\sqrt{1-e^2}} R + \frac{2(1+e \cos f)}{n\sqrt{1-e^2}} T \quad (3.11)$$

Într-un sistem de axe ortogonale cu originea în centrul Pământului, axa „x” trecând prin perigeul orbitei satelitului, axa „z” orientată pe direcția momentului unghiular al satelitului, radial, în plan transversal și în afara planului, versorii e_R , e_T , e_W sunt scriși ca:

$$\begin{aligned} e_R &= (\cos f, \sin f, 0) \\ e_T &= (-\sin f, \cos f, 0) \\ e_W &= (0, 0, 1). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Presupunem că axa de simetrie (sau rotația) a satelitului este fixă în spațiul inerțial. Această simetrie (sau rotație rapidă) ipotetică, plus încă două presupuneri că proprietățile optice ale suprafeței satelitului sunt constante în timp și că temperatura satelitului nu poate fi constantă putându-se modifica în funcție de poziția Soarelui, presupune că forța radiației solare dată de ecuația (3.8) depinde numai de S (poziția Soarelui).

$$\vec{F} = \vec{F}(S) \quad (3.13)$$

având componentele $F_x(S)$, $F_y(S)$, $F_z(S)$ în sistemul de referință definit mai sus. Deoarece

$R = \vec{F}(S) \cdot \vec{e}_R$ și $T = \vec{F}(S) \cdot \vec{e}_T$, ecuația (3.11) devine:

$$\dot{a} = \frac{2e \sin f}{n\sqrt{1-e^2}} F_x(S) + \frac{2(1+e \cos f)}{n\sqrt{1-e^2}} F_y(S). \quad (3.14)$$

O modalitate ușoară de a separa efectele periodice de scurtă durată („scurt” însemnând a fi comparabile cu perioada orbitală a satelitului) de cele lungi periodice (aproximativ un an) sau de efectele seculare, constă în a exprima $\dot{a}$ ca o serie Fourier având ca argumente anomaliile medii ale satelitului și a Soarelui, M și respectiv M_1 .

$$\dot{a} = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \dot{a}_{k_1 k_2} \exp[i k_1 M_1 + k_2 M] \quad (3.15)$$

unde coeficienții $\dot{a}_{k_1 k_2}$ sunt dați de

$$\dot{a}_{k_1 k_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{a} \exp[-i k_1 M_1 + k_2 M] dM_1 dM. \quad (3.16)$$

Coeficienții pe termen lung nu conțin M , deoarece au $k_2 = 0$:

$$\dot{a}_{k_1 0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{a} \exp -i k_1 M_1 dM_1 dM. \quad (3.17)$$

Folosind ecuația (3.14) pentru $\dot{a}$, ei devin:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{k_1 0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}} \times & \left(-e \int_0^{2\pi} F_x(S) \exp(-ik_1 M_1) dM_1 \int_0^{2\pi} \sin f dM + \right. \\ & \left. + \int_0^{2\pi} F_y(S) \exp(-ik_1 M_1) dM_1 \int_0^{2\pi} (e + \cos f) dM \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Sinusul și cosinusul anomaliei adevărate poate fi exprimat în funcție de anomalia medie pe baza formulelor:

$$\cos f = \cos M - e + e \cos 2M + O(e^2), \quad (3.18')$$

$$\sin f = \sin M + e \cos 2M + O(e^2).$$

unde termenii de ordinul superior e^2 sunt asemănători celor $\sin kM$, $\cos kM$ (unde k este un număr pozitiv) extinzând pentru $\sin f$ și $\cos f$.

Folosind această scriere, rezultă:

$$\int_0^{2\pi} \sin f dM = 0 \quad (3.19)$$

și

$$\int_0^{2\pi} (e + \cos f) dM = 0 \quad (3.20)$$

și astfel

$$\dot{a}_{k_1 0} = 0. \quad (3.21)$$

Se poate concluziona că dacă acțiunea totală a forței radiației solare asupra unui satelit poate fi exprimată sub forma generală (3.13), nici un efect pe termen lung de orice ordin nu va apărea asupra semiaxei mari.

În cazul sateliților pasivi de formă sferică, SCARLETTE sau LAGEOS, se așteaptă apariția efectelor doar pe termen scurt asupra semiaxei mari, separat de efectul coeficientului J_{20} . Mai mult decât atât, ei sunt foarte ușor de modelat datorită formei sferice a satelitului. Atunci când un satelit este activ, forma sa este complexă iar o parte importată a satelitului o constituie antena care permite comunicația cu stațiile terestre. În cele mai multe cazuri, antena este direcțională, orientată către Pământ. Cu o astfel de antenă, ipotezele anterioare nu mai pot fi aplicate. Fie $\vec{b}$ direcția radiounделor de la satelit către un punct de pe suprafața Pământului; atunci $\vec{b}$ trebuie să se modifice odată cu anomalia satelitului iar transmisia direcțională poate fi posibilă numai dacă antena se va roti în jurul unei axe $\vec{w}_A$ care este mai mult sau mai puțin perpendiculară pe planul orbital. Atunci accelerația presiunii radiației solare nu mai poate fi de forma (3.13). Dacă $\vec{N}_A$ este versorul de-a lungul unei axe de simetrie a antenei, accelerația $\vec{F}_A$ datorată radiației solare asupra antenei va fi de forma (Milani A. et al., 1987, p. 55):

$$F_A = \mathcal{G}(f)S + \mathcal{F}(f)N_A \quad (3.22)$$

unde $\mathcal{G}$ și $\mathcal{F}$ sunt funcții de anomalia adevărată a satelitului și poziția Soarelui.

Se fac următoarele presupuneri simplificatoare:

- satelitul este afectat de o accelerație a presiunii de radiație solară conformă cu expresia (3.13); se neglijează efectul de umbră reciprocă dintre corpul satelitului și antenă, precum și reflecțiile multiple dintre ele.
- Axa de rotație a antenei $\vec{w}_A$ este apropiată de perpendiculara pe planul orbitei e_w ; unghiul mic dintre ele fiind η .

- c) Radioundele sunt emise în direcția $\vec{b}$, direcție foarte apropiată de direcția către centrul Pământului ($-e_R$); unghiul mic de nealiniere în planul orbitei este ξ , ξ nu poate fi considerat zero deoarece radioundele sunt emise către stațiile terestre care nu se găsesc neapărat subaștrulul satelitului. Presupunem pentru simplificare că $N_A = b$.
- d) Orbita satelitului are o excentricitate mică e .

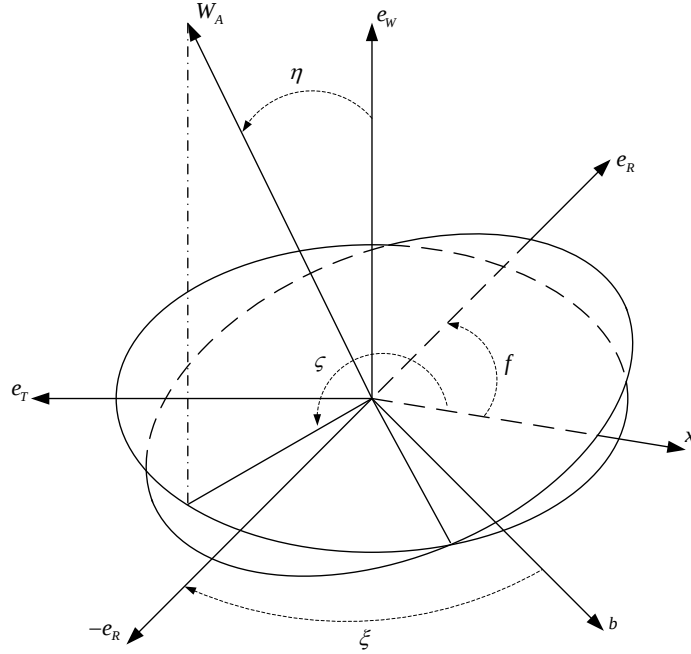


Fig. 3.2 Axa de emisie a radiundelor și proiecția pe planul orbitei

În baza acestor ipoteze, se poate scrie expresia (3.22) ca serie de puteri în η , ξ și e , neglijând termenii de ordinul doi sau de ordin mai mare. Pentru început, se scrie ecuația (3.14) pentru $\dot{a}$ în funcție de puterile lui e folosind ecuațiile (3.18'):

$$\dot{a} = \frac{2}{n} e R_A \sin M + \frac{2}{n} (1 + e \cos M) T_A \quad (3.23)$$

unde

$$R_A = F_A \cdot e_R \quad T_A = F_A \cdot e_T \quad (3.24)$$

Revenim la expresia (3.22) și scriind $\vec{S}$ și $N_A = b$ în funcție de e_R , e_T , e_W se modifică structura.

Avem:

$$S = \begin{pmatrix} B_1 \cos f + B_2 \sin f \\ B_2 \cos f - B_1 \sin f \\ B_3 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

unde B_1 , B_2 și B_3 sunt funcții de timp depinzând numai de longitudinea medie a Soarelui, și

$$b = \begin{pmatrix} -1 \\ -\xi \\ \eta \cos(\zeta - f) \end{pmatrix} \quad (3.26)$$

unde ζ este unghiul dintre proiecția lui $\vec{W}_A$ pe planul orbitei și direcția la perigeu (deoarece ultimul este originea de la care anomalia adevărată este calculată).

Se poate scrie acum ecuația (3.23) pentru variația semiaxei mari:

$$\begin{aligned} \frac{n}{2} \dot{a} = & \mathcal{G}(M)(B_2 \cos M - B_1 \sin M) - \xi \mathcal{F}(M) + e B_2 \mathcal{G}(M) - e \sin M \mathcal{F}(M) \\ & + e \mathcal{G}(M) B_2 (\cos 2M - 1) - B_1 \sin 2M + e \mathcal{G}_1(M)(B_2 \cos M - B_1 \sin M) \end{aligned} \quad (3.27)$$

unde termenii de ordinul e^2 , $e\xi$, ξ^2 , au fost neglijati și $\mathcal{G}_1(M)$ este definit de următoarea expresie:

$$\mathcal{G}(f) = \mathcal{G}(M) + e \mathcal{G}_1(M) + O(e^2) \quad (3.28)$$

Pentru $\sin f$ și $\cos f$, au fost folosite în expresiile lui D'Alembert (12) în $\sin M$ și $\cos M$.

Din ecuația (3.27) se observă că doar unul dintre termeni contribuie la variația semiaxei mari deoarece forța de radiație solară asupra antenei este demultiplicată cu un parametru mic (e sau ξ). Termenul $\mathcal{G}$, care apare de ordinul zero în parametrii mici este un termen de lungă perioadă deoarece acesta conține longitudinea Soarelui.

În cazul evaluării simple, cazul când antena este plană, funcția $\mathcal{G}$ poate fi scris:

$$\mathcal{G}(f) = R' \cos \beta + R'' |\cos \beta| \quad (3.29)$$

(unde acum $\cos \beta = N_A \cdot S$). Cele două constante R' și R'' iau în considerare posibilitatea diferitelor proprietăți optice și/sau de temperatură dintre cele două fețe ale antenei. Pentru determinarea efectelor lung periodice ale termenului de ordin zero, pentru parametrii mici, se calculează $\cos \beta$ pentru $\eta = \xi = e = 0$

$$\cos \beta = N_A \cdot S = -B_1 \cos M - B_2 \sin M \quad (3.30)$$

și se mediază peste anomalia medie a satelitului.

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \mathcal{G}(M)(B_2 \cos M - B_1 \sin M) dM = \\ & = R' L^2 \int_{\tau}^{\tau-2\pi} \cos(\tau - M) \sin(\tau - M) d(\tau - M) + \\ & R'' L^2 \int_{\tau}^{\tau-2\pi} |\cos(\tau - M)| \sin(\tau - M) d(\tau - M) = 0 \end{aligned} \quad (3.31)$$

Rezultatul integralei este zero deoarece au fost introduse noile variabile L și τ definite de $B_1 = L \cos \tau$ și $B_2 = L \sin \tau$ iar ambele integrale rezultante se reduc fiind integralele de funcții impare. Astfel, toate efectele de lungă perioadă asupra semiaxei mari apar deoarece forța de radiație solară asupra unei antene plane este demultiplicată cu parametrul e și ξ . (adică excentricitatea orbitală și unghiul de nealinie). Pentru sateliții cu excentricități foarte mici, ca sateliții geostaționari, unghiul de nealinie al antenei poate fi principalul factor responsabil pentru efectele pe termen lung asupra semiaxei mari, a cărui ordin de mărime este:

$$\dot{a}_{lp} \simeq \frac{2}{n} \left(\frac{A}{M} \cdot \frac{\Phi_{\odot}}{c} \right) \frac{\text{secțiunea transversală a antenei}}{\text{secțiunea transversală a satelitului}} \text{unghiul de nealinie} \quad (3.32)$$

unde $\frac{A}{M}$ reprezintă raportul arie/masă a satelitului și produsul $\frac{A}{M} \frac{\Phi_{\odot}}{c}$ dă ordinul de mărime a accelerației radiației solare totale, care este demultiplicat cu parametrul mic ξ .

Dacă antena nu este plană, dar nu prea complicată ca și formă, în așa fel încât $\mathcal{G}(M)$ poate fi scris printr-o formulă similară cu expresia (3.29), conținând numai cosinusul unghiului dintre direcția Soarelui și axa de simetrie a antenei, rezultatul anterior este adevărat iar în cazul în care excentricitatea este mică ar trebui să fie făcută pentru a încerca să păstreze unghiul de nealinie cât mai mic posibil.

Se vor calcula efectele perturbației radiației solare asupra argumentului longitudinii medii, $\lambda = M + \omega$. Poate fi scrisă ca sumă de doi termeni:

$$\lambda = \lambda_i + \varepsilon \quad (3.33)$$

unde λ_i este valoarea λ pentru un satelit ideal care se deplasează cu o oscilație a cărei mișcare este în orice moment

$$\lambda_i(t) = \int_0^t n(t') dt' \quad (3.34)$$

și $\varepsilon = \lambda - \lambda_i$ dă diferența dintre longitudinea medie a satelitului și valoarea acestuia pentru cazul ideal. Mișcarea medie de osculație a semiaxei mari satisface în orice moment cea de-a treia lege a lui Kepler.

$$n^2 a^3 = \text{constant} . \quad (3.35)$$

Diferențiind în raport cu timpul, se obține

$$\dot{n}(t) = -\frac{3}{2} \frac{n(t)}{a(t)} \dot{a}(t) . \quad (3.36)$$

Astfel, perturbația de ordinul întâi $\dot{n}(t)$ și $\dot{a}(t)$ (ca urmare a radiației solare) este dată de relația

$$\dot{n}(t) = -\frac{3}{2} \frac{n(0)}{a(0)} \dot{a}(t) , \quad (3.37)$$

unde $n(0)$ și $a(0)$ sunt valorile inițiale ale mișcării medii, respectiv a semiaxei mari. Plecând de la definiția lui λ_i (3.34) și ecuația (3.36), rezultă ecuația diferențială:

$$\ddot{\lambda}_i(t) = -\frac{3}{2} \frac{n(0)}{a(0)} \dot{a}(t) , \quad (3.38)$$

care dă imediat a doua derivată a lui λ_i , din $\dot{a}(t)$ calculată.

Pentru sateliții cu excentricitate foarte mică, forța perturbatoare produce un efect lung periodic având ordinul de mărime estimat de perioadă lungă în λ_i

$$(a\ddot{\lambda}_i)_{lp} \simeq 3 \cdot \left(\frac{A}{M} \cdot \frac{\Phi_{\odot}}{c} \right) \frac{\text{secțiunea transversală a antenei}}{\text{secțiunea transversală a satelitului}} \cdot \text{unghiul de nealiniere} \quad (3.38')$$

(din ecuațiile (3.32) și (3.38)). Unghiul de aliniament implicat în problema particulară studiată este foarte mic, accelerația de-a lungul longitudinii este întotdeauna de trei ori mai mare decât forța perturbatoare pe unitatea de masă. Rezultatul „paradoxal” provine din combinația ecuației (3.37) cu ecuația Gaussiană (3.38) pentru variația semiaxei mari.

Deși formulele ca (3.32) și (3.38) dau doar un ordin de mărime, sunt foarte folositoare deoarece dau o idee cu privire la efectele pe termen lung ale radiației solare pentru sateliții echipați cu antene și prin urmare permit estimarea cu precizie.

3.1.2 Efectele pe termen lung asupra altor elemente orbitale

Ecuația pentru variația lui ε (definită de ecuația (33)), valabilă și pentru excentricitate zero este dată de ecuația (Milan A. et al., 1987):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{R}{na} \left(-2 + \frac{3}{2} e \cos f \right) + \frac{T}{na} \frac{1}{2} e \sin f - \frac{W}{na} \text{ctg} I (1 - e \cos f) \sin(\omega + f) + O(e^2) \quad (3.39)$$

Ecuația conține componentele R , T și W ale forței perturbatoare și dezvoltarea în puteri s-a făcut până la ordinul întâi.

Considerăm cazul în care satelitul satisface condițiile:

- axa de simetrie (sau rotația) a satelitului este fixă în spațiul inerțial
- proprietățile optice ale suprafeței satelitului sunt constante în timp
- temperatura satelitului nu poate fi constantă

Să presupunem că forța radiației solare poate fi scrisă ca o funcție doar de vectorul poziției Soarelui:

$$\vec{F} = \vec{F}(S) \quad (3.40)$$

Într-un sistem de referință ortogonal având axa x - cu sensul spre perigeul orbitei satelitului și axa z - cu sensul spre vectorul moment unghiular orbital, versorii $\vec{e}_R$, $\vec{e}_T$ și $\vec{e}_W$ sunt dați de ecuația (3.12) iar componentele R , T și W ale forței (3.40) sunt:

$$\begin{aligned} R &= \vec{F}(S) \cdot \vec{e}_R = F_x(S) \cos f + F_y(S) \sin f \\ T &= \vec{F}(S) \cdot \vec{e}_T = -F_x(S) \sin f + F_y(S) \cos f \\ W &= \vec{F}(S) \cdot \vec{e}_W = F_z(S) \end{aligned} \quad (3.41)$$

Trebuie demonstrat că o forță care depinde numai de S nu dă naștere la nici un efect pe termen lung în ε de ordinul zero pentru excentricitatea satelitului.

Utilizând expresiile lui D'Alembert:

$$\begin{aligned} \cos f &= \cos M - e + e \cos 2M + O(e^2) \\ \sin f &= \sin M + e \sin 2M + O(e^2). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Pentru $\cos f$ și $\sin f$, ecuația (3.39) de ordin zero în e devine:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{2}{na} R - \frac{1}{2} \text{ctg} I \sin(\omega + f) W + O(e). \quad (3.43)$$

Pentru a calcula efectele pe termen lung, exprimăm $\dot{\varepsilon}$ în serii Fourier de anomalii medii ale Soarelui M_1 și satelitului M

$$\dot{\varepsilon} = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} \dot{\varepsilon}_{k_1 k_2} \exp i(k_1 M_1 + k_2 M) \quad (3.44)$$

Coefficienții Fourier $\dot{\varepsilon}_{k_1 k_2}$ sunt dați de:

$$\dot{\varepsilon}_{k_1 k_2} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{\varepsilon} \exp -i(k_1 M_1 + k_2 M) dM_1 dM \quad (3.45)$$

Iar efectele de lungă perioadă vor avea $k_2 = 0$ și coeficienții $\dot{\varepsilon}_{k_1 0}$. Efectele de perioadă lungă sunt date de:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{k_1 0} &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{na} \right) [F_x(S) \cos f + F_y(S) \sin f] \exp(-ik_1 M_1) dM_1 dM \\ &+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{na} \right) \text{ctg} I \sin(\omega + M) F_z(S) \exp(-ik_1 M_1) dM_1 dM \end{aligned} \quad (3.46)$$

Pentru excentricitatea de ordinul zero, $\cos f$ și $\sin f$ pot fi înlocuite cu $\cos M$ și $\sin M$ și avem:

$$\dot{\varepsilon}_{k_1 0} = 0 \quad (3.47)$$

datorită factorilor care conțin integralele definite de la 0 la 2π în $\sin M$ și $\cos M$.

Rezultă că toate efectele pe termen lung în longitudine determinate de termenul ε pentru un satelit astfel încât forța radiației solare poate fi scrisă conform (3.40) sunt demultiplicate cu factorul e . În plus, efectele nu se ridică la pătrat pentru că trebuie integrate doar o singură dată pentru a obține efectul în longitudine, în timp ce ecuația (3.38) trebuie integrată de două ori și de aceea perturbația „ λ_i ” crește pătratic cu timpul. O formulă pentru determinarea ordinului de mărime estimat a efectului de lungă durată a lui ε este următoarea:

$$(a\dot{\varepsilon})_{l_p} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} \right) eP \quad (3.48)$$

unde P este perioada orbitală a satelitului și $\frac{A\Phi_{\odot}}{Mc}$ dă ordinul de mărime a forței radiației solară pe unitatea de suprafață a satelitului.

Formula (3.48) nu mai este valabilă dacă satelitul are antenă exterioară. Forța de radiație solară asupra antenei poate fi exprimată conform cu (3.22) iar componentele lui S și N_A sunt date de relațiile (3.25) și (3.26). Componentele R_A și W_A ale forței (3.22) pentru ordinul zero în e și η sunt:

$$R_A = \vec{F}_A \cdot \vec{e}_R = \mathcal{G}(M)(B_1 \cos M + B_2 \sin M) - \mathcal{F}(M), \quad (3.49)$$

și

$$W_A = \vec{F}_A \cdot \vec{e}_W = \mathcal{G}(M)B_3. \quad (3.50)$$

Ecuția care corespunde relației (3.43) pentru antenă este:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}^A = & -\frac{2}{na} \mathcal{G}(M)(B_1 \cos M + B_2 \sin M) - \mathcal{F}(M) \\ & - \frac{1}{na} ctg I \sin(\omega + M) \mathcal{G}(M)B_3 + O(\eta) + O(e) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Coeficienții Fourier $\dot{\varepsilon}_{k_1 0}^A$ de lungă perioadă sunt:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{k_1 0}^A = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{2}{na} \right) \exp(-ik_1 M_1) \mathcal{G}(M)(B_1 \cos M + B_2 \sin M) - \mathcal{F}(M) dM_1 dM \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{na} ctg I \right) \exp(-ik_1 M_1) B_3 \sin(\omega + M) \mathcal{G}(M) dM_1 dM \end{aligned} \quad (3.52)$$

și nu se simplifică datorită factorilor $\mathcal{G}(M)$ și $\mathcal{F}(M)$ care provin din forța radiației solare (3.22) asupra antenei. Efectul de perioadă lungă asupra lui ε este diferit de zero deoarece forța radiației solare asupra antenei conține anomalia medie a satelitului. Ordinul de mărime al acestui efect în ε poate fi estimat sub forma:

$$(a\dot{\varepsilon}^A)_{lp} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A}{M} \cdot \frac{\Phi_{\odot}}{c} \right) \frac{\text{secțiunea transversală a antenei}}{\text{secțiunea transversală a satelitului}}. \quad (3.53)$$

În cazul corpului unei nave spațiale pentru care perturbația cauzată de radiația solară poate fi scrisă sub forma $F = F(S)$, astfel $W = F_z(S)$, nu apar efecte de perioadă lungă asupra înclinării și ascensiei drepte a nodului ascendent al satelitului de ordin zero în excentricitate. Pentru ordinul zero a lui e ecuațiile $\dot{I} = \frac{W}{H} r \cos(\omega + f)$ și

$\dot{\Omega} \sin I = \frac{W}{H} r \sin(\omega + f)$ devin:

$$\dot{I} = \frac{W}{H} a \cos(\omega + M) + O(e) \quad (3.53a)$$

$$\dot{\Omega} = \frac{1}{\sin I} \frac{W}{H} a \sin(\omega + M) + O(e), \quad (3.53b)$$

unde W este momentul unghiular orbital al satelitului.

$\dot{I}$, $\dot{\Omega}$ pot fi dezvoltati în serii Fourier de M_1 și M_2 . Termenii de lungă perioadă au $k_2 = 0$ astfel încât coeficienții lor sunt $\dot{I}_{k_1 0}$, $\dot{\Omega}_{k_1 0}$. Folosind ecuațiile (3.53) împreună cu $W = F_z(S)$ și păstrând doar ordinul zero în e , se obține:

$$\dot{I}_{k_1 0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{a}{H} F_z(S) \exp(-ik_1 M_1) dM_1 \int_0^{2\pi} \cos(\omega + M) dM = 0 \quad (3.54a)$$

și

$$\dot{\Omega}_{k_1,0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{a}{H \sin I} F_z(S) \exp(-ik_1 M_1) dM_1 \times \int_0^{2\pi} \sin(\omega + M) dM = 0 \quad (3.54b)$$

datorită integralelor în $\sin M$ și $\cos M$. Prin urmare, efectele de lungă perioadă în I și Ω sunt demultiplicate cu un factor e . Un ordin de mărime estimat al efectului de lungă perioadă în înclinare este dat de formula

$$(a\dot{I})_{lp} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} \right) eP, \quad (3.55)$$

Valoarea $\frac{A\Phi_{\odot}}{Mc}$ reprezintă ordinul de mărime a accelerației solare datorată radiației solare.

În cazul în care satelitul dispune și de o antenă, radiația solară perturbată poate fi scrisă conform (3.22), efectele de perioadă lungă asupra înclinației și a nodului apar de ordinul zero în parametri mici. Ecuatiile corespunzătoare ecuațiilor (3.53) pentru cazul cu antenă sunt

$$\dot{I}^A = \frac{W_A}{H} a \cos(\omega + M) + O(e) \quad (3.56a)$$

și

$$\dot{\Omega}^A = \frac{W_A}{H \sin I} a \sin(\omega + M) + O(e) \quad (3.56b)$$

unde $W_A = F_A \cdot e_w$ este componenta exterioară a accelerației perturbatoare datorată antenei dată de (50) de ordin zero în e și η . Coeficienții de perioadă lungă ai dezvoltării Fourier pentru $\dot{I}^A$ și $\dot{\Omega}^A$ sunt

$$\dot{I}_{k_1,0}^A = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{H} \exp(-ik_1 M_1) B_3 \mathcal{G}(M) \cos(\omega + M) dM_1 dM \quad (3.57a)$$

și

$$\dot{\Omega}_{k_1,0}^A = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{a}{H \sin I} \exp(-ik_1 M_1) B_3 \mathcal{G}(M) \sin(\omega + M) dM_1 dM. \quad (3.57b)$$

Acești nu mai sunt zero deoarece termenul $G(M)$ care apare în expresia forței (3.22) este o funcție de anomalia medie a satelitului. Un ordin de mărime estimat al efectului în înclinație datorat antenei poate fi dat de următoarea formulă:

$$(a\dot{I}^A)_{lp} \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A}{M} \cdot \frac{\Phi_{\odot}}{c} \right) P \frac{\text{secțiunea transversală a antenei}}{\text{secțiunea transversală a satelitului}} \quad (3.58)$$

Pentru determinarea efectului perturbației radiației solare asupra excentricității satelitului, se folosesc elementele h și k pentru cazul $e = 0$, $h = e \sin \omega$, $k = e \cos \omega$. Se vor calcula efectele lung periodice ai termenilor de ordinul zero în e în ipoteza unei perturbații de forma $F = F(S)$. Ecuatiile de ordinul zero în e sunt

$$\dot{h} = \frac{1}{na} - R \cos(\omega + M) + 2T \sin(\omega + M) + O(e) \quad (3.59a)$$

și

$$\dot{k} = \frac{1}{na} R \sin(\omega + M) + 2T \cos(\omega + M) + O(e) \quad (3.59b)$$

unde R și T sunt dați de expresiile (3.41). Exprimând $\dot{h}$ și $\dot{k}$ sub formă de dezvoltări în serii Fourier în funcție de M_1 și M și de termenii lungi periodici (de ordinul 0 în e):

$$\dot{h}_{k_1,0} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{1}{na} \right) \exp(-ik_1 M_1) (F_x(S) \cos M + F_y(S) \sin M) \cos(\omega + M) dM_1 dM \quad (3.60)$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{na} \right) \exp(-ik_1 M_1) (F_y(S) \cos M - F_x(S) \sin M) \sin(\omega + M) dM_1 dM$$

și

$$\begin{aligned} \dot{k}_{k_1 0} = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{na} \right) \exp(-ik_1 M_1) (F_x(S) \cos M + F_y(S) \sin M) \sin(\omega + M) dM_1 dM \\ & + \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{na} \right) \exp(-ik_1 M_1) (F_y(S) \cos M - F_x(S) \sin M) \cos(\omega + M) dM_1 dM. \end{aligned} \quad (3.61)$$

Acești coeficienți nu se reduc datorită integralelor în $\cos^2 M$ și $\sin^2 M$ (în loc de $\cos M$ și $\sin M$) care nu sunt egale cu zero. Astfel, sunt așteptate apariția efectelor periodice de lungă perioadă (de ex. aproximativ anuale) în excentricitate, provenind de la perturbația radiației solare asupra corpului satelitului, chiar și în ipoteza că aceasta poate fi scrisă sub forma (3.40) și de asemenea pentru un satelit pe o orbită circulară. O formulă generală pentru estimarea acestui efect lung periodic în excentricitate este următoarea (Milan A. et al., 1987):

$$(ae)_{ip} \cong \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A \Phi_{\odot}}{M_c} \right) P \quad (3.62)$$

Din nou, $\frac{A \Phi_{\odot}}{M_c}$ este la partea superioară a forței perturbatoare deoarece doar elementele din plan afectează excentricitatea satelitului. Acest efect arată ca o oscilație a distanței satelitului peste o perioadă orbitală; amplitudinea oscilației va varia estimativ conform (3.62) și cu o periodicitate anuală. În excentricitate sunt de asemenea efecte de periodicitate lungă de ordin zero ce provin de la forța radiației solare asupra antenei. Dar ele sunt mai mici decât efectele estimate în formula (3.62), datorită secțiunii transversale mai mică a antenei în comparație cu secțiunea transversală a corpului navei cosmice.

Sateliții geostaționari (sateliți cu perioada orbitală egală cu perioada de rotație a Pământului, excentricitate mică și înclinație mică față de planul ecuatorial al Pământului) sunt rezonanți cu coeficienții câmpului gravitațional al Pământului de rang inferior l și chiar egali cu valoarea diferenței $(l-m)$. Acest fapt cauzează o oscilație a longitudinii satelitului cu o perioadă foarte mare (de ordinul 10^3 zile) cu aproximativ 2 poziții de echilibru stabile, făcând ca pentru arce orbitale mai scurte de câteva luni, perturbația longitudinii cauzată de termeni geopotențiali de rezonanță, să se acumuleze aproape exponențial cu timpul.

Datele orbitale ale sateliților geostaționari pot fi folosite pentru a recupera coeficienții rezonanți; precizia obținută depinde de acuratețea modelării perturbației radiațiilor solare și de acuratețea datelor de urmărire. Principala limitare este cauzată de efectele de lungă perioadă a radiațiilor solare și mai puțin de tehnologia de urmărire disponibilă.

În cazul sateliților geostaționari stabilizați pe 3 axe ce sunt orientați continuu către Pământ, întreg satelitul poate fi văzut ca o antenă. Pentru efectul în semiaxa mare (de aici λ_i), nu este necesară folosirea pentru $\ddot{\lambda}_i$ a formulei (3.38) unde apare parametrul pentru nealinieria antenei. Aceasta se întâmplă deoarece, conform ecuației (3.27), termenul de ordin zero nu produce efectul de lungă perioadă, cu condiția ca componenta forței de radiație ce acționează asupra antenei să poată fi scrisă ca în expresia (3.29), care este bineînțeles nepotrivită pentru un satelit de formă complexă. Ca urmare, estimarea poate fi obținută din formula:

$$a \ddot{\lambda}_i = 3 \frac{A \Phi_{\odot}}{M_c}. \quad (3.63)$$

În plus, există de asemenea un efect asupra longitudinii cauzat de termenul ε

$$(a\Delta\varepsilon) \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} \right) P^2 \left(\frac{\Delta t}{1day} \right) \quad (3.64)$$

Efectul în înclinație poate fi estimat ca fiind:

$$(a\Delta I) \simeq \frac{1}{2\pi} \left(\frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} \right) P^2 \left(\frac{\Delta t}{1day} \right) \quad (3.65)$$

iar efectul în excentricitate este dat de formula (3.62). Se dau cifrele corespunzătoare pentru un satelit stabilizat tri-axial având raportul arie-masă $0.2 \text{ cm}^2/\text{g}$:

$$a\ddot{\lambda}_i = 2,8 \cdot 10^{-5} \text{ cm/s}^2 \quad (3.66)$$

și

$$\begin{aligned} a\Delta\varepsilon &\simeq 1,1 \cdot 10^4 \text{ cm} \times (\Delta t / 1day) \\ a\Delta I &\simeq 1,1 \cdot 10^4 \text{ cm} \times (\Delta t / 1day) \\ a\Delta e &\simeq 1,1 \cdot 10^4 \text{ cm} \times (\Delta t / 1day) \end{aligned} \quad (3.67)$$

Presupunând un arc orbital de durată $\Delta t \simeq 20$ zile, vor apărea următoarele efecte perturbative:

$$a\Delta\lambda_i \simeq \frac{1}{2} (a\ddot{\lambda}_i) \left(\frac{1}{2} \Delta t \right)^2 \simeq 100 \text{ km} \quad a\Delta\varepsilon \simeq 2 \text{ km} \quad (3.68)$$

și

$$a\Delta I \simeq 2 \text{ km} \quad a\Delta e \simeq 2 \text{ km} \quad (3.69)$$

Apar astfel estimate efectele totale ale perturbației radiației solare în longitudine, înclinație și excentricitate; s-au folosit formule foarte simplificate, din moment ce ele trebuie să conțină un factor numeric care să depindă atât de forma, cât și de proprietățile optice ale suprafeței navei spațiale. În mod clar, nu toate perturbațiile sunt imprevizibile; se poate realiza un model pe computer bazat pe cunoștințele legate de forma și proprietățile optice ale satelitului. În prezent, astfel de modele pentru sateliții stabiliizați tri-axiali, de formă complexă, nu pot avea o precizie mai mare de 10%, efectul perturbativ necunoscut poate fi estimat ca fiind de ordinul a 10 km în longitudine și 200 m pentru excentricitate și înclinație.

Spre exemplu, perturbația radiației solare în longitudine, maschează efectul coeficienților geopotențiali de rezonanță și de aceea, valoarea lor nu poate fi determinată cu o precizie relativ mai bună decât raportul dintre termenul necunoscut $a\Delta\lambda_i$ cauzat de presiunea radiației și de efectul cumulat în longitudine al coeficienților de rezonanță.

În loc să fie stabiliizați tri-axial, sateliții geostaționari pot fi stabiliizați doar pe o axă; în acest caz, ei sunt construiți de formă cilindrică, care se rotesc foarte repede și mai au o antenă exterioară desfășurată care se rotește în opoziție cu perioada orbitală. Pentru corpul navei spațiale, rezultatul (21) este valid și de aceea sunt așteptate efecte de perioadă lungă în λ_i care să se datoreze doar antenei și de asemenea să conțină unghiul de nealiniere (aceste antene mici au de obicei o formă simplă). Formula corespunzătoare ordinului de mărime este (3.38').

Ecuția (3.47) este satisfăcută și efectul în ε poate fi estimat de (3.48) pentru corpul navei și de (3.53) pentru antenă. În ceea ce privește efectul în înclinație, din nou ecuațiile (3.54) sunt satisfăcute și pot fi folosite formulele (3.55) pentru corpul satelitului și (3.58) pentru antenă. Efectul în excentricitate este dat de (3.62).

Folosind un raportul arie-masă de $0.1 \text{ cm}^2/\text{g}$, un unghi de nealiniere de 1° , un raport între antenă și secțiunea transversală a satelitului de $1/5$, o excentricitate de 0.001, precum și o lungime de arc orbital $\Delta t = 30$ de zile, se obține:

$$\begin{aligned} (a\ddot{\lambda}_i)_A &= 4,8 \cdot 10^{-8} \text{ cm/s}^2 \\ a\Delta\varepsilon &\simeq 5,4 \text{ cm} \times (\Delta t / 1day) \\ (a\Delta\varepsilon)_A &\simeq 1,1 \cdot 10^3 \text{ cm} \times (\Delta t / 1day) \\ a\Delta I &\simeq 5,4 \text{ cm} \times (\Delta t / 1day) \end{aligned} \quad (3.70)$$

$$(a\Delta I)_A \simeq 1,1 \cdot 10^3 \text{ cm} \times (\Delta t / 1 \text{ day})$$

$$a\Delta e \simeq 5,4 \text{ cm} \times (\Delta t / 1 \text{ day})$$

Și prin urmare, după 30 zile se obține o abatere longitudinală cauzată de antenă de aproximativ 0,4 Km (în timp ce în ε , efectele în e și I sunt mult mai mici). Datorită formei simple pe care o au atât corpul cât și antena, perturbația radiației solare poate fi modelată în acest caz până la o precizie de 5%, mai mare decât cea obținută în cazul sateliților stabilizați tri-axial. Totuși, aceasta nu va îmbunătăți perturbația în λ_i , deoarece acest efect provine din expresia (38), unde apare unghiul de nealinieră.

De aceea, se așteaptă ca partea necunoscută a efectelor radiației solare să fie de câteva sute de metri în longitudine, și respectiv de 15 și 80 de metri pentru termenii în înclinație și excentricitate.

Unii sateliți geostaționari sunt formați dintr-un cilindru care se rotește foarte repede cu un sistem de antenă încastrat în satelit, astfel încât să nu mai fie necesară nici o altă antenă exterioară desfășurată. Făcând uz de aceleași elemente ca cele din exemplul precedent, referitoare la corpul navei spațiale, la sfârșitul celor 30 de zile, vor apărea $a\Delta\varepsilon \simeq a\Delta I \simeq 1,6 \text{ m}$ $a\Delta e \simeq 1,6 \text{ km}$ și nici o contribuție de la λ_i (Milani A. 1987, p 70). Dacă modelul presiunii de radiație are o precizie de 5%, partea necunoscută a acestor efecte va fi foarte mică (aprox. 8 cm) pentru termenii ε și I , și de 80 m pentru termenul de excentricitate. Prin comparația acestor estimări cu cele precedente se observă că situația s-a îmbunătățit foarte mult. Efectul periodic de lungă durată, nemodelat, în longitudine, pentru un cilindru care se rotește foarte repede, fără o antenă exterioară, este neglijabil. Perturbația datorată termenului de excentricitate nu este mare.

3.1.3 Efectele pe termen scurt

Efectele periodice pe termen lung ale perturbației au fost estimate pentru o singură rotație a satelitului. Acestea sunt cele mai critice efecte care se întâlnesc atunci când sunt analizate datele referitoare la arcele orbitale lungi (adică cele cu multe rotații). Dar în unele cazuri, efectele pe termen scurt, care produc oscilații ale elementelor orbitale pe perioade comparabile cu perioada orbitală, nu sunt neglijabile. Se estimează tot prin dezvoltare în serii Fourier prin calcularea coeficienților $k_2 = \pm 1$;

Pentru semiaxa mare avem (Milan A. et al., 1987):

$$\dot{a}_{k_1, \pm 1} = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \dot{a} \exp[-i(k_1 M_1 \pm M)] dM_1 dM \quad (3.71)$$

unde, pentru ordinul zero în e

$$\dot{a} = \frac{2}{n} T + O(e), \quad (3.72)$$

folosind pentru T expresia (3.41), unde pentru ordinul 0 în e , f poate fi schimbat în M , și se obține:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{k_1, \pm 1} = & \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{2}{n} F_y(S) \exp(-ik_1 M_1) dM_1 \times \int_0^{2\pi} \cos M \exp(\pm iM) dM \\ & - \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \frac{2}{n} F_x(S) \exp(-ik_1 M_1) dM_1 \times \int_0^{2\pi} \sin M \exp(\pm iM) dM + O(e) \end{aligned} \quad (3.73)$$

unde integralele în dM nu sunt zero. În același mod antena contribuie la efectele periodice pe termen scurt în a pentru ordinul 0 în e . Drept urmare, se așteaptă să apară o variație în semiaxa mare cu aceeași perioadă ca în perioada orbitală a satelitului și cu o magnitudine de ordinul

$$(\dot{a})_{sp} \simeq \frac{2}{n} \frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} \quad (3.74)$$

care produce o oscilație de amplitudine

$$(\Delta a)_{sp} \simeq \frac{1}{2\pi^2} \frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} P^2 \quad (3.75)$$

Din ecuația (3.59) este evident că excentricitatea este supusă și ea unei perturbații periodice pe termen scurt, care rezultă dintr-o variație a distanței $(a\Delta e)_{sp}$ cam de același ordin cu (3.75). Ecuațiile trebuie să fie rezolvate împreună pentru a afla cum se combină cele două efecte.

Accelerația în λ_i corespunzătoare lui $\dot{a}$ este dată de:

$$(a\ddot{\lambda}_i)_{sp} \simeq 3 \frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} \quad (3.76)$$

dând naștere unei oscilații de amplitudine

$$(a\Delta\lambda_i)_{sp} \simeq \frac{3}{4\pi^2} \frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} P^2 \quad (3.77)$$

Un efect periodic pe termen scurt, de ordinul 0 apare în e (3.43), cauzat de componentele R și W ale forței perturbatoare, în timp ce doar componenta T apare în ecuația (3.72).

Considerând accelerația radiației solare estimată de forma $\frac{A\Phi_{\odot}}{Mc}$, avem:

$$(a\dot{\varepsilon})_{sp} \simeq \frac{1}{n} \frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} \quad (3.78)$$

și o oscilație în timpul fiecărei perioade orbitale de amplitudine

$$(a\Delta\varepsilon)_{sp} \simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} P^2 \quad (3.79)$$

în cazul satelitului geosincron cu $\frac{A}{M} = 0,1 \text{ cm}^2 / g$, amplitudinea oscilației diurne a semiaxei mari va fi

$$(\Delta a)_{sp} \simeq 17m \quad (3.80)$$

Cu cât este mai mică valoarea lui A/M , cu atât va fi mai mic efectul; și cu cât va fi mai bun modelul fizic, cu atât mai mică va fi componenta necunoscută.

În ceea ce privește efectul pe termen scurt al înclinației, se folosește ecuația (3.53a) de ordinul 0 în e și dezvoltarea în serii Fourier, în care coeficienții de scurtă durată $\dot{I}_{k_i, \pm 1}$ nu depășesc media. Același rezultat poate fi demonstrat prin folosirea ecuațiilor regularizate pentru $I = 0$, în cazul sateliților cu înclinație și excentricitate mică (ex. sateliții geostaționari). Va apărea un efect diurn a cărui amplitudine este de ordinul

$$(a\Delta I)_{sp} \simeq \frac{1}{4\pi^2} \frac{A\Phi_{\odot}}{Mc} P^2. \quad (3.81)$$

Pentru un satelit geostaționar cu $\frac{A}{M} = 0,1 \text{ cm}^2 / g$, amplitudinea maximă a oscilației diurne a planului orbital este

$$(a\Delta I)_{sp} \simeq 8,6m \quad (3.82)$$

Ca un exemplu, pentru măsurarea efectelor mișcării polare (datorită faptului că axa de rotație instantanee a Pământului oscilează în jurul axei momentului de inerție maxim cu un unghi de amplitudine de ordinul a 0,2 secunde de arc), trebuie să putem “detecta” o oscilație $(a\Delta I)_{pm}$ de aproximativ 40 m, pentru un satelit geosincron.

Efectul este diurn, deoarece stațiile de urmărire se rotesc în jurul axei de rotație instantanee a Pământului, și de aceea se vede planul orbital al satelitului ca oscilând cu

propria perioadă de rotație. Din moment ce conform ecuației (3.82) efectul perturbativ de scurtă perioadă în înclinație nu poate fi modelat, de obicei, cu o precizie de mai mult de câteva zeci de cm, efectul mișcării polare este mascat de aceasta, la o precizie de cel puțin 1%.

Deoarece scopul acestor sateliți din această clasă, în cazul nostru, este de a transmite unde radio, este necesară existența unor panouri solare și antene direcționale îndreptate către Pământ. Drept urmare, va apărea un efect de acumulare quadratic în longitudine a cărei magnitudine este o fracțiune semnificativă din valoarea dată de expresia (3.63). Având $\frac{A}{M} = 0,2 \text{ cm}^2 / g$, după cinci rotații orbitale, va apărea o deplasare de-a lungul traiectoriei de $\Lambda \times 6 \text{ km}$. Coeficientul Λ este o funcție complexă ce depinde de forma și altitudinea satelitului, dar nu mai mare de 0.1. Aceasta înseamnă că efemeridele sateliților GPS trebuie să fie actualizate frecvent cu noi date referitoare la traiectorie. Pentru ca GPS să poată determina poziția stațiilor cu o precizie de câțiva cm, ar fi necesare observații simultane de la mai multe stații. Prin “simultan” înseamnă că observațiile trebuie făcute la intervale de timp destul de mici astfel încât să mențină perturbațiile nemodelate pentru o porțiune de câțiva cm; asta înseamnă nu mai mult de câteva ore.

3.2 EFECTELE INDIRECTE ALE PRESIUNII RADIAȚIEI SOLARE

Fiecare satelit este perturbat prin interacțiunea sa cu radiația electromagnetică, nu numai prin presiunea radiației directe cauzată de lumina soarelui, dar și printr-un număr de alte moduri subtile și complexe.

3.2.1 Presiunea radiației reflectată de Pământ

După primii câțiva ani de analiză orbitală a lui LAGEOS, a devenit clar că mișcarea satelitului de-a lungul traiectoriei poate fi prevăzută și/sau modelată mult mai puțin precis decât în direcția transversală, chiar și pentru arce de câteva zile. Aceasta se datorează acțiunii unei forțe asemănătoare cu forța de frecare care rezultă într-o decelerație constantă de aproximativ $-3,4 \cdot 10^{-10} \text{ cm/s}^2$, asupra căreia se impune o modulație pe termen lung (cu o amplitudine a rădăcinii pătrate a mediei aritmetice de $1,3 \cdot 10^{-10}$).

Partea seculară cea mai importantă din această perturbație neprevăzută este foarte probabil să fie legată de un efect de frânare amplificat datorat ionilor pozitivi care populează plasmosfera Pământului și sunt focalizați de către potențialul electrostatic al satelitului. Dar acest efect nu poate explica în mod plauzibil toate componentele armonice pe termen lung care apar în spectrul efectului perturbativ nemodelat. Printre mecanismele fizice existente în urma cărora pot apărea aceste componente, unul dintre cele mai plauzibile este presiunea radiației Soarelui reflectată de Pământ. Dacă se are în vedere variațiile în puterea de reflexie a Pământului la diferite latitudini și în anotimpuri diferite (datorită variației distribuției apă-pământ și respectiv condițiilor meteorologice) forțele rezultante pot explica multe linii proeminente în zona de joasă frecvență a spectrului reziduurilor accelerației (Anselmo et al 1983b). Efectului perturbativ al albedo-ului pământului este cunoscut de mult timp. Spre exemplu, Smith (1970) menționa: “la aceste înălțimi unde perturbația albedoului este probabil mai mare decât rezistența aerului și pentru orbite care se află complet în lumina Soarelui, albedo-ul poate fi forța perturbatoare cea mai importantă în semiaxa mare”. Dar albedo-ul este influențat de atât de multe variabile geografice și meteorologice încât este foarte dificil de găsit un model atât de simplu pentru calculele mecanicii cerești care să descrie realist trăsăturile cele mai importante ale acestui fenomen. Deși nici un efect albedo nu poate fi responsabil pentru partea strict seculară a micșorării semiaxei mari, un număr mare de

modulații pe termen lung ale perturbației pot să apară atunci când modelul albedo-ului adoptat este destul de realistic.

Pentru obținerea efectelor pe termen lung ale perturbației, se folosește un procedeu de descompunere a accelerației corespunzătoare în componentele sale R , T și W , de-a lungul direcției radiale, în plan transversal și în afara planului; și atunci variația acestor componente, mediate pentru o rotație, determină efectele pe termen scurt, lung și secular. Dacă se consideră că albedo-ul Pământului nu are o variație mare pe scară largă, componenta R este aproximativ constantă pentru mai mult de jumătate de rotație, timp în care satelitul este în emisfera luminată și este neglijabilă în cealaltă jumătate; în timp ce componenta accelerației perpendiculară pe planul orbital imprimă un impuls înainte, atunci când satelitul intră în porțiunea neluminată a emisferei și un impuls înapoi atunci când intră în porțiunea luminată a acesteia. Se obține componenta T prin proiectarea componentei “pseudo-transversale” pe planul orbital al satelitului.

Ecuția Gauss pentru semiaxa mare a de prim ordin în excentricitate este

$$\dot{a} = \frac{2}{n} T + e(R \sin M + T \cos M) \quad (3.84)$$

unde M este anomalia medie iar n este mișcarea medie.

Pentru un satelit aflat pe o orbită aproape circulară (pentru Lageos $e = 0.004$), evoluția pe termen lung a semiaxe mari este dominată de media componentei T . Această medie ar dispărea dacă proprietățile optice ale suprafeței Pământului ar fi întotdeauna egale la punctele diametral opuse, deoarece aceste impulsuri ar fi egale; în cazul acesta efectele dominante vor fi demultiplicate cu un factor e . Există cel puțin 2 motive pentru care media lui T este diferită de 0. Mai întâi, emisferele nordică și respectiv sudică ale Pământului au o distribuție diferită mare-pământ (rezultând un albedo mediu diferit). În al doilea rând, când este iarnă în emisfera nordică, este vară în emisfera sudică și invers, producând o asimetrie sezonieră în ceea ce privește nebulozitatea, vegetația, gradul de acoperire cu zăpadă, etc.: acești factori pot influența substanțial cantitatea de lumină reflectată. Un model simplu care cuprinde aceste două fenomene, a fost propus de Anselmo și alții (1983b): media $\bar{T}$ a lui T după o rotație poate fi aproximată prin următoarea expresie:

$$\bar{T} = (A \cos \varphi_p \sin \lambda'_\odot + B \cos \varphi_p) \sin \varphi \quad (3.85)$$

unde:

φ - unghiul dintre planul orbital și planul liniei de demarcație ($0 \leq \varphi \leq \pi$),

$\sin \varphi$ - proiecția componentei “pseudo-transversale” a planului orbital,

φ_p - colatitudinea intersecției dintre planul orbital și planul format de linia de demarcație dintre partea luminată și cea neluminată (corespunzătoare intrării satelitului în zona de “zi”),

$\cos \varphi_p$ - factor care explică asimetria dintre cele două emisfere. Aceasta ar trebui să fie mult mai relevantă pe măsură ce linia de demarcație este traversată la o apropiere mai mare de poli, iar $\lambda'_\odot = \lambda_\odot - \delta$ este un unghi periodic, definit de longitudinea $\lambda_\odot$ a Soarelui și de o diferență de fază δ care exprimă schimbarea efectelor meteorologice în acord cu anotimpurile astronomice. Amplitudinile celor două efecte sunt date de coeficienții constanți B (pentru media asimetriei “emisferice”) și A (pentru variația sezonieră).

În ceea ce privește semnele lui A și B , dacă în genere emisfera sudică este mai luminată, media albedo-ului crește în timpul iernii, diferența de fază δ fiind mică, de unde rezultă $B, A > 0$.

Înclinația satelitului (I) și longitudinea nodului ascendent (Ω), permit obținerea în sistemul de coordonate ecuatorial, vectorul unitar N perpendicular pe planul orbital.

$$N = \sin I \sin \Omega, -\sin I \cos \Omega, \cos I \quad (3.86)$$

Direcția Soarelui este specificată de vectorul unitate S , care, în sistemul de referință ecuatorial (Fig. 3.3) cu axa x îndreptată către echinocțiul de primăvară, este dată de

$$S = [\cos \lambda_{\odot}, \sin \lambda_{\odot} \cos \varepsilon_{\odot}, \sin \lambda_{\odot} \sin \varepsilon_{\odot}] \quad (3.87)$$

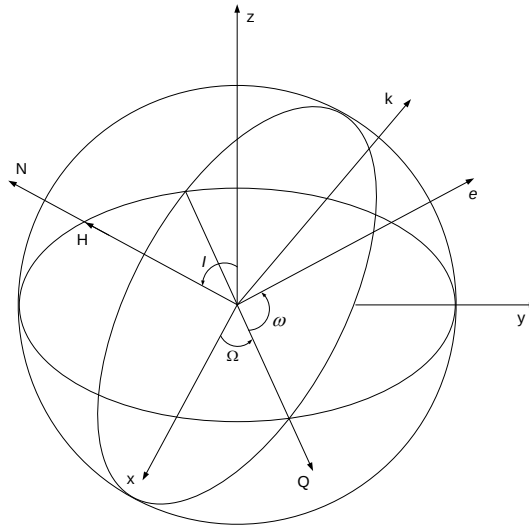


Fig. 3.3 Sistemul de coordonate inerțial x, y, z
și sistemul de referință ecuatorial

unde $\varepsilon_{\odot}$ este oblicitatea eclipticii. Linia de intersecție dintre planul orbital și planul linei de demarcație dintre partea luminată și cea neluminată a satelitului este definită de produsul vectorial $\vec{S} \times \vec{N}$; de aici colatitudinea φ_p la care orbita intră în jumătatea spațiului “zi” este dată de:

$$\cos \varphi_p = z \cdot (\vec{S} \times \vec{N}) / |\vec{S} \times \vec{N}| \quad (3.88)$$

unde versorul z este îndreptat către Polul Nord. Unghiul φ dintre cele două plane este dat de

$$\sin \varphi_p = |\vec{S} \times \vec{N}| \quad (3.89)$$

Înlocuind în ecuația (3.85) se obține pentru componenta medie a lui T

$$\vec{T} = [z \cdot (\vec{S} \times \vec{N})] (A \sin \lambda'_{\odot} + B) \quad (3.90)$$

Produsul triplu poate fi calculat din ecuațiile (3.86) și (3.87):

$$z \cdot (\vec{S} \times \vec{N}) = -\sin I \left[\cos^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\odot} \right) \cos \lambda_{\odot} - \Omega + \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\odot} \right) \cos \lambda_{\odot} + \Omega \right] \quad (3.91)$$

$\vec{T}$ se descompune în componente Fourier:

$$\begin{aligned} \vec{T} = & -\frac{1}{2} A \sin I \cos^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\odot} \right) \sin 2\lambda_{\odot} - \Omega - \delta \\ & -\frac{1}{2} A \sin I \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\odot} \right) \sin 2\lambda_{\odot} + \Omega - \delta \\ & -B \sin I \cos^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\odot} \right) \cos \lambda_{\odot} - \Omega - B \sin I \sin^2 \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{\odot} \right) \cos \lambda_{\odot} + \Omega \\ & -\frac{1}{2} A \sin I \sqrt{1 - \cos^2 \delta \sin^2 \varepsilon_{\odot}} \sin \Omega + \delta' \end{aligned} \quad (3.92)$$

unde unghiul de fază al oscilației Ω este

$$\delta' = \arctg \left(-\frac{\operatorname{tg} \delta}{\cos \varepsilon_{\odot}} \right) \simeq -\delta \quad (3.93)$$

Se neglijează excentricitatea Soarelui pentru a calcula frecvențele diferiților termeni, astfel încât $\lambda_{\odot}$ poate fi considerată constantă. Tabelul 3.1 prezintă suma amplitudinilor relative și a celor 5 componente de lungă perioadă rezultante ale accelerației T . Efectele semiaxei mari sunt obținute în mod simplu din ecuația (3.84): perturbațiile de lungă perioadă apar ca o consecință directă a afirmațiilor conținute în ecuația (3.85), adică a modelului albedo-ului asimetric nord-sud. Neglijând total efectele componente R ale accelerației, deși demultiplicate cu un factor e , totuși aceste efecte nu sunt neglijabile deoarece componenta radială medie este mult mai mare decât cea transversală, din moment ce atât componentele luminii difuze cât și cele ale luminii reflectate contribuie la aceasta pe aproximativ jumătate din lungimea orbitei. Rezultatele calculului dezvoltării Fourier pentru variațiile semiaxei mari arată că pentru excentricitatea lui LAGEOS, cele mai mari componente Fourier ale perturbației R sunt mai mici cu aproape un ordin de mărime decât cele mai mari componente ale lui T .

Tab. 3.1. Componentele Fourier ale accelerației T datorate luminii solare reflectate de Pământ pe orbita lui LAGEOS (Milani A. 1987, p. 82)

Argumentul	Perioada (zile)	Amplitudinea	Faza pentru termeni: Amplitudinea* $\sin(\text{argument} + \text{fază})$
$\lambda_{\odot} - \Omega$	560	0,90B	$3\pi / 2$
$\lambda_{\odot} + \Omega$	271	0,04B	$3\pi / 2$
$2\lambda_{\odot} - \Omega$	221	0,45A	$\pi - \delta$
$2\lambda_{\odot} + \Omega$	156	0,02A	$\pi - \delta$
Ω	1050	$0,47(1 - 0,16 \cos^2 \delta)^{1/2} A$	$\pi - \arctan(-0,92 \text{tg} \delta)$

Presiunea radiației reflectate a Pământului este un factor important în ceea ce privește perturbațiile de lungă perioadă ale semiaxei mari. Problema principală constă în complexitatea fenomenului luminii difuzate de o suprafață planetară variabilă cât și de atmosferă. Modul în care apare acest proces poate constitui un factor crucial în a determina dacă efectele de perioadă lungă apar sau nu.

Presupunând că:

a) radiația care vine de la suprafața Pământului este suma a două componente, una (lumina difuzată) care depinde numai de punctul P al suprafeței Pământului și al unghiului la zenit al satelitului, adică unghiul ζ dintre direcția satelitului (specificată de vectorul unitate s), și de normala pe elementul suprafeței de difuzie $dS(P)$ (vectorul unitate n); celălalt (lumina reflectată) depinzând de asemenea, de alte variabile, de exemplu direcția Soarelui.

b) Pământul este sferic și are proprietăți optice independente de longitudine (nu se ține cont de rotația Pământului).

c) se admite că presiunea radiației care acționează pe un satelit este proporțională cu intensitatea luminii $\mathcal{L}(\zeta, P) dS(P)$ care trebuie să fie direcționată de-a lungul lui s și care trebuie să depindă de distanța D dintre elementul suprafeței și satelit, dar nu și de poziția satelitului.

d) orbita satelitului este circulară.

atunci componenta tangențială a forței perturbatoare asupra satelitului, datorată presiunii radiației de la lumina difuzată, are valoarea medie 0, pentru o perioadă orbitală și aceasta nu poate produce un efect orbital de lungă durată.

Componenta tangențială a forței perturbatoare, mediată pentru o revoluție orbitală, este proporțională cu integrala:

se comporte ca și reflectori puternici). Mai mult, din moment ce fenomenele de reflexie sunt dominante pentru unghiurile mari la zenit ale Soarelui, ele pot influența mișcarea unui satelit, mai ales când satelitul “vede” Pământul pe măsură ce se luminează (mai ales în cele două porțiuni ale orbitei unde satelitul este pe punctul de a intra sau de a ieși din conul de umbră al Pământului). În aceste condiții, forța corespondentă are, inevitabil, o componentă tangențială semnificativă care nu depășește media dacă nu există simetrie perfectă între proprietățile de reflexie ale suprafeței dintre emisferele nordică și sudică.

Efectul perturbator de lungă durată apare ca o consecință a două forțe neechilibrate care acționează în zone ale orbitei, la latitudini opuse. Pe baza unei abordări seminumerică complexă, “Barlier și alții” (1986) au elaborat un astfel de model care explică:

- a) geometria părților de lumină reflectate;
- b) proprietățile reflexive ale suprafețelor apei;
- c) distribuția diferită apă-uscat în cele două emisfere;
- d) acoperirea cu nori și dependența de latitudine în cazul modificărilor de anotimp.

Forța perturbatoare de-a lungul traiectoriei a fost calculată numeric ca o funcție a celor trei argumente λ , $\lambda_{\odot}$ și Ω (plus încă câțiva parametri independenți care au același rol ca și A , B și δ) cu media peste λ , și în final descompuși în două armonice Fourier bi-dimensionale ale lui $\lambda_{\odot}$ și Ω . Componentele dominante Fourier ale perturbațiilor sunt aceleași cu cele date de simplul model analitic, cu toate că amplitudinile relative sunt cumva schimbate și apar armonici mai mari (cum ar fi $(2\lambda_{\odot} - 2\Omega_{\odot})$). Magnitudinea accelerației de perioadă lungă este tot de ordinul 10^{-10} cm/s^2 , adică în acord cu accelerația reziduală (Milani A., 1987, p. 86).

Un alt efect al presiunii radiației asupra Pământului este aceea produsă de radiația termică infraroșie emisă de planetă. Radiația termică reprezintă mai mult de 60% din totalul fluxului de energie care provine de la Pământ, și astfel, va apărea că acest mecanism poate da naștere la efecte comparabile cu, sau chiar mai mari decât acelea datorate albedo-ului. De fapt acestea nu apar din cauza faptului că Pământul emite radiație termică într-un mod mult mai simetric decât pentru lumina vizibilă: de exemplu, cea de-a doua, în mod evident manifestă o asimetrie zi-noapte, în timp ce simetria corespondentă în fluxul termic este de câteva procente (Raschke și Bandeen, 1970).

În mod clar, dacă radiația de ieșire ar fi simetric sferică și uniformă, ar produce doar o schimbare mică, a constantei “efective” gravitaționale dependentă de satelit (datorită proprietăților optice, precum și datorită coeficientului diferit arie-masă).

Pentru o aproximare mai exactă se poate considera o dependență de latitudine a câmpului radiației termice, dată de dezvoltarea armonică sferică, principala contribuție fiind datorată termenului zonal de gradul doi. Efectele perturbatoare corespunzătoare au fost calculate de Manakov (1977) și Schnal (1981), prin folosirea unor premise simple referitoare la legea emisiei aplicată pentru arii elementare. Acești autori au arătat că nu există efect de lungă durată asupra semiaxei mari a satelitului, asupra excentricității și înclinației de ordin 0 în excentricitate, în timp ce ω și Ω înregistrează schimbări seculare analoge (deși mult mai mici) referitor la cele cauzate de J_{20} gravitațional. Periodicitatea anuală poate apărea din schimbările sezoniere (periodice) ale armonicilor termice impare.

3.2.2 Emisia termică anizotropă

Un alt efect indirect al interacțiunii dintre radiația solară și satelitul artificial se datorează faptului că echilibrul distribuției temperaturii pe satelit devine neuniformă, datorită orientărilor diferite, referitoare la încălzirea solară a diferitelor părți ale corpului navei spațiale. Aceasta face ca să acționeze o forță netă, din moment ce fotonii termici emiși de zonele mai fierbinți ale suprafeței posedă mai multă energie cinetică decât cei care provin din zonele mai reci. Pentru un satelit care se rotește vor fi două asimetrii ale distribuției temperaturii.

Dacă se reprezintă satelitul ca pe o “planetă” mică, se poate vorbi de o asimetrie “sezonieră” care apare din faptul că unghiul ξ dintre axa de rotație și direcția către Soare nu este de 90° , și se modifică cu o periodicitate anuală, producând un flux de radiație diferit pe partea nordică și pe cea sudică a satelitului; pe de altă parte este prezentă o asimetrie “diurnă” între părțile de zi și cele de noapte (luminată și cea întunecată), ori de câte ori ξ nu este 0. În plus, o inerție termică finită va determina o diferență de timp între punctele cele mai fierbinți și cele sub-solare (efectele acestora din urmă sunt neglijabile când viteza de rotație este mare).

Pentru un corp orbital aproape sferic, care se rotește cu viteză foarte mare, fluxul de energie absorbit de elementele suprafeței satelitului este:

$$\alpha \Phi_{\odot} \vec{n} \cdot \vec{S} \quad (3.96)$$

unde:

α - este coeficientul de absorbție,

$\Phi_{\odot}$ - este constanta solară ($\simeq 1,38 \cdot 10^6 \text{ erg} \cdot \text{cm}^{-2} \cdot \text{s}^{-1}$)

Versorii $\vec{n}$ și $\vec{S}$ specifică direcțiile ortogonale (în exterior) pe elementul de suprafață și respectiv orientate către Soare.

Energia emisă pe unitate de arie este:

$$\varepsilon \sigma T^4 \quad (3.97)$$

unde:

$\sigma = 5,67 \cdot 10^{-5} \text{ erg/cm}^2 \cdot \text{s} \cdot \text{K}$ - este constanta Stephan–Boltzmann,

T - este temperatura suprafeței,

ε - este coeficientul de emisie, ($\varepsilon = 1$ pentru un corp negru).

Considerând starea termică a unui corp sferic, omogen, și care se rotește uniform fiind luminat de către Soare, prin introducerea unui sistem de referință a cărui axă z este orientată pe direcția axei de rotație a corpului (specificat de versorul $\vec{w}$), în timp ce axa y conține proiecția lui S pe planul xy și folosind coordonatele polare r , θ și φ se obține

$$\begin{aligned} \vec{n} &= [\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta] \\ \vec{S} &= [0, \sin \xi, \cos \xi] \\ \vec{n} \cdot \vec{S} &= \sin \theta \sin \varphi \sin \xi + \cos \theta \cos \xi \end{aligned} \quad (3.98)$$

Dacă rotația este destul de rapidă pentru ca distribuția temperaturii să atingă o stare asimetrică constantă (independentă de timpul t și unghiul la azimuth φ) ecuația de conductibilitate a căldurii ia forma ecuației lui Laplace (Kittel și Kroemer, 1980):

$$\nabla^2 T = 0 \quad (3.99)$$

iar soluția sa generală este o funcție armonică simetrică axial, care poate fi desfășurată sub forma:

$$T(r, \theta) = T_0 + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \left(\frac{r}{\Re} \right)^n P_n(\cos \theta) \quad (3.100)$$

unde:

T_0 - este temperatura medie,

$\Re$ - este raza sferei,

T_n - constituie coeficienții constanți,

P_n - sunt polinoamele Legendre de ordinul n .

Ca o condiție limită, trebuie luat în considerație echilibrul dintre fluxul de căldură care iese, produs de propagarea termică, $-\chi \partial T / \partial r$ (χ - este conductivitatea termică a corpului, considerată constantă) și emisia la suprafață (adică diferența dintre $\varepsilon \sigma T^4$ și fluxul de energie absorbit de la Soare $\alpha n S \Phi_{\odot}$:

$$\varepsilon\sigma T^4 - \alpha n \cdot S\Phi_{\odot} = -\chi \frac{\partial T}{\partial r}. \quad (3.101)$$

Cerințele simetriei axiale impun ca în ecuația (3.101) să se înlocuiască $\vec{n} \cdot \vec{S}$ cu media sa unghiulară:

$$s(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int n \cdot S d\varphi \quad (3.102)$$

integrala fiind calculată numai pentru emisfera luminată, pentru $\vec{n} \cdot \vec{S} > 0$. Dacă se alege $\xi \leq \frac{\pi}{2}$, expresia analitică a lui $s(\theta)$ este:

$$\begin{aligned} s(\theta) &= \cos \xi \cos \theta \quad \text{pentru } \theta \leq \frac{\pi}{2} - \xi \\ s(\theta) &= \frac{\sin \xi \sin \theta \cos \varphi_1}{\pi} + \frac{\cos \xi \cos \theta}{2\pi} (\pi - 2\varphi_1) \quad \text{pentru } \frac{\pi}{2} - \xi \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} + \xi \\ s(\theta) &= 0 \quad \text{pentru } \theta \geq \frac{\pi}{2} + \xi \end{aligned} \quad (3.103)$$

unde φ_1 este soluția ecuației $\vec{n} \cdot \vec{S} = 0$

$$\varphi_1 = -\arcsin(\operatorname{ctg} \theta \operatorname{ctg} \xi) \quad (3.104)$$

Pentru $\xi > \pi/2$, $s(\theta)$ poate fi derivat dacă se observă că atunci când ξ devine $(\pi - \xi)$, $s(\theta)$ se schimbă în $s(\pi - \theta)$. Se poate rescrie ecuația (3.101) introducând pe $s(\theta)$ și (dacă variațiile de temperatură sunt mai mici față de T_0) prin liniarizare

$$\varepsilon \left(\sigma T_0^4 + 4\sigma T_0^3 \sum_n T_n P_n(\cos \theta) \right) - \alpha s(\theta) \Phi_{\odot} = \frac{\chi}{\Re} \sum_n n T_n P_n(\cos \theta) \quad (3.105)$$

dezvoltând $s(\theta)$ într-o serie de polinoame Legendre

$$s(\theta) = \sum_n^{\infty} s_n P_n(\cos \theta) \quad (3.106)$$

astfel, ecuația (3.105) poate fi separată în următoarele relații (Milani A., 1987, p. 90):

$$\varepsilon \sigma T_0^4 = \alpha s_0 \Phi_{\odot} \quad (3.107)$$

$$T_n = \alpha s_n \Phi_{\odot} / (4\varepsilon \sigma T_0^3 + n\chi / \Re)$$

Ca și cazuri particulare, se poate obține din (3.103) $s_0 = 1/4$, $s_1 = \frac{1}{2} \cos \xi$; s_0 poate fi simplu dedus din ecuația conservării energiei. Ecuația (3.107) poate fi rescrisă sub forma:

$$4\sigma T_0^4 = \alpha \Phi_{\odot} / \varepsilon \quad (3.108)$$

$$T_n = s_n T_0 / (1 + n\chi T_0 / \alpha \Re \Phi_{\odot}).$$

Dacă se consideră $\alpha = \varepsilon$, temperatura medie a corpului este $T_0 = 280K$.

Pentru a determina forța datorată emisiei termice anizotrope, trebuie avut în vedere faptul că fiecare element de suprafață emite în direcția n un moment de flux egal cu $2\varepsilon\sigma T^4 / 3c$, unde c este viteza luminii, iar factorul $2/3$ ține cont de faptul că emisia urmează legea lui Lambert. Aceasta corespunde unei forțe nete care acționează asupra unui satelit și care este dată de $n(2\varepsilon\sigma T^4 dS / 3c)$. Forța totală F poate fi obținută prin integrare pe întreaga suprafață: datorită simetriei axiale, aceasta este direcționată de-a lungul lui w .

Calculul explicit dă (Milani A., 1987, p. 91):

$$F = -w \frac{2\varepsilon\sigma}{3c} \int \cos \theta \left(T_0^4 + 4T_0^3 \sum_n T_n P_n(\cos \theta) \right) dS$$

$$\begin{aligned}
&= -w \frac{4\pi\epsilon\sigma\mathcal{R}^2}{3c} \int_0^\pi \sin\theta \cos\theta \left(T_0^4 + 4T_0^3 \sum_n T_n P_n(\cos\theta) \right) d\theta \quad (3.109) \\
&= -w \left(\frac{32\pi\mathcal{R}^2\epsilon\sigma T_0^3 T_1}{9c} \right)
\end{aligned}$$

sau prin înlocuirea lui T în ecuația (3.108)

$$F = -w \left(\frac{4\pi\alpha\Phi_\odot\mathcal{R}^2 \cos\xi}{9c\beta} \right), \quad (3.110)$$

unde β este un coeficient de reducere dat de

$$\beta = 1 + \frac{\chi T_0}{\alpha\mathcal{R}\Phi_\odot}. \quad (3.111)$$

Se observă că din momentul în care ecuația liniarizată (3.105) este adevărată numai dacă $|T_n| \ll T_0$, aceasta arătând că $\beta \gg 1$ (adică conductivitate mare).

Valorile standard ale lui β sunt:

471 - pentru sfere de aluminiu omogene ($\chi = 2,1 \cdot 10^7 \text{ erg/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$),

79 - pentru o sferă de plumb omogenă ($\chi = 3,5 \cdot 10^6 \text{ erg/cm} \cdot \text{s} \cdot \text{K}$)

155 - pentru o sferă cu miez izolat ($\chi = 0$) având o rază de 25 centimetri și un înveliș exterior. Ordinul de mărime pentru variațiile de temperatură la suprafață, poate fi estimat dacă numim ΔT diferența de temperatură dintre polul nord și polul sud al satelitului, produse de termenul P_1 în ecuațiile (3.98) și (3.108). Se obține $\Delta T = T_0 \frac{\cos\xi}{\beta}$ și din moment ce

$T_0 = 280 \text{ K}$, pentru exemplele anterioare $T_0/\beta = 0,6$; $3,5$ și $1,8 \text{ K}$.

S-a arătat că accelerația datorată asimetriei temperaturii sezoniere este direcționată de-a lungul axei de rotație a satelitului, cu Aw în funcție de unghiul dintre axa de rotație în jurul axei proprii (w) și direcția către Soare (S). Dacă se consideră w constantă, adică dacă satelitul se rotește în jurul axei de moment maxim de inerție și nu este prezentă nici o forță de precesie și totodată dacă nu există nici o eclipsă, atunci Aw este o funcție doar în variabila S , iar rezultatele pentru presiunea radiației solare, chiar se aplică: perturbația nu cauzează efecte pe termen lung sau efecte seculare asupra semiaxei mari, ci doar efecte de ordinul unu în excentricitate, asupra longitudinii satelitului, a înclinației și a nodului. S-a neglijat complet contribuția albedo-ului Pământului și a radiațiilor infraroșii la starea termică a satelitului. Forța corespondentă este din nou direcționată mai ales de-a lungul lui w , dar mărimea și semnul său sunt determinate de relația geometrică dintre axa de rotație și planul orbital; în mod special, efectul semiaxei mari ar trebui să fie maxim atunci când w se află în planul orbital, și ar trebui să aibă o valoare medie pentru o orbită circulară și totodată un câmp de radiație terestru asimetric. De aceea, doar radiația albedo-ului, care este puternic dependentă de longitudine, poate avea o contribuție semnificativă.

Un alt fenomen este asimetria temperaturii diurne, care produce o forță perpendiculară pe axa de rotație. Având în vedere faptul că forța este proporțională cu diferența de temperatură, aceasta este foarte mică în comparație cu cea care apare datorită efectului “sezonier”, și de aceea, acest efect poate fi neglijat. Această concluzie nu este valabilă și în cazul unei nave cosmice fixe care se rotește încet, sau a uneia stabilizată tri-axial.

Când se știe că pentru un satelit există o diferență de temperatură “tipică” între două părți ale corpului său, ordinul de mărime al accelerației perturbative corespunzătoare poate fi evaluat din expresia

$$A_w \cong v\alpha \frac{A}{M} \frac{\Phi_0}{c} \frac{\Delta T}{T_0} \quad (3.112)$$

unde $\frac{A}{M}$, reprezintă valoarea medie a raportului arie-masă a satelitelui, și v este un coeficient care înlocuiește factorul $4/9$ dedus pentru satelitul sferic.

3.2.3 Undele radio

În cazul sateliților echipați cu sisteme de telecomunicații capabile să emită unde radio către Pământ, acestea în mod sigur vor produce un “recul” al presiunii de radiație, a cărui ordin de mărime este dat de presiunea radiației solare asupra satelitelui, împărțit cu un factor care dă eficiența fracțională a navei cosmice, prin convertirea energiei solare în unde radio.

Efectele perturbative corespunzătoare se pot evalua admitându-se că transmisia se face de-a lungul vectorului unitate $\vec{b}$, dându-se astfel axa de simetrie a antenei emițătoare. Acest lucru aduce o contribuție la termenul din ecuația (3.22), $F_A = \mathcal{G}(f)S + \mathcal{F}(f)N_A$ dată de $W(t)/Mc$ unde $W(t)$ este puterea emisă ca funcție de timp.

Aceasta produce:

a) un termen $\dot{\lambda}_i$ dat de $-2 \frac{\vec{\xi} W(t)}{nMc}$, care rezultă dintr-o perturbație seculară λ_i , (în opoziție cu efectele pe termen lung ale presiunii radiației solare) date de

$$a\Delta\lambda_i = -\frac{3}{2} \frac{\vec{\xi} \vec{W}}{Mc} t^2, \quad (3.113)$$

unde $\vec{W}$ este puterea medie emisă, iar $\vec{\xi}$ este unghiul de nealiniere al antenei (măsurat pe planul orbital) față de centrul Pământului.

b) un termen $\dot{\varepsilon}$ secular, dat de $2 \frac{W(t)}{naMc}$ adică ne demultiplicat de parametrul mic $\vec{\xi}$.

Acesta produce un efect în longitudine

$$a\Delta\varepsilon = -2 \frac{\vec{W}}{nMc} t \quad (3.114)$$

care este mai mare decât efectul λ_i (3.29) doar pentru un interval mai mic decât $4/3n\vec{\xi}$ adică dacă $\vec{\xi} \simeq 1^\circ$, asta însemnând 10 perioade orbitale.

Pentru un satelit GPS, cu $M \simeq 500Kg$, $\vec{W} = 400W$ și cu o perioadă orbitală de 12 ore, după 1 zi se obține o alunecare în lungul traiectoriei de aprox. 3 m, care în 10 zile devine de 50 m (Milani A., 1987, p. 94).

Efectele datorate transmisiei undelor radio asupra înclinației și a excentricității sunt demultiplicate de parametri mici (η și respectiv e). Ca urmare, aceste efecte sunt de obicei mai mici decât cele de ordinul 0 datorate radiației solare directe.

3.2.4 Eclipsele

Când un satelit intră în umbra Pământului, interacțiunea sa cu radiația solară este sistată brusc, ceea ce influențează, evident, evoluția orbitală. Pentru a modela acest efect este necesar să se determine punctele de intersecție a zonei de umbră cu orbita satelitelui. Dacă umbra ar avea o formă perfect cilindrică, anomalia excentrică a satelitelui (u) la intrarea și ieșirea din zona de umbră, ar putea fi determinată prin rezolvarea unei ecuații de gradul al doilea în $\sin u$ sau $\cos u$. Ca alternativă, se poate stabili un “criteriu al umbrei” care să permită o căutare pas-cu pas a granițelor umbrei de-a lungul orbitei (Aksnes 1976). Dar problema

principală constă în faptul că nu există discontinuitate, deoarece mărimea finită a discului solar și prezența atmosferei Pământului, generează o zonă de penumbră, iar forța datorată presiunii radiației solare scade ușor către 0, dinspre exteriorul către interiorul marginii penumbrei. Dacă această variație a forței ar fi liniară, efectul de penumbra ar fi explicat automat prin corelarea limitelor umbrei cu centrul Soarelui. Dar situația reală este mult mai complexă, nu numai din motive geometice, dar și datorită faptului că norii și refracția atmosferică pot schimba substanțial proprietățile penumbrei, iar aceste fenomene oarecum eretice sunt foarte dificil de modelat și/ sau de prevăzut. Atunci când este necesară determinarea cu precizie a orbitei, se poate face în două moduri: fie prin excluderea oricărei date anterioare din analiza datelor arcelor orbitale, inclusiv eclipsele, fie prin folosirea orbitelor cu excentricitate mică, pentru care efectele eclipsei pe termen lung asupra semiaxei mari sunt de ordinul întâi în e .

O metodă semi analitică pentru a analiza perturbația eclipsei a fost dezvoltată de Kozai (1961) și Aksnes (1976), pe baza presupunerii că forța de presiune a radiației acționează întotdeauna de-a lungul liniei Soare-satelit. Metoda generală conform ecuației lui Kozai, pentru modificările asupra semiaxei mari, prezintă o importanță deosebită datorită efectului său cumulativ asupra anomaliilor medii (Milani A., 1987, p. 95):

$$\Delta a = \frac{2}{n^2} \frac{A}{M} \frac{\Phi_{\odot}}{c} \left(\frac{a_{\odot}}{r_{\odot}} \right)^2 \left[R(0) \cos u + T(0)(1-e^2)^{1/2} \sin u \right]_{u_1}^{u_2}. \quad (3.115)$$

unde:

$R(0)$, $T(0)$ sunt componentele R și T ale accelerației presiunii de radiație evaluată la anomalia adevărată zero, adică la perigeu;

u_1 și u_2 sunt intervalele în anomalia excentrică corespunzătoare intrărilor și ieșirilor consecutive în zona de umbră.

Această ecuație dă, în general, întregul efect perturbativ (pe termen scurt) pe timpul unui arc orbital care se află în întregime expus soarelui și a cărei expunere este cuprinsă între u_1 și u_2 în anomalia excentrică; Ordinea de mărime a perturbației este în concordanță cu aceea dată de ecuația (3.77).

Dacă se identifică u_1 și u_2 cu anomaliile excentrice la două ieșiri și intrări consecutive ale umbrei, se poate observa ușor că, în general, efectele periodice pe termen scurt la două granițe ale umbrei nu se compensează, și acest decalaj rezidual va produce efecte periodice pe termen lung (argumentele de perioadă lungă vor conține unghiul $2(\lambda_{\odot} - \Omega)$, care controlează orientarea planului orbital față de Soare, și ca o consecință, va produce periodicitatea eclipselor).

Din ecuația (3.115) se deduc următoarele concluzii:

a) efectul de eclipsă asupra semiaxei mari este de prim ordin în e . Acest lucru poate fi văzut dacă se analizează cazul unei orbite circulare: dacă se măsoară anomalia adevărată de la proiecția direcției Soarelui pe planul orbital, $T(0)$ este zero, $u_1 = -u_2$ și deoarece $\cos u$ este par, Δa este zero. (forța este direcționată de-a lungul lui S , umbra este simetrică față de S , și ca urmare, din motive de simetrie, orice medie unghiulară a componentei T dispare pentru o orbită circulară).

b) pentru o revoluție care include o eclipsă, ordinul de mărime al efectului asupra semiaxei mari este dat de excentricitatea ori amplitudinea efectului presiunii radiației de perioadă scurtă înmulțit cu $\frac{u_2 - u_1}{2\pi}$.

(c) Nesiguranța referitoare la modelarea slabă a zonei de penumbră poate fi restabilită dacă se estimează că u_1 și u_2 pot fi afectați de o eroare care se încadrează între $0^{\circ}.1$ și 1° , datorită diametrului finit al Soarelui și totodată datorită grosimii unghiulare a atmosferei (care depinde de înălțimea satelitului).

Astfel, când orbita include eclipsele, pare foarte dificil evitarea erorilor de ordinul 10^{-3} al efectului presiunii radiației pe termen scurt per revoluție pentru elemente orbitale cum ar fi longitudinea nodului sau înclinația, pentru care termenii perturbativi de ordin zero în e nu dispar.

Un efect indirect al eclipselor apare ca urmare a faptului că, deoarece acestea opresc încălzirea solară, dacă inerția termică a satelitului nu este prea mare, distribuția temperaturii este drastic modificată și la fel și forța datorată emisiei termice. În general, această forță nu este direcționată de-a lungul lui S , de aceea, când apar eclipsele, media componentei sale T , nu este zero, nici chiar pentru o orbită circulară; aceasta însemnând că efectul combinat al eclipselor și al emisiei termice anizotrope pot produce o perturbație semnificativă. Timpul necesar pentru relaxarea gradientilor este de ordinul $R^2 q / \chi$ (q , R și χ constituie căldura specifică pe unitatea de volum, mărimea și conductivitate corpului).

3.3 EFECTUL POYNTING-ROBERTSON

Efectul Poynting-Robertson în mișcarea orbitală a sateliților artificiali este foarte redus din punct de vedere cantitativ și ca urmare este studiat împreună cu efectul presiunii radiației solare directe (Mioc 1980). În acest caz, accelerația perturbatoare are forma:

$$\vec{F} = F\vec{u}_O - F\left(\frac{v}{c}\right)(\vec{u}_O \cos \xi + \vec{v}_0) \quad (3.116)$$

unde:

$\vec{u}_O$ este versorul direcției Soare-Pământ,

$\vec{v}_0$ este versorul vitezei satelitului,

ξ este unghiul format de raza vectoare geocentrică a satelitului cu vectorul viteză.

Mai mult, F este dat de relația (Mioc V., 1980):

$$F = k_r (d_O/r_O)^2 k_O(S'/mc) \quad (3.117)$$

în care: k_r este coeficientul reflectivității satelitului,

d_O este distanța medie Soare-Pământ,

r_O este distanța Soare-Pământ,

S' este aria medie a secțiunii perpendiculare pe direcția radiației incidente,

m este masa satelitului iar c este viteza luminii.

Cei doi termeni din membrul drept al expresiei (3.116) reprezintă aportul presiunii radiației solare directe (fără efect Poynting-Robertson) și respectiv aportul efectului Poynting-Robertson în accelerația perturbatoare. Pe baza relației (3.116), Radziewsky și Chernikov (1965) au calculat efectele produse de acești doi factori perturbatori în parametrul orbitei (p) și excentricitate (e) pe o revoluție:

$$\begin{aligned} \Delta p &= -6\pi F \left(\frac{e}{n^2} \right) \sqrt{1-e^2} k_1 - 2\pi F \left(\frac{a}{n} \right) (1-e^2) (2+k_1^2+k_2^2)/c \\ \Delta e &= 3\pi F \left(\frac{\sqrt{1-e^2}}{an^2} \right) k_1 + \pi F \left(\frac{1-e^2}{en} \right) \left(1 - \frac{2(1-\sqrt{1-e^2})}{e^2} \right) \frac{k_2^2 - k_1^2}{c} \end{aligned} \quad (3.118)$$

relații în care se observă separarea dintre cele două influențe perturbatoare și în care:

$$k_1 = \sin \omega \cos(\lambda_O - \Omega) - \cos \omega \sin(\lambda_O - \Omega) \cos i,$$

$$k_2 = \cos \omega \cos(\lambda_O - \Omega) + \sin \omega \sin(\lambda_O - \Omega) \cos i$$

3.4 PERTURBAȚII CAUZATE DE FRÂNAREA AERODINAMICĂ

Rezistența atmosferei terestre este principala accelerație perturbatoare ne-gravitațională care influențează mișcarea sateliților care se deplasează pe orbită la o altitudine de până la 1.000 km. După această valoare efectul frânării aerodinamice devine neglijabil, fiind mult mai mic în comparație cu alte accelerații perturbatoare. Cel mai influențat parametru orbital este anomalia medie M .

Valoarea accelerației perturbatoare a frânării aerodinamice se determină cu formula:

$$\vec{a}_{atm} = -\frac{1}{2}k \frac{A}{m} \rho V \vec{V} \quad (3.119)$$

unde:

k – coeficient aerodinamic, specific satelitului. Valorile sunt cuprinse între 2 și 4. Pentru sferă este 2,2 iar pentru cilindru este 3,0;

A – aria secțiunii maxime normale pe vectorul vitează al satelitului;

m – masa satelitului;

ρ – densitatea atmosferei;

V – viteza satelitului.

Dintre aceste mărimi cel mai greu de determinat este densitatea atmosferei, care depinde de natura reacțiilor chimice din atmosferă (în special reacțiile fotochimice). La o anumită înălțime h densitatea este dată de formula:

$$\rho(h) = \rho_0 e^{\frac{h-h_0}{H_0}} \quad (3.120)$$

unde:

$$H_0 = \frac{RT}{g} \quad R = 287 \frac{J}{Kg \cdot K}$$

ρ_0 - densitatea la nivelul minim h_0 ;

g – gravitația;

T – temperatura în grade Kelvin.

Sateliții GPS evoluează la altitudinea de 20.200 Km și deci nu sunt perturbați de frânarea aerodinamică.

3.5 MODELE EMPIRICE ALE PRESIUNII RADIAȚIEI SOLARE PENTRU SATELIȚII GPS

3.5.1 Noțiuni introductive

Sunt descrise dezvoltarea și testarea unui set de modele empirice noi și îmbunătățite ale presiunii de radiație solară pentru sateliți GPS bazate pe datele orbitale precise de-a lungul a 4 ani și jumătate. Aceste modele empirice prezintă performanțe îmbunătățite atât în orbită cât și în predicție. Îmbunătățirea în orbită este de 80% pentru sateliții Block IIR și de 24% pentru sateliții Block IIA. Precizia în predicția pe orbită a crescut cu 58% pentru sateliții Block IIR și cu 32% pentru sateliții din clasa Block IIA. Aceste noi modele sunt denumite GSP.IIR.04. pentru sateliții GPS Block IIR și GSP.IIA.04 pentru sateliții Block IIA (Bar-Sever Y. et al., 2004).

S-au făcut eforturi încă de la apariția conceptului GPS pentru a realiza modele ale presiunii de radiație solară de înaltă fidelitate pentru o determinare exactă a orbitei. Aceste eforturi pot fi clasificate în două modalități de abordare: aceea a modelului terestru bazat pe modelele de pre-lansare și măsurătorile proprietăților optice și termice ale satelitului.

Abordarea empirică folosește mișcarea orbitală a satelitului, obținută prin observație, pentru a deduce forțele radiației solare (și alte forte) care acționează asupra satelitului.

Acest studiu este o continuare a cercetărilor efectuate de Bar-Sever. Se extinde dezvoltarea în serii Fourier a lui Bar-Sever pentru grade mai mari și se aplică metoda empirică la sateliții

Block IIR. Abordarea empirică pentru modelul de presiune a radiației solare urmează următorii pași:

- 1) Selectarea datelor orbitale adevărate, zilnice pentru 4 ani de observare a orbitelor zilnice (ianuarie 1998 – iunie 2002), cu precizie, și formarea arcelor orbitale de 10 zile.
- 2) Construirea unui model parametrizat de presiune a radiației solare, generarea unei traiectorii nominale, și estimarea parametrilor care să se potrivească cel mai bine cu traiectoria pentru fiecare arc orbital de 10 zile
- 3) Combinarea estimărilor tuturor arcelor sateliților într-un singur set de parametri model pentru sateliții Block IIA și Block IIR, folosind metoda celor mai mici pătrate și informația covarianței totale de la fiecare arc de 10 zile.
- 4) Evaluarea modelului derivat cu datele orbitale și testele de predicție.

3.5.2 Selectarea orbitelor adevărate

Pentru orbitele adevărate au fost alese efemeridele zilnice cele mai precise produse de JPL. Cu o eroare tri-dimensională (3D) de aproximativ 5-cm rms (rădăcina pătrată a mediei aritmetice), aceste orbite sunt printre cele mai exacte dintre cele disponibile în mod curent. Ele sunt bazate pe modelul empiric de presiune a radiației solare dezvoltat de Bar-Sever, pentru sateliții Block II/IIA, precum și pe modelul terestru Lockheed Martin pentru sateliții Block IIR.

Orbitele GPS derivate din JPL care folosesc datele de urmărire de la sol sunt cel mai exact reprezentate în sistemul de referință al Pământului. Cu toate acestea, integrarea dinamică a orbitei se realizează, mult mai convenabil, într-un sistem inertial. De aceea se face transformarea orbitei din sistemul de referință fix al Pământului în sistemul inertial J2000 utilizând informațiile oferite de Serviciul Internațional de Rotație a Pământului (IERS) Final (Bulletin B), Parametrii de Orientare de pe Pământ (EOP).

Prin concatenarea efemeridelor consecutive zilnice pot fi formate arce multi-day foarte lungi. S-a stabilit că nu este deloc practic să se integreze orbitele GPS pentru mai mult de câteva zile datorită erorii prin trunchiere. Cel mai practic este să se realizeze integrări de 10 zile; de aici, s-a trecut la construirea unor arce adevărate cu o durată de 10 zile.

Tab 3.2. acoperirea orbitei zilnice rms în sistemul inertial J2000 care folosește două seturi de valori EOP pentru a transforma orbitele adevărate din sistemul fix legat de Pământ în sistemul inertial J2000, în centimetri.

Perioada de timp	IERS EOP			JPL – derivat EOP		
	Radial [cm]	Perpendicular pe traiectorie [cm]	În lungul traiectoriei [cm]	Radial [cm]	Perpendicular pe traiectorie [cm]	În lungul traiectoriei [cm]
1 iulie 1998 7 iulie 1998	2,7	4,3	6,3	2,7	11,7	12,3
1 iulie 2002 7 iulie 2002	2,1	2,3	2,8	2,1	11,3	11,5

Pentru asigurarea calității orbitelor reale, au fost căutate toate soluțiile de orbite zilnice de la 1 ianuarie 1998 până la 1 iulie 2002 făcându-se selecția pentru toate arcele de 10 zile consecutive pentru care acoperirea zilnică a orbitei 3D rms a fost mai bună de 20 cm. Au fost găsite un total de 2414 arce (Tab 2.). Aceste date orbitale sunt folosite în două grupe separate; una pentru sateliții Block IIA și alta pentru sateliții Block IIR. Rezultatele potrivirii orbitei din fiecare grupă au fost combinate în seturi separate de parametri ai modelului de presiune a radiației solare. Arcele de eclipsă au fost excluse din această analiză.

3.5.3 Parametrizarea modelului și combinarea soluțiilor

Conform Fliegel și alții (1992), modelul radiație solare se exprimă ca o dezvoltare în serii Fourier trunchiată în ε , unde ε reprezintă unghiul dintre Pământ - satelit - Soare. Pentru sateliții GPS, geometria satelit – Soare este o funcție numai de ε . Forțele sunt exprimate în sistemul convențional GPS legat de satelit. Pentru sateliții Block II/IIA axa de coordonate Z este orientată către centrul Pământului, coordonata Y pe direcția panourilor solare, iar coordonata X este orientată pe direcția generală a Soarelui. Pentru sateliții Block IIR, coordonata Z este definită la fel ca pentru Block II/IIA, dar sensul coordonatelor X și Y este inversat cu 180° .

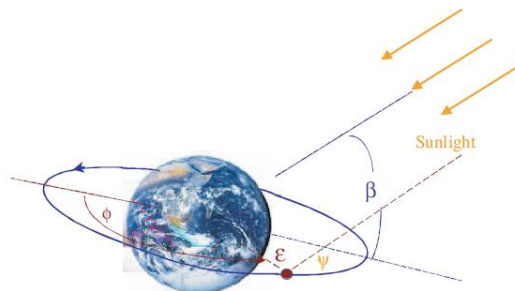


Fig. 3.5. Geometria Pământ – satelit – Soare (Bar-Sever Y. et al., 1966)

Pornind de la dezvoltarea în serii Fourier trunchiată a modelelor T20 și T30, s-a continuat experimentul cu adăugarea altor câtorva termeni pentru fiecare coordonată. Termenii au fost adăugați atunci când calitatea a fost considerată slabă și când remanențele ulterioare au arătat lipsa armonicilor. Au fost îndepărtați termeni atunci când aceștia nu au putut fi determinați decât foarte slab sau când erau corelați cu alți termeni. S-a ajuns la dezvoltarea trunchiată pentru cele trei componente ale presiunii radiației solare (în m/s^2):

$$\begin{aligned} F_x &= s10^{-5}(AU/r)^2 / m(S_X_1 \sin \varepsilon + S_X_2 \sin 2\varepsilon + S_X_3 \sin 3\varepsilon + S_X_5 \sin 5\varepsilon + S_X_7 \sin 7\varepsilon) \\ F_y &= C_Y_0 + 10^{-5}(AU/r)^2 / m(C_Y_1 \cos \varepsilon + C_Y_2 \cos 2\varepsilon) \\ F_z &= s10^{-5}(AU/r)^2 / m(C_Z_1 \cos \varepsilon + C_Z_3 \cos 3\varepsilon + C_Z_5 \cos 5\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.121)$$

Tab.3.3 Numărul de arce orbitale de 10 zile selectate pentru modelare

Cantitatea	Block IIA	Block IIR
Numărul de sateliți	17	6
Arcele ne eclipsate	1723	289
Arcele eclipsate	334	68

unde:

s - este un factor de scală adimensional;

AU - este unitatea astronomică ($(1,4959787066 \cdot 10^8 \text{ km})$);

r - este distanța dintre nava spațială și Soare exprimată în km;

m - este masa satelitului în kg.

Dimensiunea dezvoltării în serii Fourier din interiorul parantezelor este de ordinul 10^{-5} Newtoni.

Presiunea radiației solare asupra unui satelit este variabilă datorită variațiilor temporale ale fluxului solar și a masei satelitului, și datorită efectelor de îmbătrânire a suprafeței satelitului. Aceste variații temporale nemodelate sunt absorbite în estimarea parametrului model, în arcul individual al fiecărui satelit printr-un factor de scală general. Se consideră fiecare soluție satelit-arc ca pe o scală cu care se poate realiza un model adevărat. Pentru o estimare mai exactă a modelului adevărat din toate exemplele individuale, trebuie să fie combinați parametrii estimați ai tuturor arcelor și să se țină cont de variațiile arc-arc pe scală. Pentru a rezolva scala variabilă, se exploatează faptul că S_X_1 și C_Z_1 sunt

componentele dominante ale forței radiației (reprezentând “împingerea” față de Soare). Astfel sunt așteptate variații mici de la arc la arc în norma vectorilor (S_X_1 , C_Z_1) cu o valoare de 1. Pentru fiecare arc, se definește U_0 ca normă a vectorilor (S_X_1 , C_Z_1). Procesul de combinare se realizează conform următorilor pași:

1. Se definește $\hat{U}_0$ ca medie ponderată a lui U_0 pentru toate soluțiile arc-satelit.
2. Se scalează componentele X- și Z- ale vectorului parametru din fiecare soluție satelit-arc cu $\hat{U}_0 / U_0$.
3. Se găsește media ponderată a tuturor vectorilor scalați. Rezultatul este vectorul parametru combinat.

3.5.4 Caracteristicile parametrilor modelului

Soluțiile arc-satelit individuale sunt împărțite în 2 grupe pentru Block IIA și Block IIR iar presiunea empirică a radiației solare este considerată a fi dependentă de o singură variabilă ε , constantă în timp. Se constată că unele sunt de fapt variabile. Comportamentul acestor parametri inconstanți se dovedește a fi periodic în β , unghiul dintre direcția Soare –Pământ și planul orbital al satelitului. Când această dependență de β este destul de puternică, ca în cazul C_Y_1 și S_X_2 este de preferat să se excludă acest parametru din combinația tuturor arcelor de 10 zile, care capătă constantă în timp, iar acest parametru se exprimă ca o funcție explicită a lui β , de forma:

$$F(\beta) = A + B \sin \beta + C / \sin \beta + D \cos \beta \quad (3.122)$$

Această dependență a lui C_Y_1 de β poate fi explicată ca o întârziere în poziția sateliților GPS, dependență care devine din ce în ce mai variabilă pe măsură ce β se apropie de 0.

EVALUAREA MODELULUI ȘI A VALORILOR PARAMETRILOR

Ca și la Bar-Server, parametrul C_Y_0 (înclinarea Y) este exclus din procesul de combinare. De asemenea, se exclude din procesul de combinare parametrul C_Y_1 , care arată o dependență semnificativă față de unghiul β , dar se ignoră variabilitatea aparentă a parametrului S_X_2 care se combină ca o constantă de-a lungul arcelor de 10 zile. Aceasta simplifică într-o oarecare măsură implementarea modelului, având doar un impact minor asupra calității modelului datorită mărimii relative reduse a lui S_X_2 . Se introduce separat parametrul C_Y_1 , ca funcție de β . Acest model este denumit GSPM.0.4 a (pentru Modelul “GPS de presiune solară 2004, versiunea a”) și are denumirea specifică GSPM.IIA.0.4a pentru sateliții Block IIA și GSPM.IIR.0.4a pentru sateliții Block IIR.

Luând în considerare 4 ani și jumătate de folosire a datelor orbitale GPS exacte, s-a obținut un model empiric pentru forța de radiație solară. Noul model este un set de funcții Fourier ale unghiului Soare-satelit-Pământ în sistemul legat fix de satelitul GPS. Modelul empiric prezintă o îmbunătățire a performanței atât în determinarea cât și în prognozarea orbitei GPS. Rădăcina pătrată a mediei aritmetice a orbitei este îmbunătățită cu 80% pentru sateliții Block IIR și cu 24% pentru Block IIA. Aceste modele empirice sunt GSPM.IIA.04 și GSPM.IIR.04 pentru Block IIA și respectiv Block IIR. Versiuni ușor diferite, (a) și (b) sunt oferite pentru fiecare bloc.

Procesul de proiectare bazat pe modelul terestru (opus celui bazat pe date de zbor) este realizat prin modelarea navei spațiale ca pe o colecție de componente, fiecare cu forma sa proprie, precum și cu caracteristicile optice și termice.

Procesul de proiectare bazat pe datele de zbor are următoarele avantaje:

- reflectă comportamentul actual pe orbită
- este mult mai precis

- poate fi reglat și ajustat la infinit (odată ce s-a stabilit procesul de proiectare, el poate fi realizat în mod nedefinit și poate fi îmbunătățit continuu și ajustat în funcție de condițiile de mediu în schimbare și de gradul de îmbătrânire al navei spațiale)
- poate constitui un instrument de învățare despre comportamentul sateliților plasați pe orbită și de asemenea poate fi un instrument de semnalare și monitorizare a sateliților care creează probleme.

Pentru a descrie modelul dinamic al mișcării unui satelit artificial în câmpul gravitațional necentral al Pământului, se dau valorile accelerațiilor perturbatoare semnificative pentru orbitele principalilor sateliți geodezici (Kovalevsky 1989, p. 101), inclusiv ale sateliților GPS (Tab. 3.4):

Tabelul 3.4. Magnitudinea principalelor categorii de accelerații perturbatoare

Sursa accelerației	Magnitudinea accelerației [$\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$]				
	STARLETTE AJISAI LAGEOS GPS				
	semiaxa mare	7337 km	7869 km	12266 km	26559 km
	arie/masă [m^2/kg]	$9.6\cdot 10^{-4}$	$5.3\cdot 10^{-3}$	$6.9\cdot 10^{-4}$	$2\cdot 10^{-2}$
Accelerația centrală		7.4	6.4	2.6	0.6
Armonica a 2-a		$8\cdot 10^{-3}$	$6\cdot 10^{-3}$	$2\cdot 10^{-3}$	$5\cdot 10^{-5}$
Alte armonice		$1\cdot 10^{-4}$	$9\cdot 10^{-5}$	$5\cdot 10^{-6}$	$3\cdot 10^{-7}$
Atracția celui de-al 3-lea corp		$1\cdot 10^{-6}$	$1\text{-}2\cdot 10^{-6}$	$2\cdot 10^{-6}$	$5\cdot 10^{-6}$
Mareele continentale		$2\cdot 10^{-7}$	$1\text{-}2\cdot 10^{-7}$	$3\cdot 10^{-8}$	$1\cdot 10^{-9}$
Mareele oceanice		$3\cdot 10^{-8}$	$2\cdot 10^{-8}$	$2\cdot 10^{-9}$	$1\cdot 10^{-9}$
Frânarea aerodinamică		$1\text{-}2\cdot 10^{-10}$	$1\text{-}2\cdot 10^{-10}$	$3\cdot 10^{-11}$	0
Presiunea radiației solare directe		$5\cdot 10^{-9}$	$5\cdot 10^{-8}$	$4\cdot 10^{-9}$	$1\cdot 10^{-7}$
Albedoul		$5\cdot 10^{-10}$	$8\cdot 10^{-9}$	(empiric) $7\cdot 10^{-11}$	$1\cdot 10^{-9}$

CAPITOLUL IV. REZULTATE NUMERICE DIN ANALIZA CANTITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS

CALCULUL ORBITEI SATELIȚILOR GPS

Pentru calculul orbitei sateliților GPS se utilizează două metode. Prima metodă se bazează pe soluțiile analitice ale ecuațiilor planetare ale lui Lagrange, exprimate în termenii elementelor orbitale Kepleriene. A doua metodă se bazează pe soluția numerică a ecuației diferențiale de ordinul 2 a mișcării relative perturbate:

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \frac{\partial \vec{\mathfrak{R}}}{\partial r} \quad (4.1)$$

exprimată în coordonate carteziane, față de un sistem de referință geocentric rectangular ecuatorial inerțial (cu axa Ox orientată către punctul vernal adevărat la epoca J_{2000}), în care $\mathfrak{R}$ este suma accelerațiilor perturbatoare ce acționează asupra satelitului GPS.

4.1 SOLUȚIA ANALITICĂ

Această metodă constă în determinarea expresiilor algebrice ale forțelor care acționează asupra satelitului și integrarea lor. De regulă se utilizează elementele orbitale kepleriene. Pentru rezolvarea problemei analitic se consideră o orbită de referință, de regulă orbita kepleriană neperturbată, iar orice abateri de la această orbită sunt considerate perturbații. În cazul forțelor ne-conservative se utilizează sistemul de ecuații Newton-Euler.

Principalele avantaje ale acestei metode sunt următoarele:

- relații explicite între forțele perturbatoare și variația elementelor orbitale;
- observarea evoluției mișcării orbitale;
- posibilitatea de previziune a stabilității pe termen lung;
- determinarea rapidă, cu o singură evaluare a unei ecuații a valorii numerice a unui element orbital la un anumit moment de timp.

Principalele dezavantaje ale acestei metode sunt:

- numărul mare de perturbații și complexitatea lor duce la complicarea relațiilor matematice;
- perturbațiile datorate forțelor ne-conservative sunt dificil de modelat în expresii analitice;
- soluțiile analitice sunt soluții aproximative, deoarece depind de dezvoltarea seriilor până la anumite grade.

Soluția analitică utilizată în calculul precis al arcelor scurte de orbită GPS reprezintă o extensie a teoriei perturbațiilor de ordinul 1. Pentru determinarea efectelor introduse de armonica a 2-a zonală (de coeficient C_{20} sau J_2) este necesar să se includă și perturbațiile de ordinul 2; în principiu, aceasta necesită a doua soluție a ecuațiilor planetare Lagrange, utilizând soluția de ordinul 1 (liniară) pentru a evalua membrul drept al acestei ecuații.

Efectele de ordinul 2 se includ în soluția analitică, utilizând metoda dezvoltării în serie Taylor. De exemplu, pentru un element Keplerian oarecare q_i , derivata sa în raport cu timpul poate fi dezvoltată astfel:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{dq_i}{dt}(q_0) + \sum_{j=1}^6 \frac{\partial q_i}{\partial q_j}(q_j - q_j^0) + \dots \quad (4.2)$$

unde q_0 este o orbită Kepleriană de referință utilizată în soluția liniară de ordinul 1, având rolul unui nod al seriei Taylor. Derivata de ordinul 2 a elementului orbital q_i în raport cu timpul este:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{d\Delta_1 q_i}{dt} + \frac{d\Delta_2 q_i}{dt} \quad (4.3)$$

Perturbațiile de ordinul 2 se vor calcula cu relația:

$$\Delta_2 q_i = \int \left[\sum_{j=1}^6 \frac{\partial \dot{q}_i}{\partial q_j} \Delta_1 q_j \right] dt. \quad (4.4)$$

Ținând cont de (4.2) și (4.3) în (4.4), $\Delta_1 q_i$ sunt soluțiile integrării ecuațiilor Newton-Euler. Funcția de forță perturbatoare $\mathfrak{R}$ are forma (Kaula W.M., 1966):

$$\mathfrak{R} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{a_e}{a} \right)^\ell \sum_{m=0}^{\ell} \sum_{p=0}^{\ell} \sum_{q=-\infty}^{\infty} F_{\ell mp}(i) G_{\ell pq}(e) S_{\ell mpq}(\omega, \Omega, M, \theta). \quad (4.5)$$

Pentru sateliții GPS sunt valabile următoarele observații:

- pentru simplificare, se integrează ecuațiile Newton-Euler cu un singur termen din (4.5)
- perturbațiile de ordinul 2 sunt necesare doar pentru e, ω, M .
- suma după indicele j în ecuația (4.4) necesită doar includerea soluțiilor de ordinul 1 pentru e, ω, M .
- sunt necesari doar doi termeni ai dezvoltării funcției de forță perturbatoare pentru fiecare Δq_j .

Soluția de ordinul 2 se obține prin izolarea termenilor de ordinul 2 mai importanți, și este în concordanță cu soluția numerică, singurul dezavantaj constituindu-l durata mare de calcul (Nakiboglu, S.M. et al., 1985).

O soluție de ordinul 2 mult mai eficientă este cea a lui Asknes și Kinoshita, bazată pe o transformare a sistemului de ecuații diferențiale într-o formă canonică. Mai precis, Asknes a utilizat variabilele lui Hill, în timp ce Kinoshita a adoptat o formă modificată a variabilelor lui Delauney. În ambele cazuri, perturbațiile de ordinul 2 sunt de ordinul a 1m ori mai mici pentru orbitele sateliților GPS.

Eliminând efectul singularității în elementele orbitale Kepleriene, diferențele dintre metodele analitică și numerică se elimină, în principiu. Pentru a obține o precizie de 1m în calculul poziției geocentrice a satelitului, se va încorpora în soluția finală și dezvoltarea de ordinul 2.

4.2 SOLUȚIA NUMERICĂ

Soluția numerică a orbitei sateliților GPS se bazează pe integrarea numerică directă a ecuațiilor diferențiale de ordinul 2 ale mișcării relative perturbate, în coordonate carteziene. Această metodă, este întâlnită sub două forme: metoda Cowell și metoda Encke. Avantajul metodei numerice este formularea simplă a ecuațiilor de mișcare.

În coordonate carteziene, acestea au forma:

$$\ddot{x}_i = -\frac{\mu}{r^2} \frac{x_i}{r} + \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_i} \quad \text{pentru } i = 1, 2, 3 \quad (4.6)$$

în care r este raza vectoare geocentrică iar $\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x_i}$ este suma accelerațiilor perturbatoare cauzate

de necentralitatea câmpului gravitațional terestru, atracția gravitațională luni-solară și presiunea de radiație solară.

Coordonatele x_i sunt definite într-un sistem de referință inerțial, geocentric ecuatorial. Ecuatiile de mișcare sunt complete atunci când fiecare accelerație perturbatoare este evaluată și transformată în acest sistem de referință.

Partea perturbatoare (necentrală) a potențialului gravitațional terestru se poate exprima, pentru gradul ℓ și ordinul m (cunoscute, cu $\ell < m$), în coordonate polare terestre (r, θ, λ) , astfel:

$$V_{\ell m} = \frac{\mu a_e^\ell}{r^{\ell+1}} [C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda] \cdot P_{\ell m}(\cos \theta). \quad (4.7)$$

În care coordonatele polare sunt legate de coordonatele carteziene geocentrice ecuatoriale terestre CTS $[x'_i, i = 1, 2, 3]$ prin relațiile:

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} \\ \lambda &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{x_2'}{x_1'} \right) \\ \theta &= \operatorname{tg}^{-1} \left(\frac{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}}{x_3'} \right). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Accelerațiile perturbatoare cauzate de acest potențial perturbator (și materializate de gradientul său), se exprimă în termenii coordonatelor carteziene geocentrice ecuatoriale terestre (CTS) prin relațiile:

$$\frac{\partial V_{\ell m}}{\partial x'_i} = \frac{\partial V_{\ell m}}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x'_i} + \frac{\partial V_{\ell m}}{\partial \lambda} \cdot \frac{\partial \lambda}{\partial x'_i} + \frac{\partial V_{\ell m}}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial x'_i} \quad (4.9)$$

unde:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\ell m}}{\partial r} &= \frac{\mu a_e^\ell}{r^{\ell+2}} (\ell+1) [C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda] \cdot P_{\ell m}(\cos \theta) \\ \frac{\partial V_{\ell m}}{\partial \theta} &= \frac{\mu a_e^\ell}{r^{\ell+1}} [C_{\ell m} \cos m\lambda + S_{\ell m} \sin m\lambda] \cdot P'_{\ell m}(\cos \theta) \cdot \sin \theta \\ \frac{\partial V_{\ell m}}{\partial \lambda} &= \frac{\mu a_e^\ell}{r^{\ell+1}} \cdot m \cdot [-C_{\ell m} \sin m\lambda + S_{\ell m} \cos m\lambda] \cdot P_{\ell m}(\cos \theta), \end{aligned} \quad (4.10)$$

iar $P'_{\ell m}(\cos \theta)$ este derivata funcției Lagrange asociate în raport cu argumentul $(\cos \theta)$. Al doilea set de derivate din (4.9) se diferențiază direct utilizând (4.8). În final, componentele pe axe ale accelerației perturbatoare cauzate de necentralitatea câmpului gravitațional al Pământului, în coordonate CTS, vor avea forma de mai jos (doar componenta z a acestei accelerații):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_{\ell m}}{\partial x'_3} &= -\frac{3}{2} \cdot \frac{\mu a_e^\ell (\ell+1) (C \cos \xi + S \sin \xi) \left(1 - \cos \left(\frac{2}{\zeta} \right) \right) x'_3}{\left(\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} \right)^{(\ell+3)}} + \\ &\quad \frac{6\mu a_e^\ell (C \cos \xi + S \sin \xi) \cos \left(\frac{1}{\zeta} \right) \sin \left(\frac{1}{\zeta} \right)^2 (1 + \zeta^2) \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}}{\left[\left(\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2} \right)^{(\ell+1)} \cdot \zeta^2 \cdot x_3'^2 \right]} \end{aligned} \quad (4.11)$$

unde:

$$\xi = \frac{m}{tg\left(\frac{x'_2}{x'_1}\right)}, \quad \zeta = tg\left(\frac{\sqrt{x_1'^2 + x_2'^2}}{x_3'^2}\right). \quad (4.12)$$

Transformarea relației (4.11) din CTS în CIS (Conventional Inertial System) se face cu ajutorul celor 4 matrice de rotație, pe baza relației:

$$x'_i[CTS] = R^M R^S R^N R^P x_i[CIS]. \quad (4.13)$$

Argumentele matricilor $\vec{R}$ se bazează pe noile definiții adoptate pentru epoca de referință J_{2000} ($J = 2451545.0$). Accelațiile datorate atracției gravitaționale luni-solare pot fi exprimate direct în sistemul de coordonate adoptat. Accelația cauzată este proporțională cu forța de atracție luni-solară exercită asupra satelitului GPS minus accelerația geocentrului cauzată de aceeași forță perturbatoare.

Rezultă:

$$\ddot{x}_i^L = -\frac{Gm^*}{\Delta^2} \left(\frac{x_i - x_i^*}{\Delta} \right) - \frac{Gm^*}{r^{*2}} \frac{x_i^*}{r^*} \quad (4.14)$$

unde m^* este masa celui de-al treilea corp (în cazul acesta Luna și Soarele), r^* și x_i^* sunt raza vectoare geocentrică și coordonatele celui de-al treilea corp, respectiv Δ este distanța satelit GPS – al treilea corp (fig. 4.1).

Mișcarea celui de-al treilea corp este modelată utilizând elementele orbitale medii ale IAU 1980.

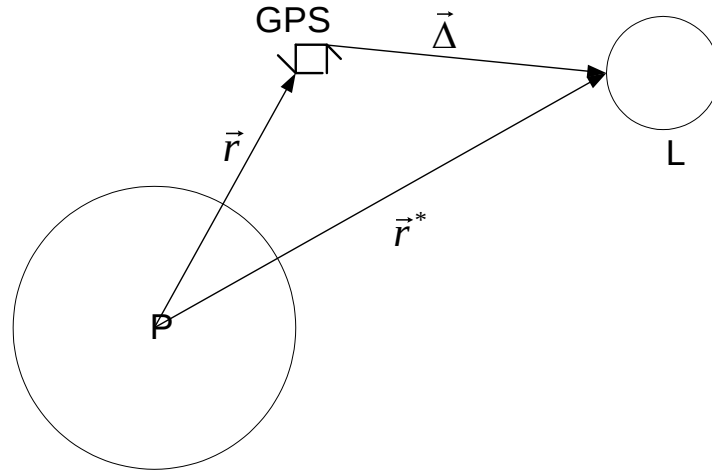


Fig. 4.1 Influența gravitațională a celui de-al treilea corp

Accelerația cauzată de presiunea radiației solare se poate exprima direct în coordonate carteziane CTS, astfel:

$$\ddot{x}_i^P = -\nu P_S (1 + C_r) \left(\frac{A}{m} \right) \left(\frac{x_i^* - x_i}{r^*} \right) \quad (4.15)$$

unde P_S este constanta presiunii de radiație solară (în N/m^2), $\frac{A}{m}$ este raportul arie-masă al satelitului GPS, C_r este constanta de reflectivitate iar ν este factorul de eclipsă, care poate lua valori între 1 (când satelitul este iluminat de Soare) și 0 (când satelitul se găsește în umbra Pământului). De remarcat că presiunea de radiație solară directă produce cel mai însemnat efect în semiaxa mare a orbitei și deci implicit în variația perioadei orbitale (Mioc 1980).

În aceste condiții, ecuația (4.6) devine:

$$\ddot{x}_i = -\frac{\mu}{r^3} \cdot x_i + \left[\frac{\partial V}{\partial x_i} + \ddot{x}_i^L + \ddot{x}_i^P \right] \quad (4.16)$$

în care termenii din paranteză sunt exprimați în CIS și sunt dați de (4.11), (4.14) și (4.15). Integrarea ecuației diferențiale de ordinul doi a mișcării relative perturbate a satelitului GPS (4.16) se poate face utilizând un algoritm Runge-Kutta.

4.3 METODA RUNGE KUTTA

În principiu, cu condiții inițiale definite (în speță poziția $\vec{x}_0$ și viteza $\vec{\dot{x}}_0$ la epoca t_0 de lansare), ecuațiile (4.16) pot fi integrate numeric. Ca referință se introduce orbita kepleriană. Astfel, doar diferențele mici dintre accelerația totală și accelerația centrală trebuie integrate. Integrarea va avea ca rezultat creșterea (incremental) $d\vec{x}$ care atunci când se însumează vectorului de poziție calculate pe elipsa de referință, furnizează poziția corectă. Ecuațiile diferențiale de ordinul 2 se transformă de regulă într-un sistem de 2 ecuații diferențiale de ordinul 1, astfel:

$$\begin{aligned} \vec{\dot{x}}(t) &= \vec{\dot{x}}(t_0) + \int_{t_0}^t \left[d\vec{\dot{x}}(t_0) - \frac{\mu}{r^3(t_0)} \vec{x}(t_0) \right] dt \\ \vec{x}(t) &= \vec{x}(t_0) + \int_{t_0}^t \vec{\dot{x}}(t_0) dt. \end{aligned} \quad (4.17)$$

Integrarea numerică a acestui sistem se realizează aplicând un algoritm Runge Kutta de ordinul IV. Principiul metodei este următorul:

Fie $y(x)$ o funcție definită pe intervalul $x_1 \leq x \leq x_2$ și $y' = dy/dx$ derivata de ordinul unu în raport cu variabila x . Soluția generală a unei ecuații diferențiale de ordinul unu de forma:

$$y' = dy/dx = y'(y, x)$$

rezultă prin integrare, atribuind o valoare numerică inițială constantei de integrare $y_1 = y(x_1)$. Se împarte intervalul de integrare în n subdiviziuni egale și suficient de mici $[\Delta x = (x_2 - x_1)/n]$, unde n este un întreg arbitrar. Atunci, diferența dintre valorile funcționale succesive se obține din media ponderată

$$\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x) = \frac{1}{6} \left[\Delta y^{(1)} + 2(\Delta y^{(2)} + \Delta y^{(3)}) + \Delta y^{(4)} \right] \quad (4.18)$$

unde:

$$\begin{aligned} \Delta y^{(1)} &= y'(y, x) \Delta x \\ \Delta y^{(2)} &= y' \left(y + \frac{\Delta y^{(1)}}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x \\ \Delta y^{(3)} &= y' \left(y + \frac{\Delta y^{(2)}}{2}, x + \frac{\Delta x}{2} \right) \Delta x \\ \Delta y^{(4)} &= y'(y + \Delta y^{(3)}, x + \Delta x) \Delta x. \end{aligned}$$

Astfel, plecând de la valoarea inițială y_1 corespunzătoare argumentului x_1 , funcția poate fi calculată pentru argumentele succesive $x_1 + \Delta x$, $x_2 + \Delta x$, etc. În exemplul de mai sus, variabila x trebuie interpretată ca variabilă de timp (t).

Această metodă poate fi aplicată și pentru integrarea sistemului de ecuații Newton-Euler și Lagrange, acestea având avantajul că sunt la ordinul unu.

Fie ecuațiile Newton-Euler sub forma:

$$\dot{q}_i = \dot{q}_i[q_j, t] \equiv \dot{q}_i\{a, e, i, \omega, \Omega, M\} \quad (4.19)$$

unde q_i este oricare din elementele kepleriene ale satelitelui. Integrarea sistemului (4.19) se face pe un pas constant de timp Δt (suficient de mic) astfel:

$$\begin{aligned} w_i &= \dot{q}_i[q_j(t), t] \Delta t \\ x_i &= \dot{q}_i\left[q_j(t) + \frac{w_j}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right] \Delta t \\ y_i &= \dot{q}_i\left[q_j(t) + \frac{x_j}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right] \Delta t \\ z_i &= \dot{q}_i\left[q_j(t) + \frac{y_j}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right] \Delta t \\ q_i(t + \Delta t) &= q_i(t) + \frac{w_i}{6} + \frac{x_i}{3} + \frac{y_i}{3} + \frac{z_i}{6}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

4.4 REZULTATE NUMERICE

S-a considerat o orbită kepleriană (neperturbată) pentru condițiile inițiale la data de 10.02.2011 ora 00.00 UT:

$$\begin{aligned} x_{ai} &= 2425.8676; & v_{xai} &= 3.8327; \\ y_{ai} &= -15215.1157; & v_{yai} &= 0.4529; \\ z_{ai} &= 21743.2188; & v_{zai} &= -0.1055; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= 1.0027379093 \cdot \text{UT1} + v_o + \Delta\Psi \cos \varepsilon \\ \text{UT1} &= \text{UTC} - d\text{UT1}, (d\text{UT1} = 0.162626) \\ v_o &= 24110^{s.54841} + 8640184^{s.812866} \cdot T + 0^{s.093104} \cdot T^2 - 6^{s.2} \cdot 10^{-6} \cdot T^3 = 580910482.2 \\ T &= \frac{JD - 2455602.5}{36525} = \frac{2455602.5}{36525} = 67,23073237 \\ \Delta\Psi \cos \varepsilon &= -62.61453881 \\ \theta &= 1.0027379093 \cdot (\text{UT} - 0.162626) + 580910482.2 - 62.61453881 \end{aligned}$$

Valorile argumentelor pentru precesie conform Buletinului IERS:

$$\begin{aligned} x_p &= 0.03428 \\ y_p &= 0.20863. \end{aligned}$$

S-a aplicat algoritmul Runge – Kutta de ordinul 4 așa cum a fost prezentat anterior, pentru integrarea ecuației mișcării neperturbate (1.1). Programul de calcul a determinat pentru perioada selectată valorile razei vectoare și vitezei (r, v) , pentru fiecare pas de integrare, pe care le-a scris într-un fișier text. De asemenea, programul a rezolvat problema lui Laplace și a determinat, plecând de la (r, v) valorile celor 6 elemente kepleriene $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$ și componentele accelerațiilor.

S-a considerat mișcarea satelitelui de studiu perturbată succesiv de o singură perturbăție: armonica zonală J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 , atracția gravitațională a Soarelui și a Lunii, efectele relativiste și presiunea radiației solare directă.

În același mod, programul de calcul a avut ca date de ieșire fișierele text corespunzătoare elementelor orbitale (r, v) și $(a, e, i, \omega, \Omega, M)$. Pentru fiecare element orbital în parte s-a făcut diferența dintre valorile sale obținute în cazul neperturbat și valorile

sale în cazul perturbat, rezultând variația respectivului element orbital sub influența perturbației considerate. Fiecare variație în parte s-a analizat și i s-a întocmit graficul de variație.

S-a realizat integrarea orbitei pentru o perioadă de 2,1 zile (50 ore) și de 20,8 zile (500 ore) pentru anumite perturbații. Mai întâi se exemplifică accelerațiile perturbatoare care acționează asupra unui satelit pe orbită medie (satelit GPS).

Sunt prezentate apoi erorile orbitale induse de principalele perturbații asupra satelitului geostaționar.

Pentru determinarea erorilor orbitale ale sateliților GPS trebuie să se țină cont de armonicile zonale J_2, J_3, J_4, J_6 , de perturbația Lunii, a Soarelui și a presiunea radiației solare.

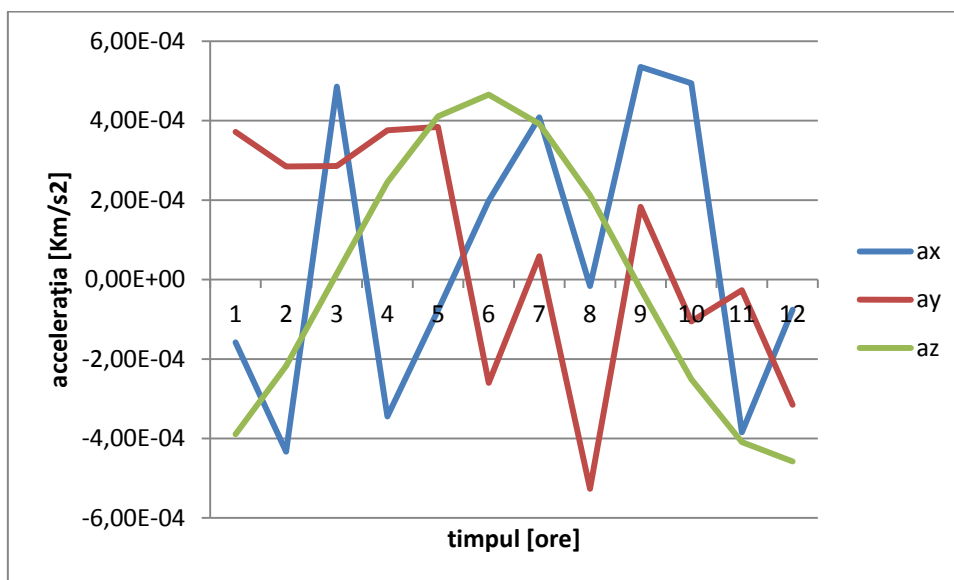
În continuare sunt analizate efectele perturbațiilor asupra orbitei satelitului GPS și sunt sintetizate în tabelul următor.

Tabel 4.1 Valori ale accelerațiilor perturbatoare

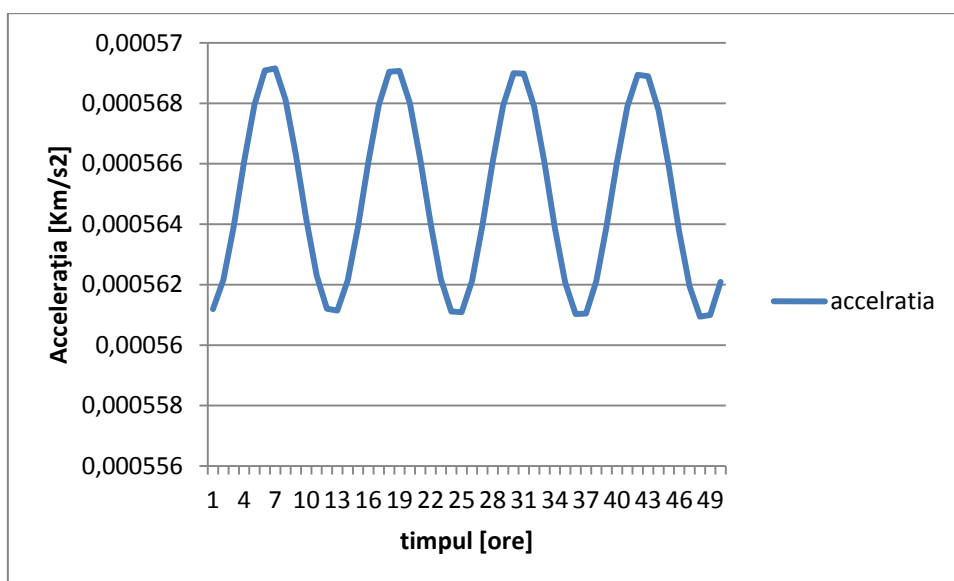
Parametrul	Satelit GPS	Formula de calcul [Km/s ²]
Semiaxa mare	26 500 km	
Înclinarea	55°	
Accelerația centrală	$5,6 \cdot 10^{-4}$	$\frac{\mu}{r^2}$
Perturbația	Accelerația [Km/s ²]	Formula
Armonica J_2	$2 \cdot 10^{-7}$	$3 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^2}{r^2} J_2$
Armonica J_3	$2,3 \cdot 10^{-11}$	$4 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^3}{r^3} J_3$
Armonica J_4	$2,5 \cdot 10^{-11}$	$5 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^4}{r^4} J_4$
Armonica J_5	$1,1 \cdot 10^{-12}$	$6 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^5}{r^5} J_5$
Armonica J_6	$5,6 \cdot 10^{-13}$	$7 \frac{\mu}{r^2} \frac{a_{ec}^6}{r^6} J_6$
Atracția gravitațională Soare	$2,95 \cdot 10^{-8}$	$\mu_{3c} \left(\frac{\vec{r}_{3c} - \vec{r}}{(r_{3c} - r)^3} - \frac{\vec{r}_{3c}}{r_{3c}^3} \right)$
Atracția gravitațională Lună	$1,95 \cdot 10^{-8}$	
Efecte relativiste	$3,4 \cdot 10^{-12}$	$\frac{3\mu^2 a (1 - e^2)}{c^2 r^4}$
Presiunea radiației solare	$4,4 \cdot 10^{-10}$	$k' \frac{A}{m} q \Psi \frac{\vec{r}_{sat} - \vec{r}_{Soare}}{r_{Soare}}$
Efectul Poynting-Robertson	$6,9 \cdot 10^{-15}$	$\frac{r^2}{4c^2 m} \sqrt{\frac{GM_s L_s^2}{R^5}}$

4.5 EFECTELE PRODUSE DE PERTURBAȚIILE GRAVITAȚIONALE

Orbita kepleriana



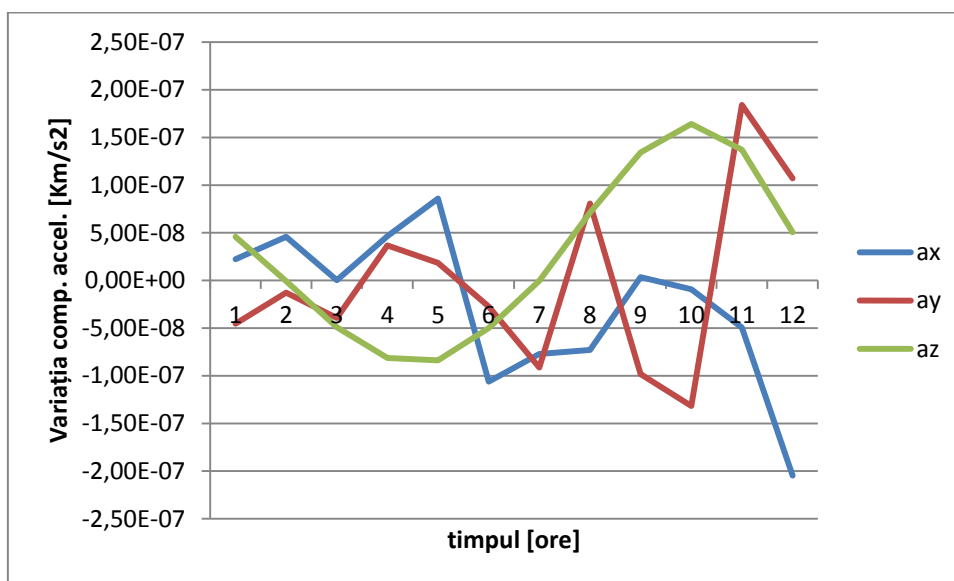
Variația componentelor accelerației centrale



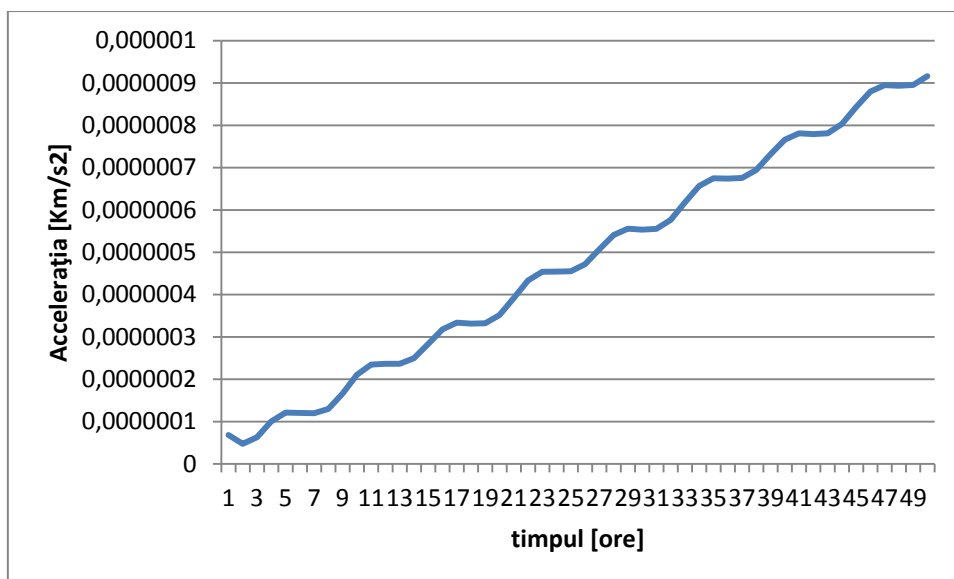
Accelerația totală

În cazul mișcării keplerine fără perturbații, accelerația are valoarea medie de $5,6 \cdot 10^{-4} \text{ Km/s}^2$.

Perturbația J_2



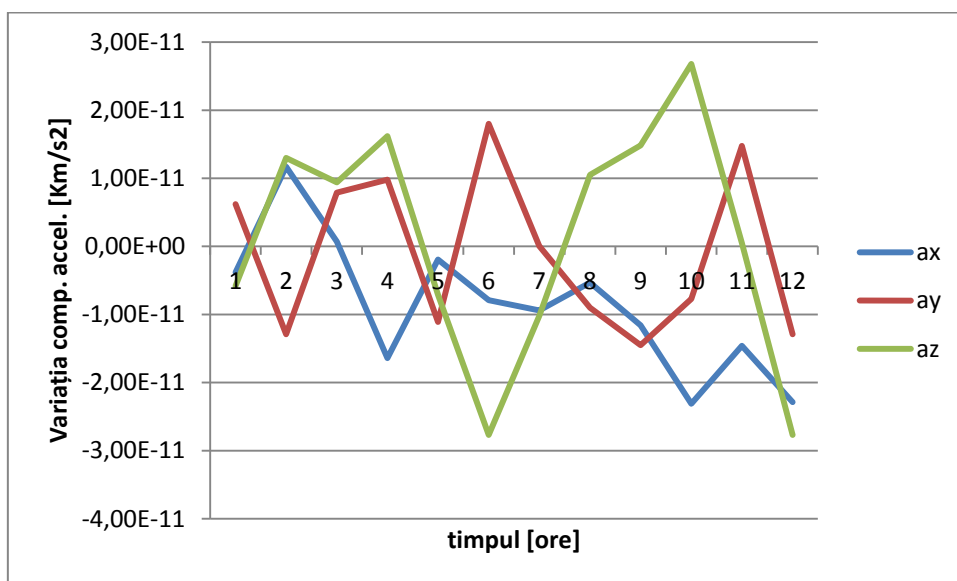
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J_2



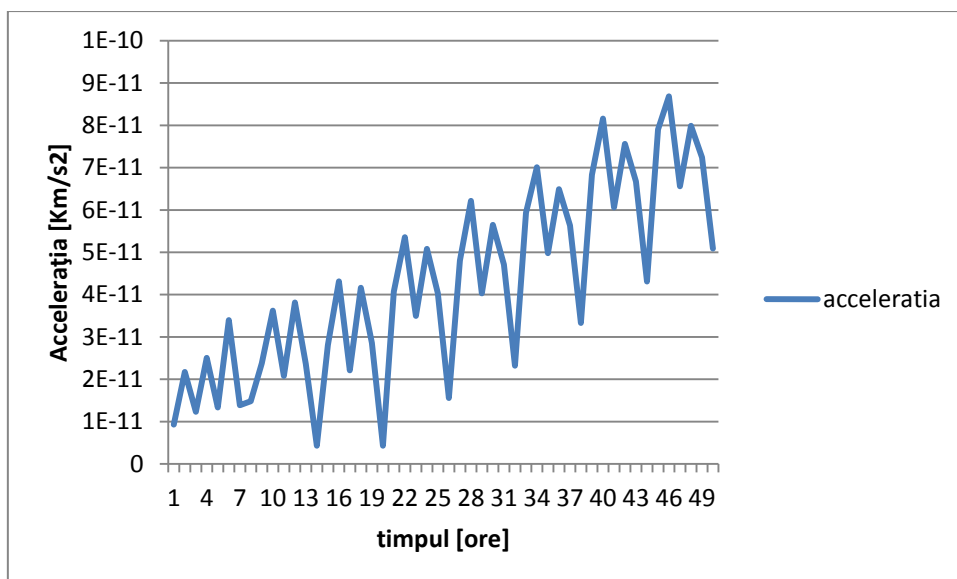
Variația accelerației totale datorată perturbației J_2

În cazul perturbației J_2 , accelerația are valoarea medie de $2 \cdot 10^{-7}$ Km/s².

Perturbația J_3



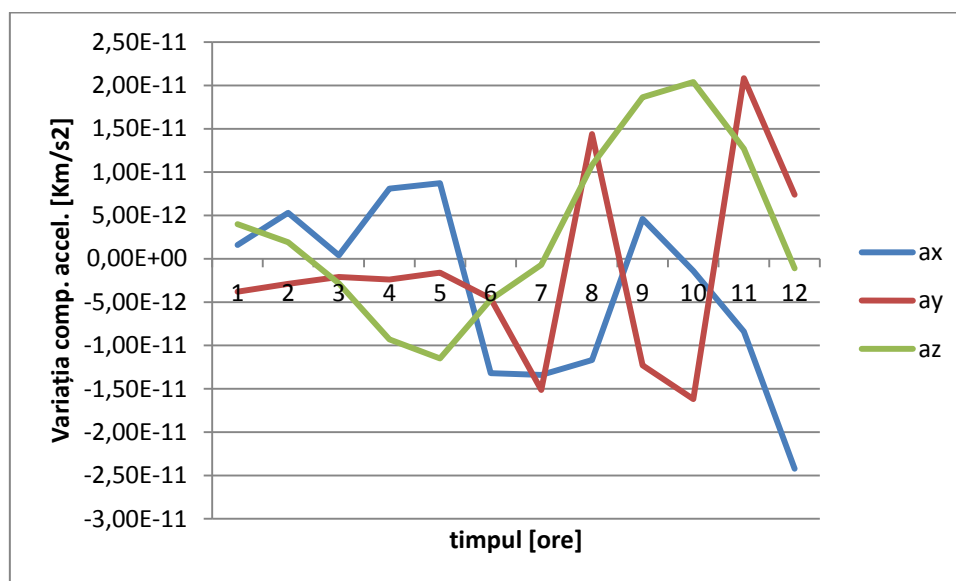
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J_3



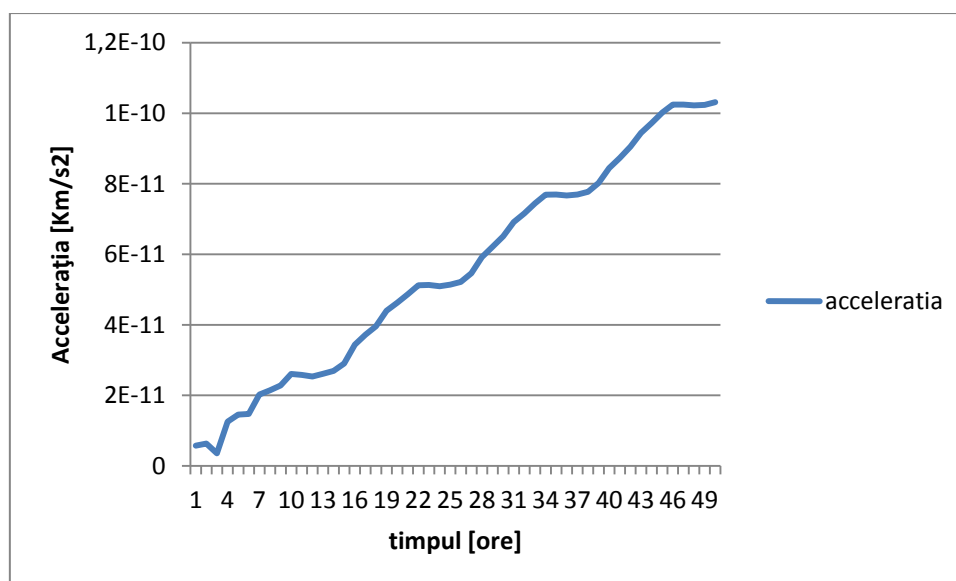
Variația accelerației totale datorată perturbației J_3

În cazul perturbației J_3 , accelerația are valoarea medie de $2,3 \cdot 10^{-11} \text{ Km/s}^2$.

Perturbația J₄



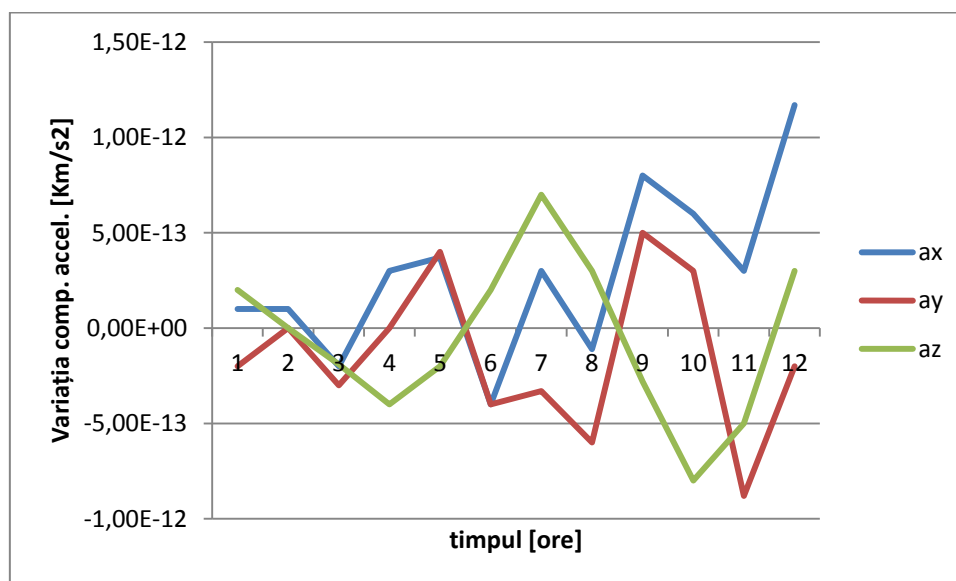
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J₄



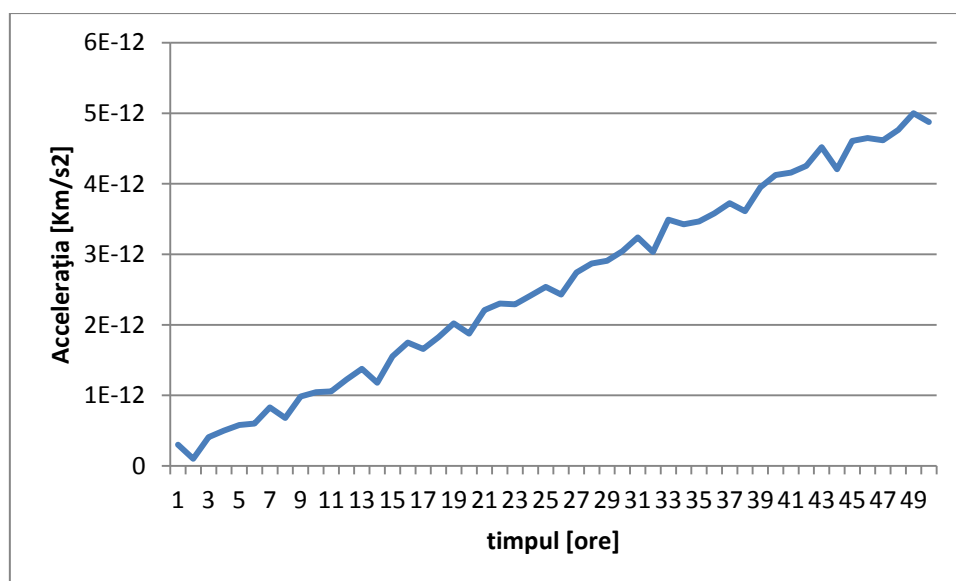
Variația accelerației totale datorată perturbației J₄

În cazul perturbației J₄, accelerația are valoarea medie de $2,5 \cdot 10^{-11} \text{ Km/s}^2$.

Perturbația J_5



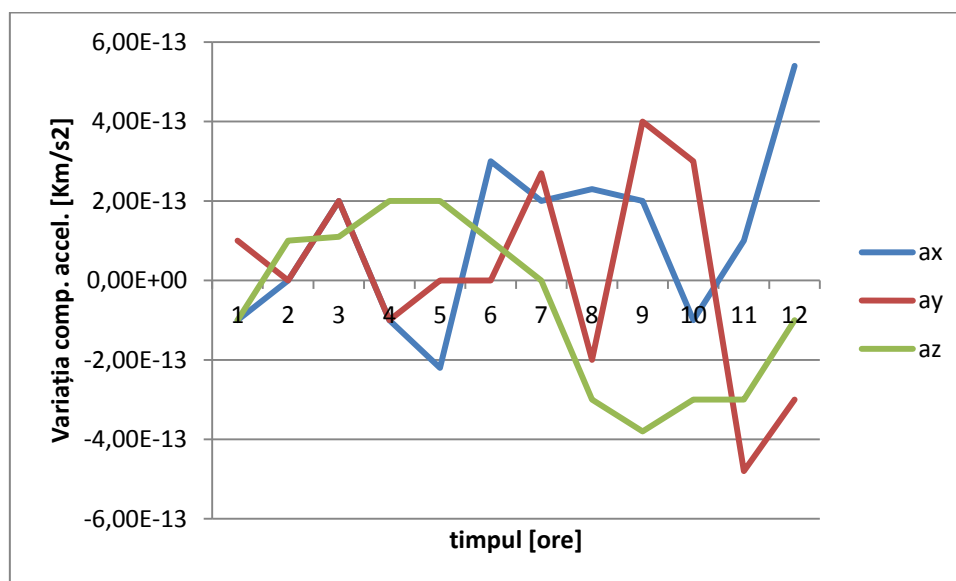
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J_5



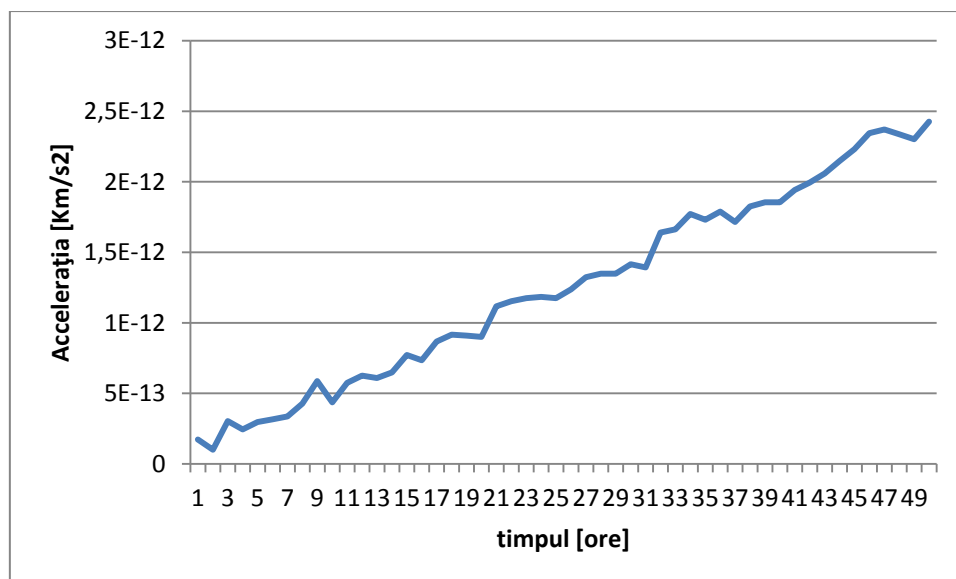
Variația accelerației totale datorată perturbației J_5

În cazul perturbației J_5 , accelerația are valoarea medie de $1,1 \cdot 10^{-12} \text{ Km/s}^2$.

Perturbația J_6



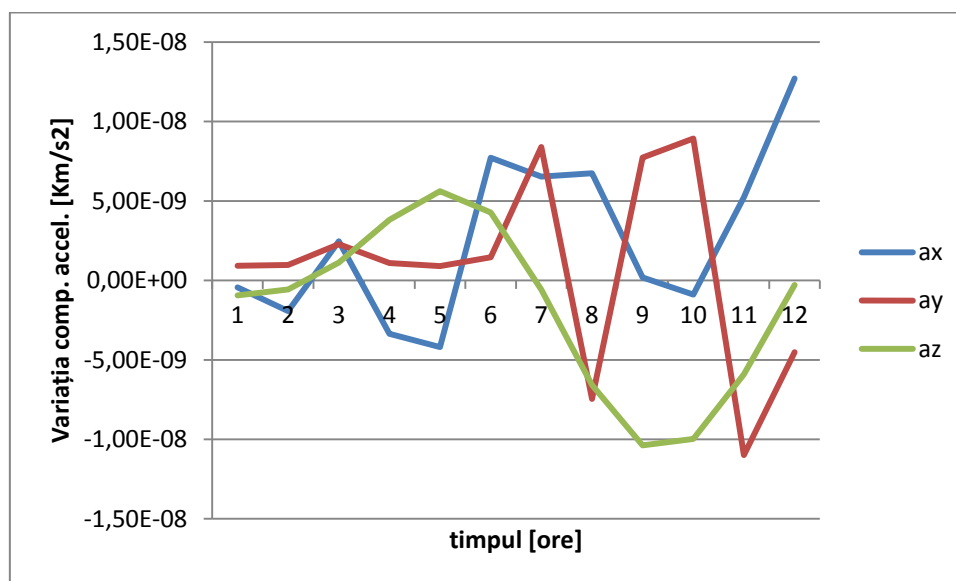
Variația componentelor accelerației datorată perturbației J_6



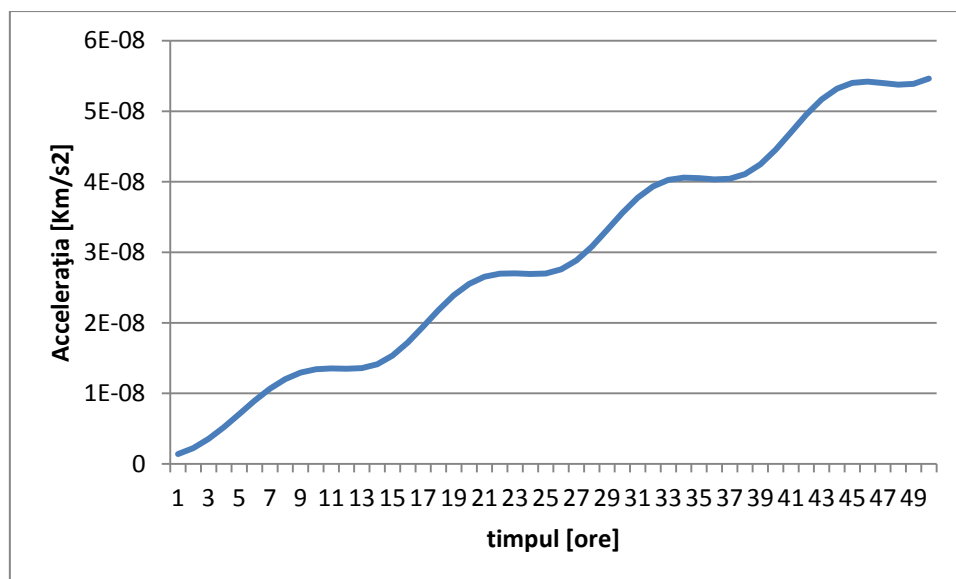
Variația accelerației totale datorată perturbației J_6

În cazul perturbației J_6 , accelerația are valoarea medie de $5,6 \cdot 10^{-13} \text{ Km/s}^2$.

Atracția gravitațională a Soarelui



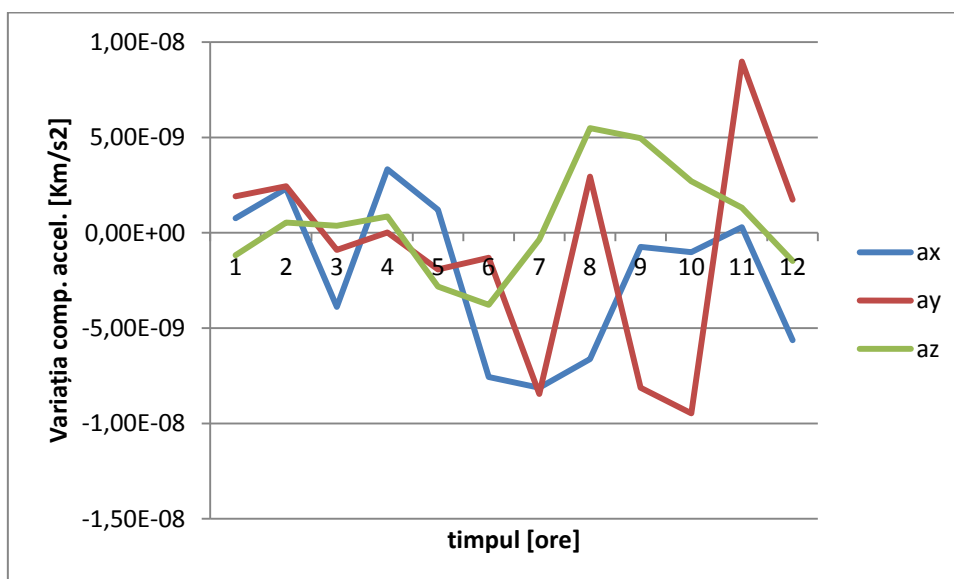
Variația componentelor accelerației datorată atracției gravitaționale a Soarelui



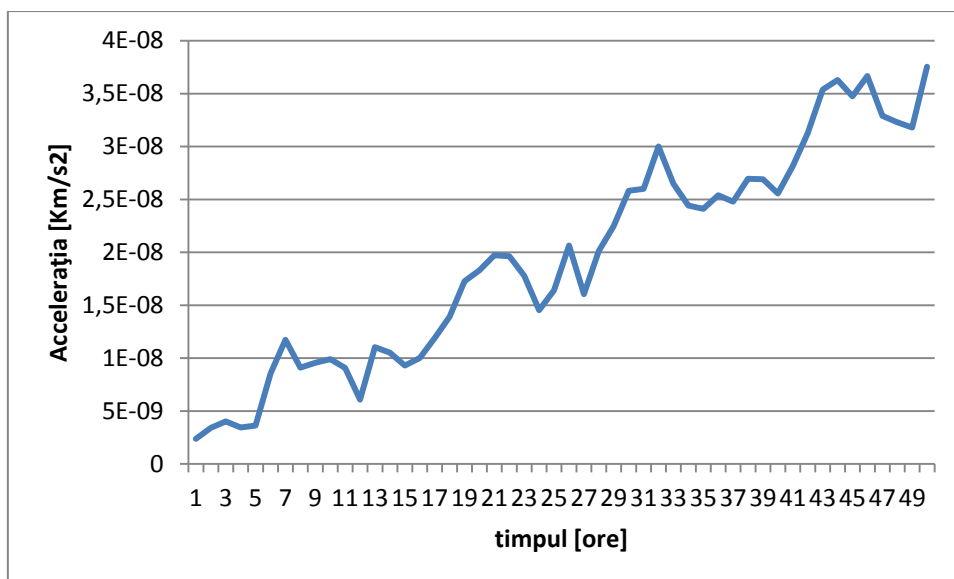
Variația accelerației totale datorată atracției gravitaționale a Soarelui

În cazul perturbației dată de atracția gravitațională a Soarelui, accelerația are valoarea medie de $2,95 \cdot 10^{-8} \text{ Km/s}^2$.

Atracția gravitațională a Lunii



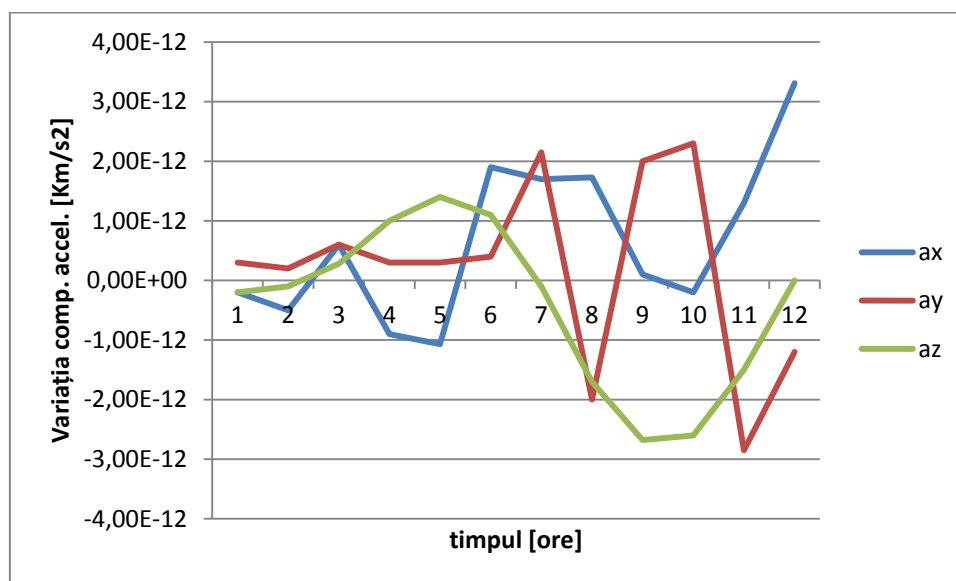
Variația componentelor accelerației datorată atracției gravitaționale a Lunii



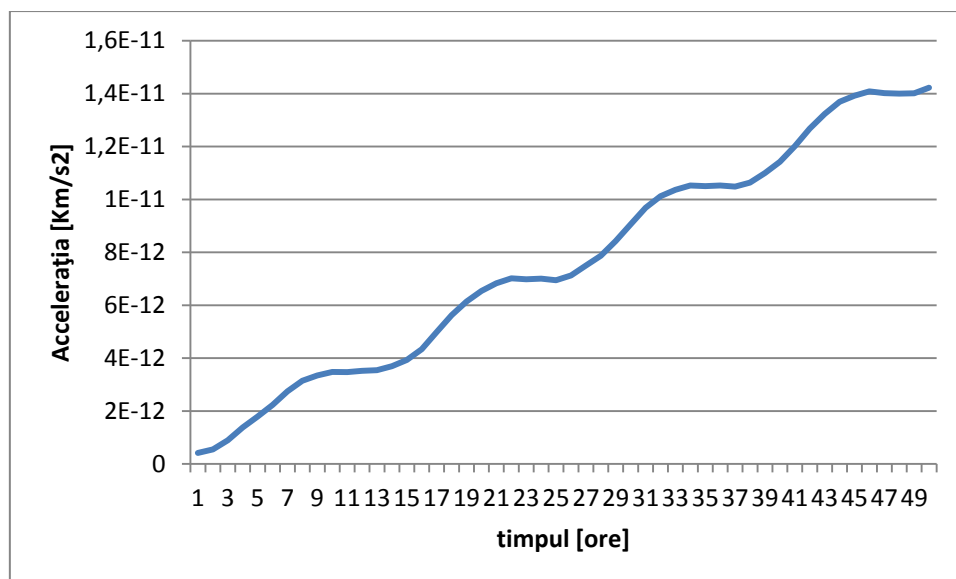
Variația accelerației totale datorată atracției gravitaționale a Lunii

În cazul perturbației data de atracția gravitațională a Lunii, accelerația are valoarea medie de $1,95 \cdot 10^{-8} \text{ Km/s}^2$.

Efectele relativiste



Variația componentelor accelerației datorată perturbației efectelor relativiste

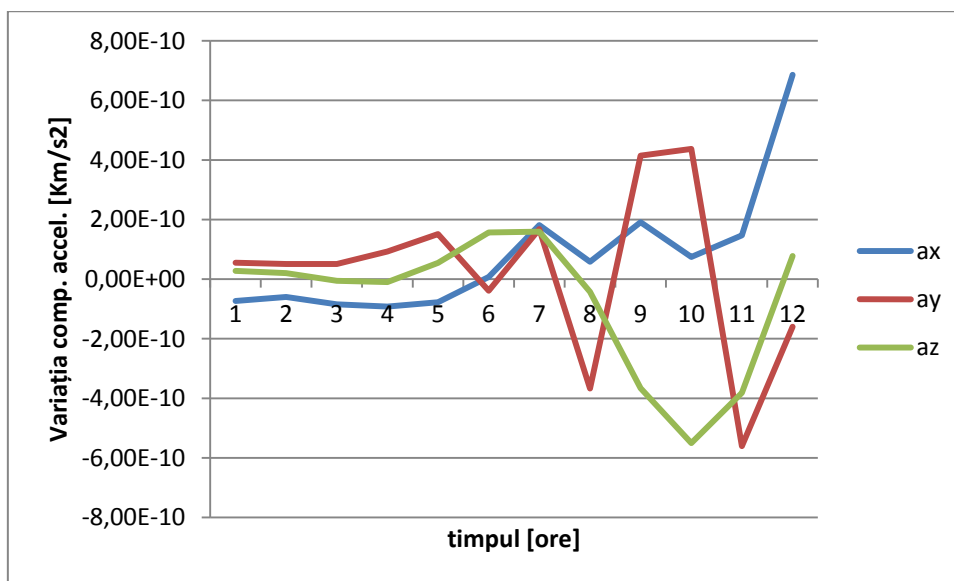


Variația accelerației totale datorată perturbației efectelor relativiste

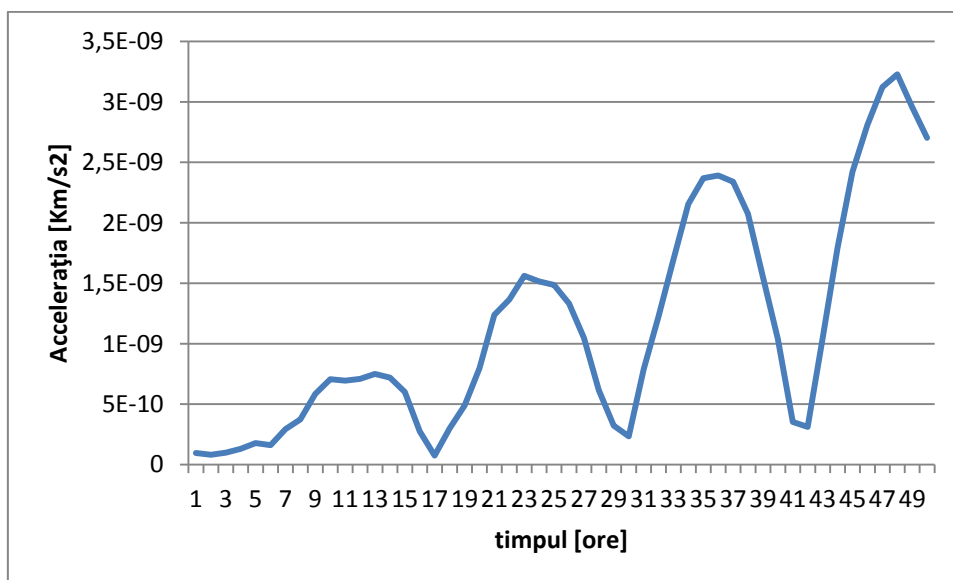
În cazul perturbației dată de efectele relativiste, accelerația are valoarea medie de $3,45 \cdot 10^{-12}$ Km/s².

4.6 EFECTELE PRODUSE DE PERTURBAȚIILE NEGRAVITAȚIONALE

4.6.1 Presiunea de radiație solară directă



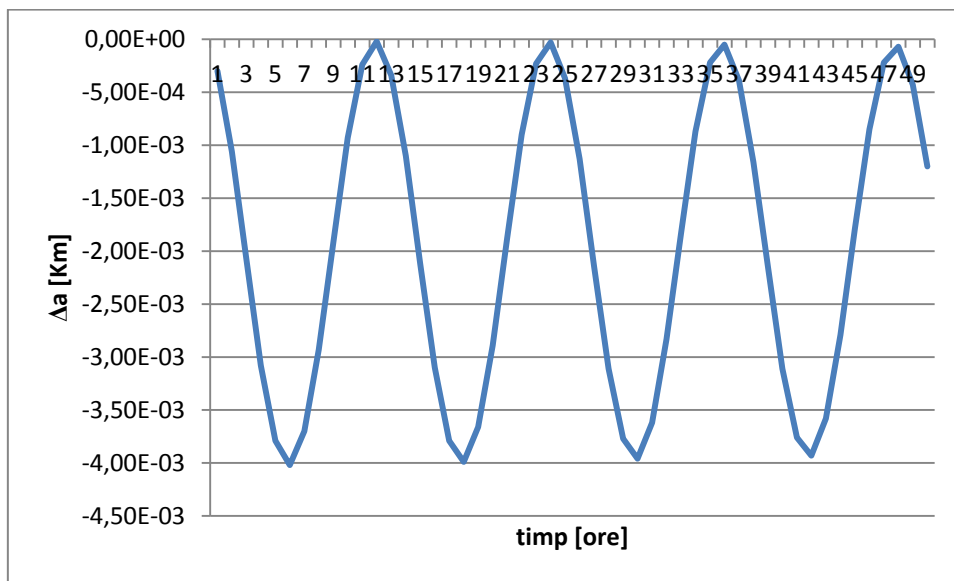
Variația componentelor accelerației datorată presiunii de radiație solară directă



Variația accelerației totale datorată presiunii de radiație solară directă

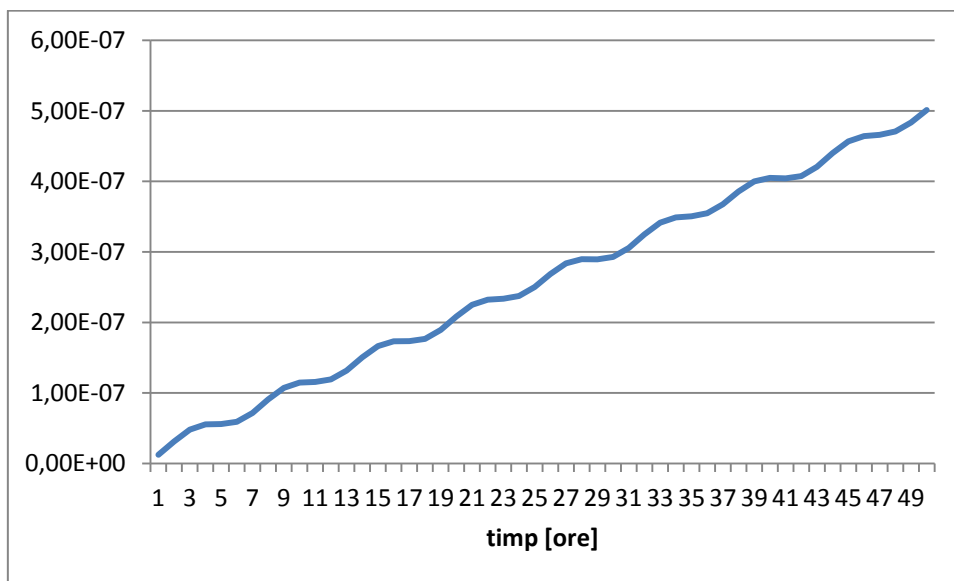
În cazul perturbației dată de presiunea de radiație directă, accelerația are valoarea medie de $4,4 \cdot 10^{-10}$ Km/s².

În continuare sunt prezentate graficele de variație a elementelor orbitale (a , e , i , ω , Ω , M) precum și raza vettoreare și viteza în sistemul CST ale unui satelit GPS pentru o perioadă de 50 ore.



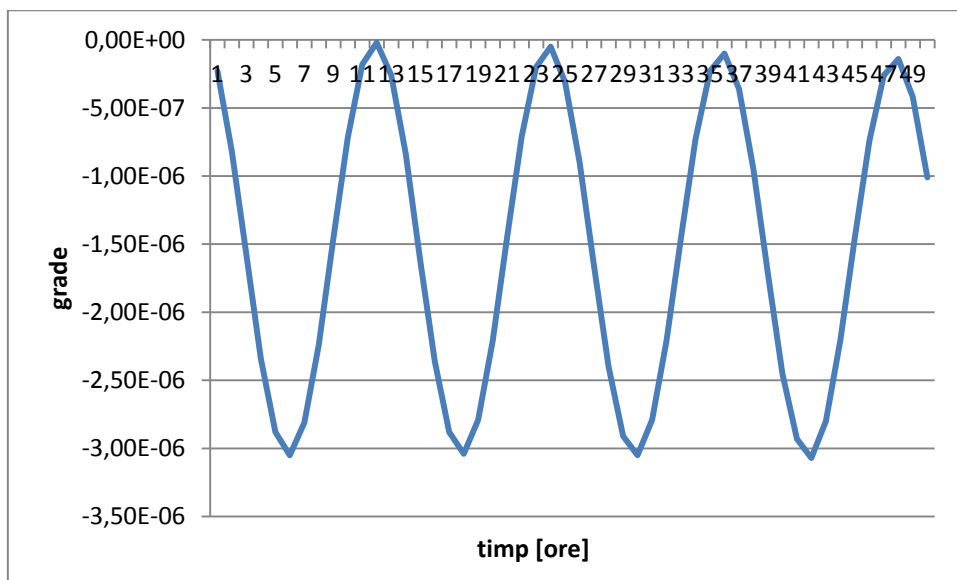
Variația semiaxei mari pentru 50 ore

Semiaxa mare prezintă o perturbație scurt-periodică cu o perioadă de 6 ore suprapusă peste o perturbație seculară. Pentru o perioadă orbitală, semiaxa mare suferă o variație de 4 metri.



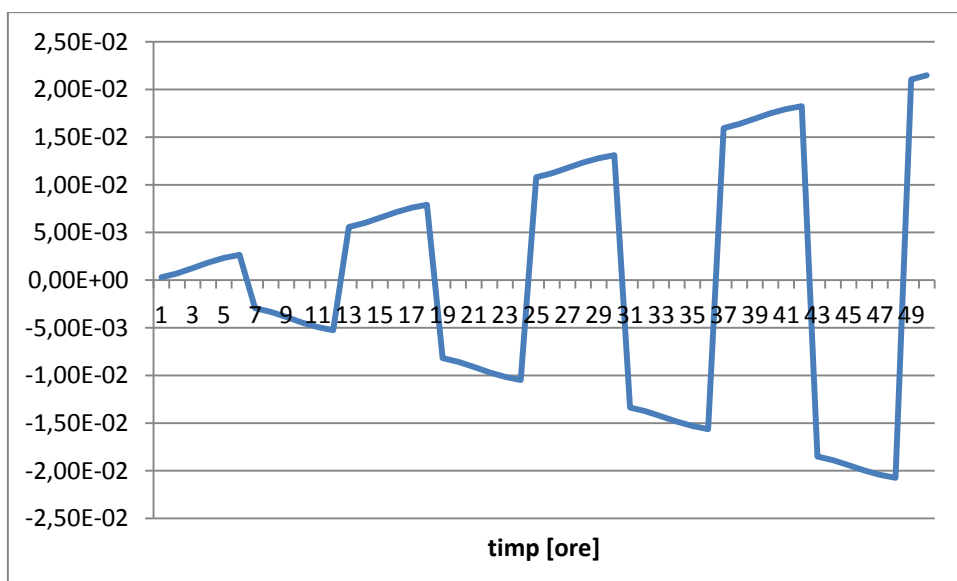
Variația excentricității pentru 50 ore

Excentricitatea prezintă o perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 6 ore având ordinul de mărime $4,8 \cdot 10^{-8}$ Km.

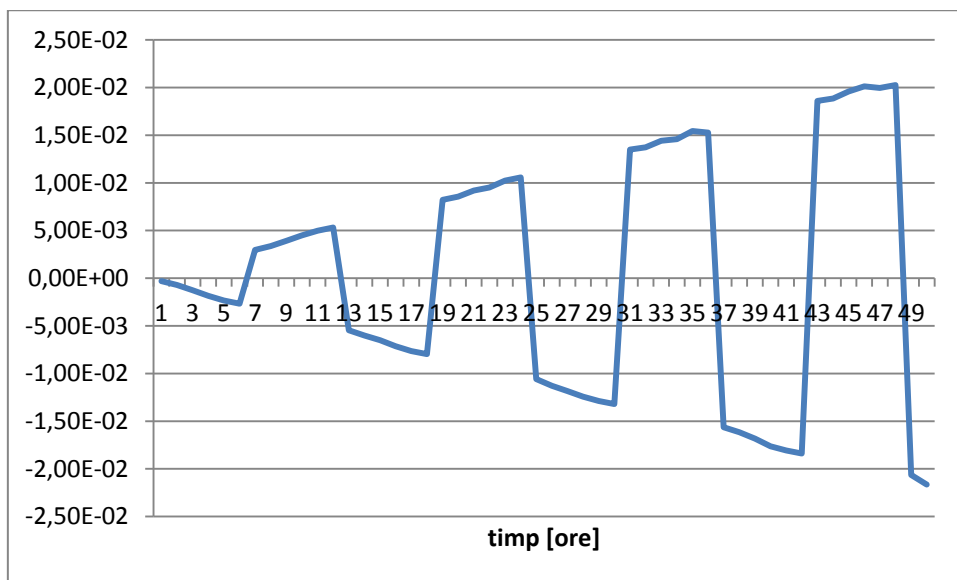


Variația înclinării pentru 50 aore

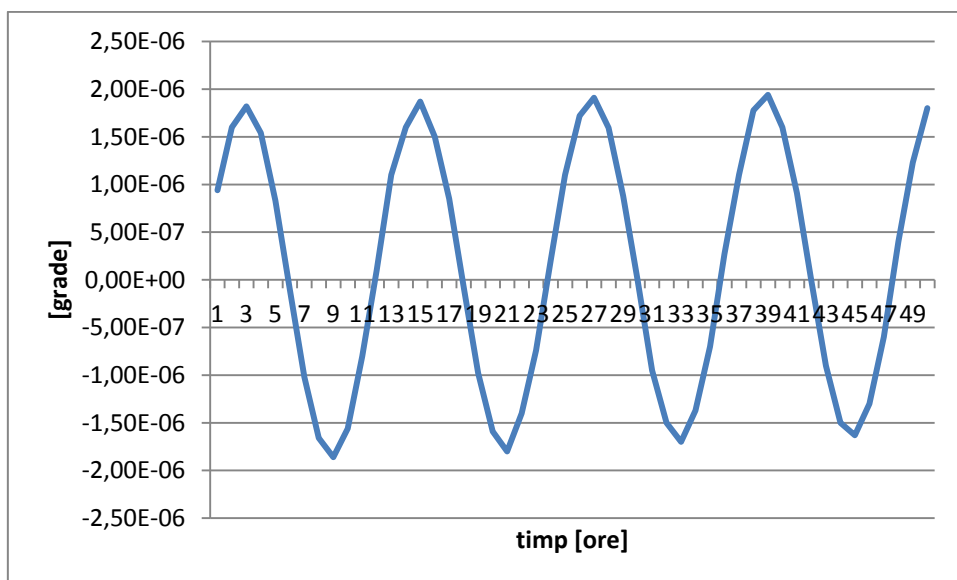
Înclinarea prezintă același tip de perturbație ca și semiaxa mare, o perturbație scurt-periodică suprapusă peste o perturbație seculară. Perturbația scurt-periodică are perioada de 6 ore și ordinul de mărime $3 \cdot 10^{-6}$ grade.



Variația anomaliei medii pentru 50 ore



Variația argumentului perigeului pentru 50 ore



Variația longitudinii nodului ascendent pentru 50 ore

Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație scurt periodică cu o perioadă de 6 ore și o amplitudine de $1,7 \cdot 10^{-6}$ grade, suprapusă peste o perturbație seculară.

4.6.2 Presiunea de radiație solară indirectă. Radiația Pământului

Se va studia efectul radiației Pământului asupra orbitelor sateliților GPS. Se va determina accelerația produsă de radiația Pământului reflectată și emisă asupra sateliților GPS. Se va construi un model analitic și numeric al radiației Pământului pentru o valoare constantă a albedoului.

Acest model dă în general iradianța Pământului față de un satelit aflat la o anumită altitudine și față de pozițiile relative ale satelitului, Pământului și Soarelui. Iradianța este exprimată în Watt/m^2 .

Pentru determinarea modelului de radiație al Pământului se vor avea în vedere următoarele ipoteze simplificatoare:

1. suprafața Pământului reflectată radiația solară conform unei suprafețe Lambert.
2. Albedoul total al Pământului se consideră ca având valoarea aproximativă de 0.3
3. Există conservarea energiei în sensul că energia totală primită de la Soare de către Pământ este transmisă înapoi în spațiu sub formă de radiație reflectată sau emisă.
4. Sateliții GPS recepționează radiație de la 38% din suprafața Pământului.

Pentru construirea unui model al radiației Pământului, se pleacă de la ipoteza că suprafața acestuia se comportă ca o suprafață Lambertiană.

Albedoul reprezintă raportul dintre puterea radiantă reflectată și puterea radiantă incidentă în toate lungimile de undă și în toate direcțiile:

$$\alpha = \frac{\Phi_{refl}}{\Phi_{inc}} . \quad (4.21)$$

Puterea radiantă sau fluxul Φ , a cărei unitate de măsură este Watt-ul reprezintă rata cu care energia radiantă este transferată de la o regiune la alta.

Iradianța [W/m^2] este:

$$E_{refl} = \frac{\Phi_{refl}}{4\pi d^2} . \quad (4.22)$$

Radiația este în general reflectată anisotrop, iar iradianța trebuie corectată cu un factor $C\Psi(\theta)$ - numit funcție de fază, factor ce depinde de unghiul de fază θ cu normala la suprafață.

Astfel, iradianța reflectată poate scrisă ca:

$$E_{refl} = \frac{C\Psi(\theta)}{4\pi d^2} \alpha \Phi_{inc} = \frac{\alpha}{\pi d^2} \cos \theta \Phi_{inc} . \quad (4.23)$$

Puterea radiantă incidentă este dată de $\Phi_{inc} = E_{Soare} A$, pentru o suprafață A perpendiculară pe radiația incidentă a Soarelui, unde $E_{Soare} \approx 1367 \text{ W/m}^2$ – reprezintă iradianța Soarelui asupra Pământului sau constanta solară (Taylor 2005). Dacă radiația Soarelui nu este perpendiculară pe suprafață dar formează un unghi γ , atunci puterea radiantă incidentă este:

$$\Phi_{inc} = E_{Soare} A \cos \gamma . \quad (4.24)$$

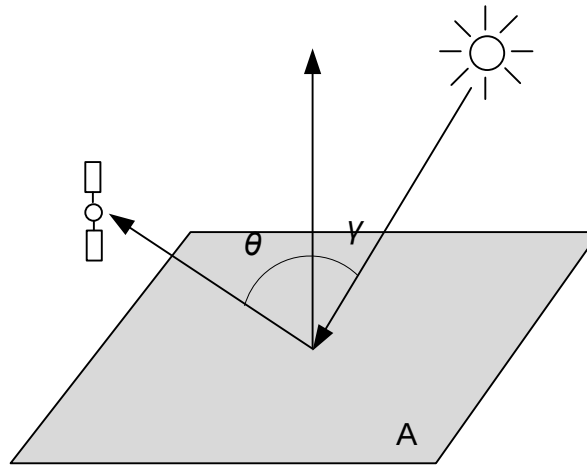


Fig. 4.2 Suprafața de tip Lambert

Iradianța reflectată asupra unui satelit aflat la distanța d , pentru un unghi incident γ și un unghi θ a radiației reflectate, este:

$$E_{\text{refl}} = \frac{\alpha}{\pi d^2} \cos \theta \cos \gamma E_{\text{Soare}} A \quad (4.25)$$

pentru $\cos \gamma \geq 0$ și $\cos \theta \geq 0$.

RADIAȚIA REFLECTATĂ

Atmosfera Pământului reflectă o parte a radiației care sosește de la Soare, iar pentru simplificare considerăm că această radiație reflectată este retrimisă înapoi în spațiu de către o sferă acoperită cu o suprafață Lambertiană.

Soluția analitică

Până acum s-a considerat iradianța pentru un singur element de suprafață. Se va construi o sferă formată dintr-o mulțime de astfel de elemente de suprafață, unde fiecare suprafață va avea o orientare specifică față de Soare sau satelit.

Prima soluție aproximativă poate fi determinată dacă se iau în considerare două ipoteze simplificatoare:

- distanța d de la suprafața elementelor până la satelit este constantă (se neglijează raza Pământului)

- vectorul direcție satelit $\vec{r}$ este constant

Pentru rezolvare problemei se folosește ecuația (4.25) și se definesc trei vectori principali:

$\vec{r} = (1, 0, 0)$ - vectorul direcție satelit

$\vec{s} = (\cos \psi, \sin \psi, 0)$ - vectorul direcție Soare

$\vec{n} = (\sin \vartheta \cos \varphi, \sin \vartheta \sin \varphi, \cos \vartheta)$ - vectorul normal la suprafață

ϑ, φ - unghiurile ce definesc poziția elementului de suprafață pe sferă

ψ - unghiul ce dă orientarea relative a satelitului, Pământului și Soarelui.

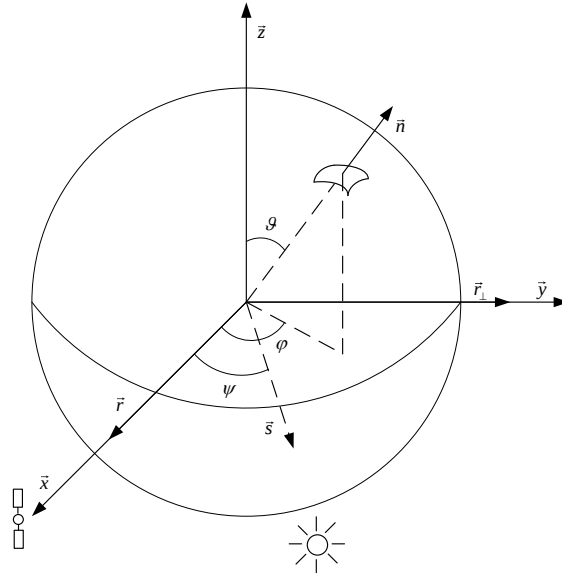


Fig. 4.3 Geometria sferei de tip Lambert

unghiul radiației incidente γ și unghiul radiației reflectate θ pot fi scrise sub forma:

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \vec{r} \cdot \vec{n} = \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \gamma &= \vec{s} \cdot \vec{n} = \sin \vartheta \cos(\psi - \varphi)\end{aligned}$$

iar iradianța reflectată devine:

$$dE_{refl} = \frac{\alpha}{\pi d^2} \sin^2 \vartheta \cos \varphi \cos(\psi - \varphi) E_{Soare} dA \quad (4.26)$$

și care este integrată pentru partea luminată a sferei vizibile pentru satelit, utilizând:

$$dA = R_p^2 \sin \vartheta d\vartheta d\varphi$$

cu $\vartheta = 0, \dots, \pi$, $\varphi = \psi - \pi/2, \dots, \pi/2$, $0 \leq \psi \leq \pi$ și R_p – raza medie a Pământului.

Integrala ecuației (4.26) este:

$$E_{sat}(\psi) = \int dE_{refl} = \int_0^\pi \int_{\psi-\pi/2}^{\pi/2} \frac{\alpha}{\pi d^2} \sin^2 \vartheta \cos \varphi \cos(\psi - \varphi) E_{Soare} R_p^2 \sin \vartheta d\varphi d\vartheta$$

care se poate integra pentru ϑ și φ separate:

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^3 \vartheta d\vartheta &= \int_0^\pi \frac{3\sin \vartheta - \sin 3\vartheta}{4} d\vartheta = \frac{4}{3} \\ \int_{\psi-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi \cos(\psi - \varphi) d\varphi &= \frac{1}{2} \int_{\psi-\pi/2}^{\pi/2} (\cos(2\varphi - \psi) + \cos \psi) d\varphi = \frac{1}{2} ((\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi)\end{aligned}$$

și se obține:

$$E_{sat}(\psi) = \frac{2\alpha}{3\pi^2} \frac{A_E E_{Soare}}{(R_p + h)^2} ((\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) \quad (4.27)$$

cu

$A_E = \pi R_E^2$ - reprezentând aria intersectată de radiația sosită de la Soare.

Ecuația (4.10) reprezintă iradianța totală datorită albedoului Pământului, ca o funcție ce depinde numai de unghiul ψ și distanța d . Distanța d a fost considerată ca fiind constantă.

Pentru determinarea ei corectă integrala $E_{sat}(\psi)$ peste suprafața S a unei sfere de rază $r_{sat} = R_p + h$, unde h este altitudinea satelitului, trebuie să fie egală cu puterea totală radiantă reflectată $\Phi_{refl-total}$ asupra Pământului:

$$\Phi_{refl-total} = \int E_{sat}(\psi) dS = \frac{2\alpha}{3\pi^2} \cdot \frac{A_E E_{Soare}}{d^2} 2\pi (R_p + h)^2 \int_0^\pi ((\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) \sin \psi d\psi \quad (4.28)$$

care poate fi divizat în trei integrale:

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos \psi \sin \psi d\psi &= 0 \\ \int_0^\pi \psi \cos \psi \sin \psi d\psi &= -\frac{\pi}{4} \\ \int_0^\pi \sin^2 \psi d\psi &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

și se obține:

$$\Phi_{refl-total} = \frac{4\alpha}{3\pi} \cdot \frac{(R_p + h)^2}{d^2} A_E E_{Soare} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} \right) 2 = \alpha A_E E_{Soare} \frac{(R_p + h)^2}{d^2}. \quad (4.29)$$

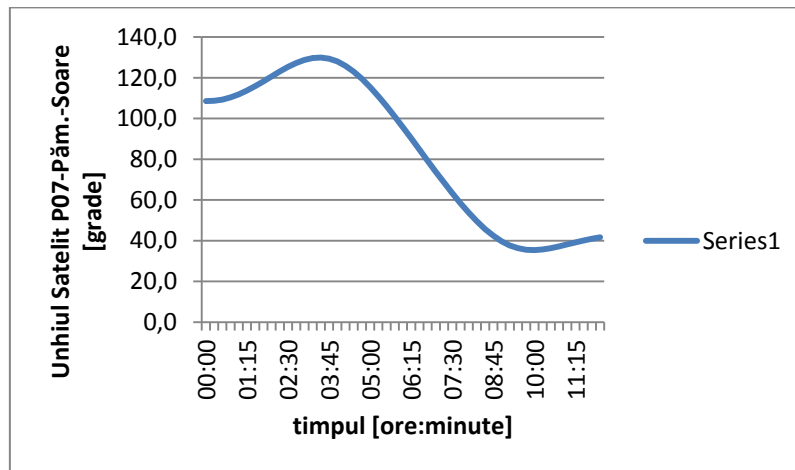
Astfel s-a demonstrat că d trebuie să fie egal cu $R_p + h$.

Vectorul iradianță în direcția satelitului $\vec{r}$ datorat albedoului total al Pământului α , depinde numai de poziția relativă a satelitului, Pământului și Soarelui (unghiul ψ) și asupra unui satelit aflat la altitudinea h are forma:

$$\vec{E}_{sat}(\psi, h) = \frac{2\alpha}{3\pi^2} \frac{A_E E_{Soare}}{(R_p + h)^2} ((\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) \vec{r}. \quad (4.30)$$

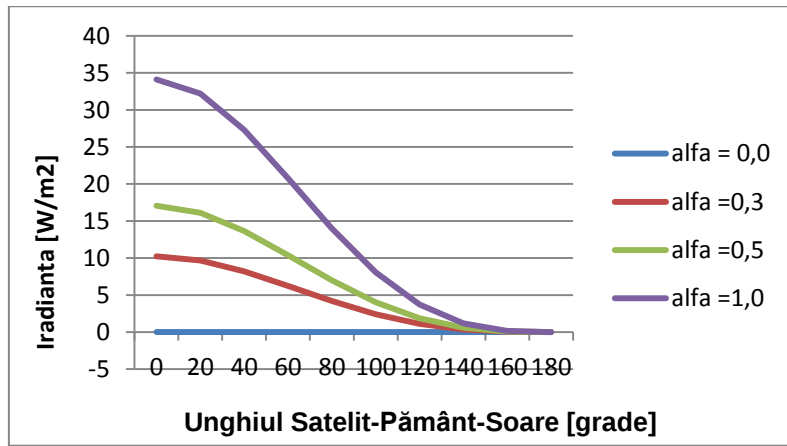
Utilizând informațiile de poziție din efemerida precisă format SP3 pusă la dispoziția utilizatorilor de către agenția JPL pentru satelitul GPS P07 (10.02.2011 începând cu ora 00:00 UTC), împreună cu pozițiile Soarelui determinate prin integrare numerică pentru aceeași dată, autorul a determinat modul de variație a unghiului dintre acest satelit, Pământ și Soare pe baza relației:

$$\cos \psi = \frac{\vec{r}_{sat} \cdot \vec{r}_{Soare}}{|\vec{r}_{sat}| \cdot |\vec{r}_{Soare}|}. \quad (4.31)$$

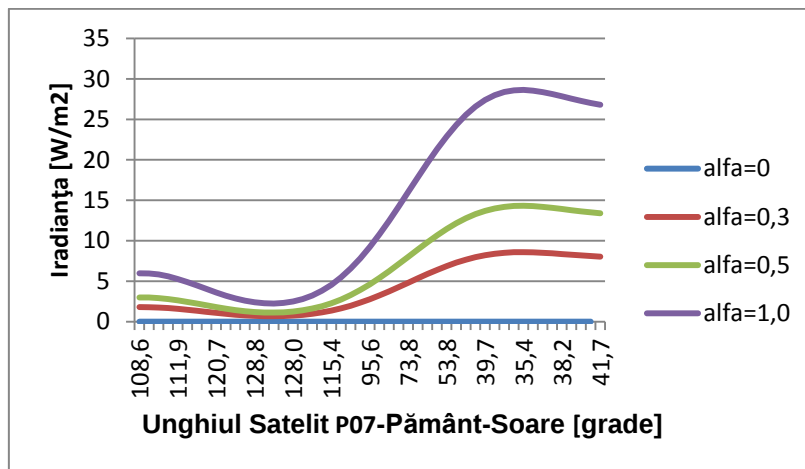


Graficul de variație al unghiului dintre satelitul GPS P07-Pământ-Soare

Pentru $E_{Soare} = 1367 W/m^2$, $R_p = 6371$ Km și $h = 26559,4$ Km autorul a realizat graficul de variație a iradianței utilizând modelul de radiație al Pământului, în funcție de ψ - unghiul satelit-Pământ-Soare și diferite valori ale albedoului ($\alpha = 0$; $\alpha = 0,3$; $\alpha = 0,5$; $\alpha = 1$).



Iradianța datorită radiației reflectată de Pământ



Iradianța datorită radiației reflectată de Pământ pentru satelitul GPS P07

Astfel, se observă faptul că graficul de variație a iradianței Pământului este o curbă sinusoidală și faptul că aceasta scade odată cu creșterea valorii albedoului Pământului și cu creșterea unghiului ψ dintre satelit, Pământ și Soare. Pentru valoarea zero a albedoului iradianța Pământului este nulă.

RADIAȚIA EMISĂ

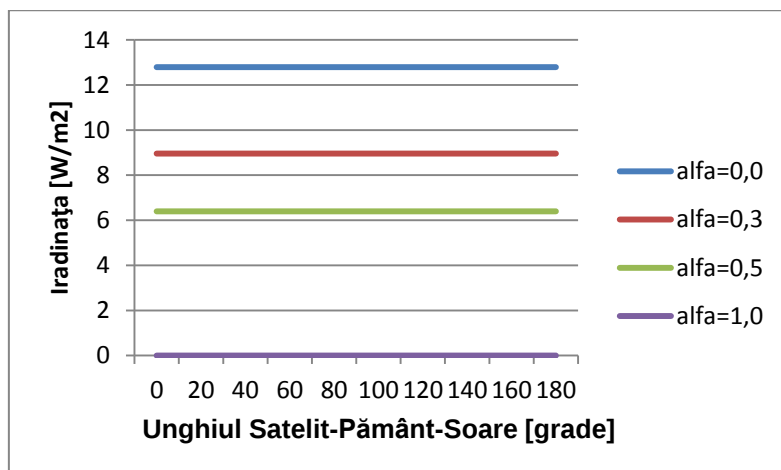
Radiația sosită de la Soare și care intersectează Pământul poate fi determinată ca fiind $A_E \cdot E_{Soare}$ cu $A_E = \pi R_E^2$. O fracțiune din această radiație este imediat reflectată în spectrul vizibil, o altă fracțiune este absorbită și alta este reemisă ca radiație infraroșie (Taylor 2005).

$$E_{sat}(\psi) = \frac{(1-\alpha)}{4\pi} \frac{A_E E_{Soare}}{(R_E + h)^2}. \quad (4.32)$$

Vectorul iradianță asupra unui satelit aflat la altitudinea h datorat radiației emisă de Pământ are expresia:

$$\vec{E}_{sat}(\psi, h) = \frac{(1-\alpha)}{4\pi} \frac{A_E E_{Soare}}{(R_E + h)^2} \vec{r}. \quad (4.33)$$

Pentru aceleași valori ($E_{Soare} = 1367 \text{ W/m}^2$, $R_P = 6371 \text{ Km}$, $h = 26559,4 \text{ Km}$) autorul a realizat graficul de variație al iradianței datorat radiației emisă de Pământ.



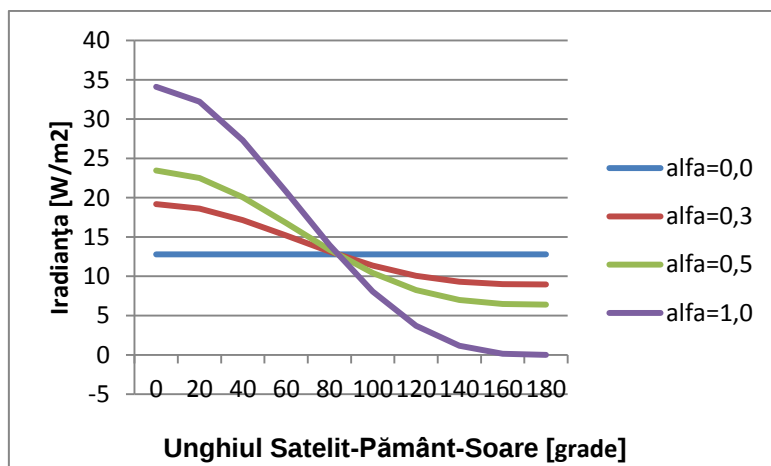
Iradiația datorită radiației emise de Pământ

Din grafic se observă faptul că iradianța nu depinde de valoarea unghiului ψ , este constantă luând diferite valori în funcție de valoarea albedoului Pământului. Iradianța are valoarea zero pentru $\alpha = 1$.

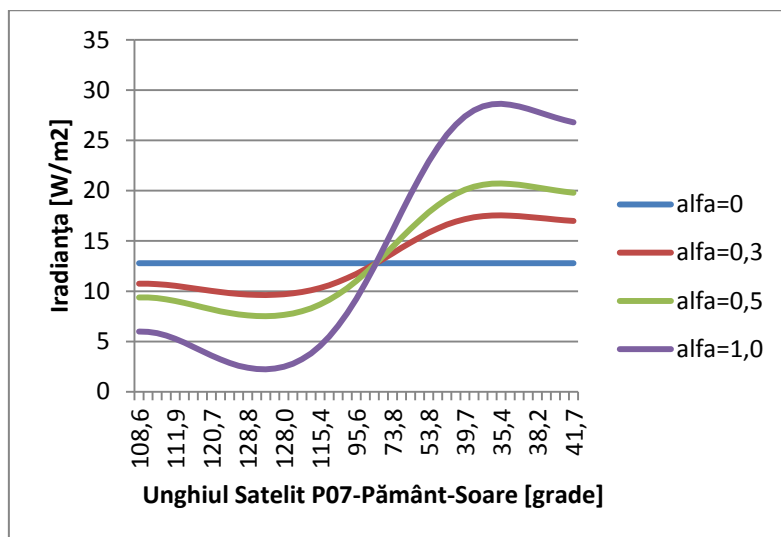
MODELUL DE RADIAȚIE AL PĂMÂNTULUI

Modelul de radiație al Pământului este suma din radiația reflectată și emisă și are expresia:

$$E_{sat}(\psi) = \frac{A_E E_{Soare}}{(R_E + h)^2} \left[\frac{2\alpha}{3\pi^2} ((\pi - \psi) \cos \psi + \sin \psi) + \frac{(1-\alpha)}{4\pi} \right]. \quad (4.34)$$



Iradianța totală a Pământului



Iradiața totală a Pământului pentru satelitul GPS P07

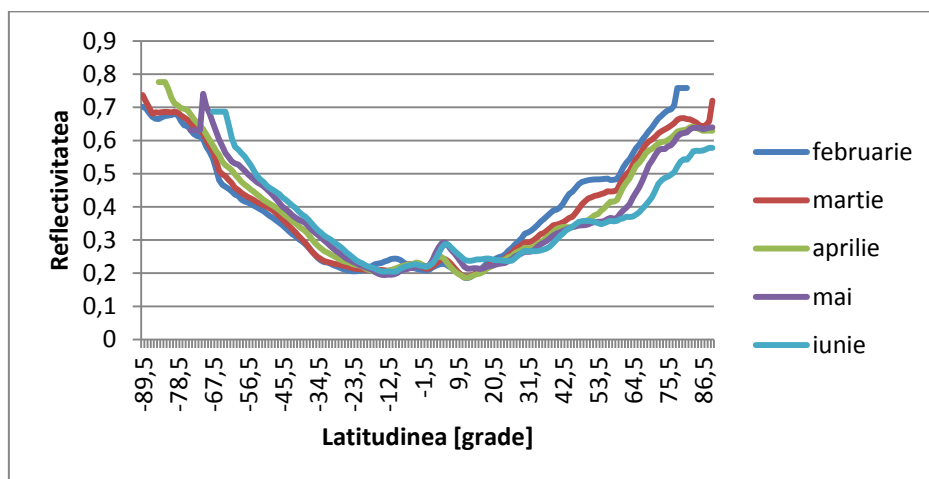
Din graficul de variație a iradiației totale a Pământului reiese tendința sinusoidală a acesteia. Pentru $\alpha = 0$ iradiația este constantă având valoarea de $12,8 \text{ W/m}^2$.

MODELUL ALBEDOULUI ÎN FUNCȚIE DE LATITUDINE

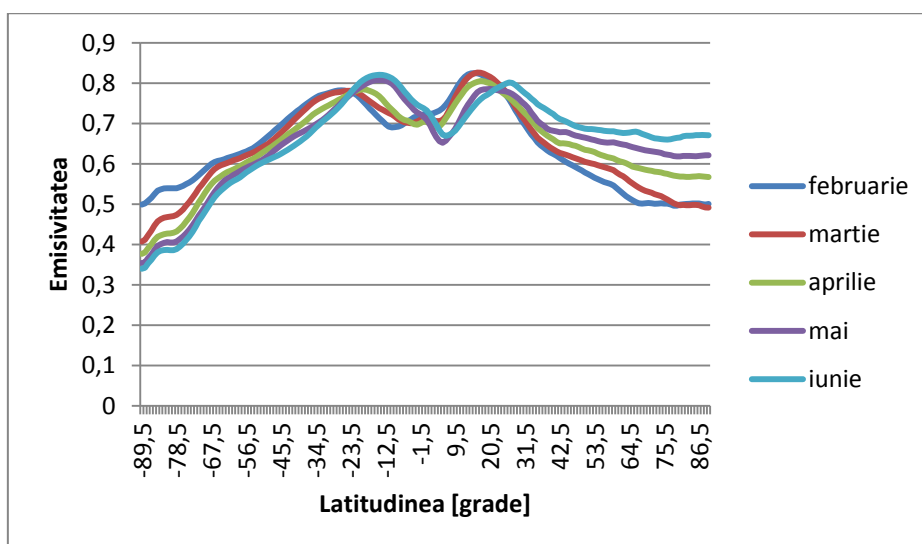
Pentru îmbunătățirea modelului de radiație al Pământului se folosesc date obținute de la CERES (Clouds and Earth's Radiant Energy System).

În general, reflectivitatea se obține direct și se găsește sub denumirea de Albedo din datele furnizate de CERES. Emisivitatea se calculează ca fiind $\varepsilon(\varphi, \lambda) = 4E_{LW} / E_{\text{Soare}}$, cu E_{LW} - fluxul undelor lungi furnizate de CERES și $E_{\text{Soare}} = 1367 \text{ W/m}^2$ - iradiația Soarelui.

Astfel, CERES furnizează pentru anul 2011 date privind reflectivitatea și emisivitatea doar pentru lunile februarie, martie, aprilie, mai și iunie sub formă grafică și numerică în funcție de latitudinea geografică.



Reflectivitatea februarie – iunie CERES



Emisivitatea februarie – iunie CERES

Pe baza datelor numerice furnizate de CERES autorul a realizat graficele de variație a reflectivității și emisivității Pământului în funcție de latitudinea geografică.

Dacă se consideră că reflectivitatea și emisivitatea pot fi scrise ca dezvoltări armonice în funcție de latitudine de forma:

$$\rho(\lambda) = \rho_{const} + \rho_{cos} \cos \varphi + \rho_{sin} \sin \varphi \quad (4.35)$$

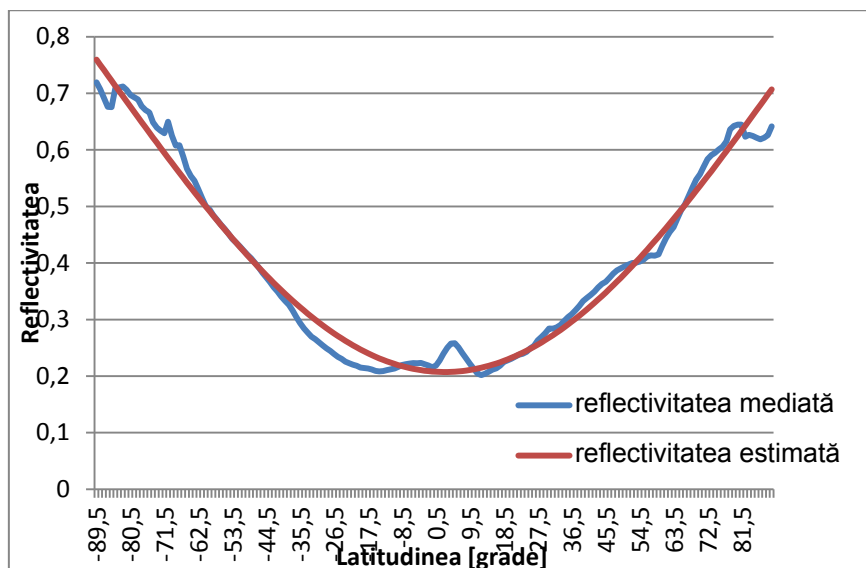
$$\varepsilon(\lambda) = \varepsilon_{const} + \varepsilon_{cos} \cos \varphi + \varepsilon_{sin} \sin \varphi$$

se pot determina coeficienții reflexivității și emisivității utilizând metoda celor mai mici pătrate.

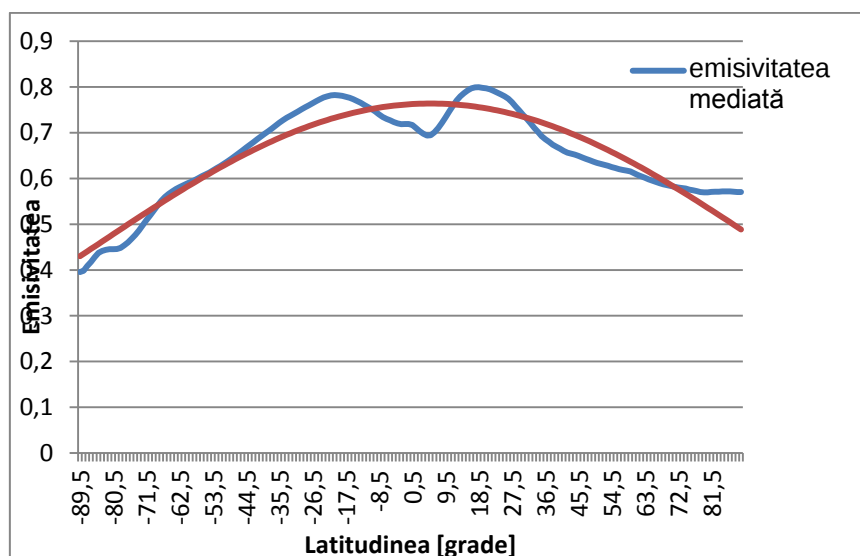
Autorul a determinat valoarea medie a reflexivității și emisivității Pământului pentru cele 5 luni ale anului 2011. Folosind metoda celor mai mici pătrate s-au determinat coeficienții reflexivității și emisivității pentru perioada februarie – iunie 2011.

Tab. 4.2 Coeficienții estimați pentru reflexivitate și emisivitate perioada februarie – iunie 2011

ρ_{const}	0,737963502
ρ_{cos}	-0,5300641743
ρ_{sin}	-0,026283497
ε_{const}	0,4566176405
ε_{cos}	0,3057731068
ε_{sin}	0,0292256524



Reflectivitatea mediata și estimata



Emisivitatea mediata și estimata

Autorul a realizat graficele pentru reflexivitate și emisivitate ale Pământului pe baza valorilor mediate pentru cele 5 luni calendaristice și pe baza coeficienților determinați ai reflectivității și emisivității atunci când aceștia se scriu ca dezvoltări armonice. Din calcule a reieșit o corelație de 0,99 a coeficienților pentru reflectivitate și emisivitate.

Acest tip de model al reflectivității și emisivității prezintă un potențial ridicat deoarece astfel se pot descrie proprietățile mediate ale reflectivității și emisivității Pământului pentru un an întreg pe baza a trei coeficienți.

MODELUL DE ACCELAȚIE EXERCITAT ASUPRA SATELIȚILOR GPS

Vectorul iradianță (E_{sat}) sau fluxul solar (Φ) conform notației utilizate de Montenbruck and Gill (2000) are expresia:

$$\Phi = \frac{\Delta E}{\Delta t} \quad (4.36)$$

și reprezintă energia transferată prin aria A în unitatea de timp Δt . Conform Beutler (2005) care conform mecanicii cuantice spune că fiecare foton de frecvență ν și lungime de undă $\lambda = c/\nu$ transportă o energie:

$$E = h\nu \quad (4.37)$$

și un impuls:

$$p = \frac{E}{c} \quad (4.38)$$

unde $h = 6,62 \cdot 10^{-34}$ Js – constanta lui Planck. Astfel, impulsul total pentru un corp absorbant iluminat de Pământ în intervalul de timp Δt este:

$$\Delta p = \frac{\Delta E}{c} = \frac{\Phi}{c} A \Delta t. \quad (4.39)$$

Astfel, forța care acționează asupra unui satelit este:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{\Phi}{c} A \quad (4.40)$$

iar presiunea radiației este:

$$P = \frac{\Phi}{c}. \quad (4.41)$$

Satelitul GPS asupra căruia acționează presiunea de radiație exercitată de Pământ va fi considerat ca având două forme: într-o primă aproximație sub formă de sferă sau „ghiulea” și sub forma unei cutii cu aripi (box-wing), unde cutia „box” reprezintă satelitul în speță iar aripile sunt considerate a fi panourile solare. Ceea ce interesează este secțiunea transversală a satelitului și proprietățile optice ale acestuia.

MODELUL GENERAL A PRESIUNII RADIAȚIEI SOLARE EMISE DE PĂMÂNT

Bazat pe modelele generale ale presiunii de radiație dezvoltate de Fliegel (1992) și Hunentobler (2008), satelitul GPS de formă “cutie cu aripi” este construit astfel:

- fața satelitului orientată tot timpul către Pământ este +Z (în lungul axei Z în cadrul sistemului de coordonate legat de satelit), panourile solare se iau în considerare, atât fața cât și spatele;
- nu se iau în considerare efectele de umbră a diferitelor componente ale satelitului, energia care este absorbită și reradiată;
- distribuția unghiulară a luminii solare reflectate de către fiecare element de suprafață este aproximată ca fiind realizată pe două componente, una perfect difuză (împrăștiere Lambert) și una perfect oglindită, conform Fliegel et al. (1992).

Parametrii optici care descriu suprafața unui satelit sunt:

- reflectivitatea (ν) care ia valori de la 0 (pentru un corp negru) la 1 (pentru un corp alb)
- oglindirea (μ) care ia valori de la 0 (difuz) la 1 (oglină).

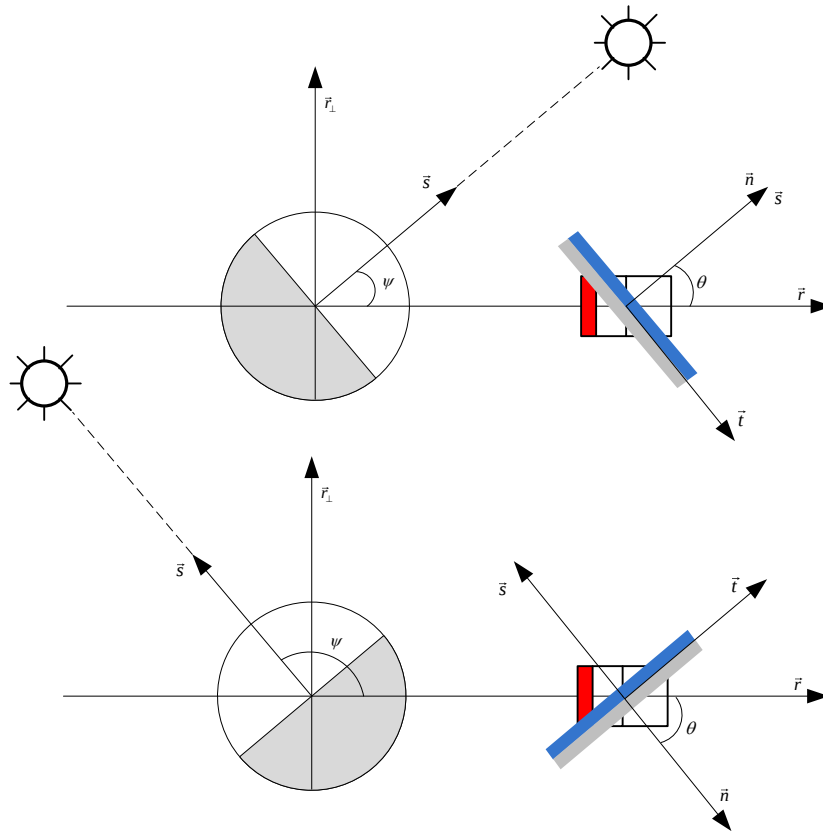


Fig. 4.4 Geometria pentru forma satelitelui „cutie cu aripi”

Cu aria unei suprafețe plane A , masa satelitelui M , unghiul θ dintre direcția radiației sosită de la Pământ și normala la suprafață, iradianța Pământului E , viteza luminii c se pot scrie cele trei componente ale accelerației pentru fiecare suprafață conform Fliegel et al. (1992):

Normală la suprafață:

$$\vec{f}_N = \frac{A}{M} \frac{E}{c} (1 + \mu\nu) \cos^2 \theta \vec{n} \quad (4.42)$$

Tangantă la suprafață:

$$\vec{f}_S = \frac{A}{M} \frac{E}{c} (1 + \mu\nu) \sin \theta \cos \theta \vec{t} \quad (4.43)$$

Difuză:

$$\vec{f}_D = \frac{A}{M} \frac{E}{c} \frac{2}{3} \nu (1 - \mu) \cos \theta \vec{n} \quad (4.44)$$

Pentru cazul în care satelitul este aproximat sub forma de „cutie cu aripi” se consideră că radiația sosită de la Pământ este pur radială. Dacă iradianța este pur radială, accelerația poate fi descompusă în două componente: una radială și cealaltă non-radială, accelerația depinzând doar de unghiul ψ dintre satelit - Pământ și Soare.

Se disting două cazuri în funcție de unghiul ψ dintre satelit - Pământ și Soare:

- $0 \leq \psi < \pi/2$ radiația solară a Pământului acționează în partea din spate a panourilor solare și $\theta = \psi$
- $\pi/2 \leq \psi < \pi$ radiația solară a Pământului acționează în partea din față a panourilor solare și $\theta = \pi - \psi$

Ecuatiile se desfac în două părți astfel:

Cutie și ramele panourilor solare

$$f_{\bar{r}} = \frac{A}{M} \frac{E}{c} \left((1 + \mu\nu) + \frac{2}{3} \nu(1 - \mu) \right). \quad (4.45)$$

Panourile solare

$$f_{\bar{r}} = f_N \cos \theta + f_D \cos \theta + f_S \sin \theta \quad (4.46)$$

$$f_{\bar{r}_\perp} = f_N \sin \theta + f_D \sin \theta - f_S \cos \theta \quad (4.47)$$

cu

$$\theta = \begin{cases} \psi & \text{dacă } 0 \leq \psi < \pi/2 \\ \pi - \psi & \text{dacă } \pi/2 \leq \psi < \pi \end{cases}.$$

Și se obține componenta radială și componenta non-radială pentru panourile solare:

$$f_{\bar{r}} = \frac{A}{M} \frac{E}{c} |\cos \psi| \left(1 + \frac{2}{3} \nu(1 - \mu) |\cos \psi| + \mu\nu \cos 2\psi \right) \quad (4.48)$$

$$f_{\bar{r}_\perp} = \frac{A}{M} \frac{E}{c} \cos \psi \left(\frac{2}{3} \nu(1 - \mu) \sin \psi + \mu\nu |\sin 2\psi| \right) \quad (4.49)$$

sau sub forma simplificată:

$$f_{\bar{r}} = \frac{E}{Mc} \left[A_{\text{cutie}} C_{\text{cutie}} + A_{\text{panou}} |\cos \psi| \left(1 + \frac{2}{3} \nu(1 - \mu) |\cos \psi| + \mu\nu \cos 2\psi \right) \right] \quad (4.50)$$

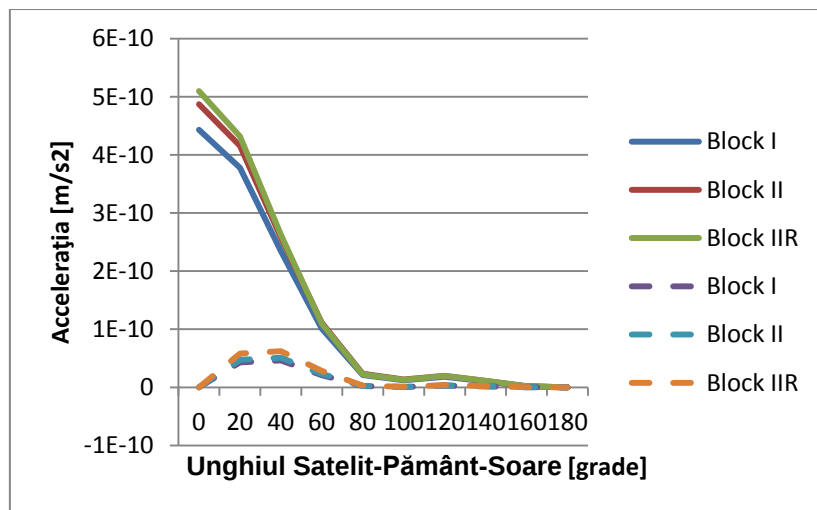
$$f_{\bar{r}_\perp} = \frac{E}{Mc} A_{\text{panou}} \cos \psi \left(\frac{2}{3} \nu(1 - \mu) \sin \psi + \mu\nu |\sin 2\psi| \right). \quad (4.51)$$

Dimensiunile, parametrii optici și masele pentru sateliții GPS Block I, Block II și Block IIR conform publicațiilor lui Fliegel (1992), Fliegel și Galini (1996), preluate direct de la firmele constructoare Rockwell International și Lockheed Martin sunt prezentate în tabelul de mai jos.

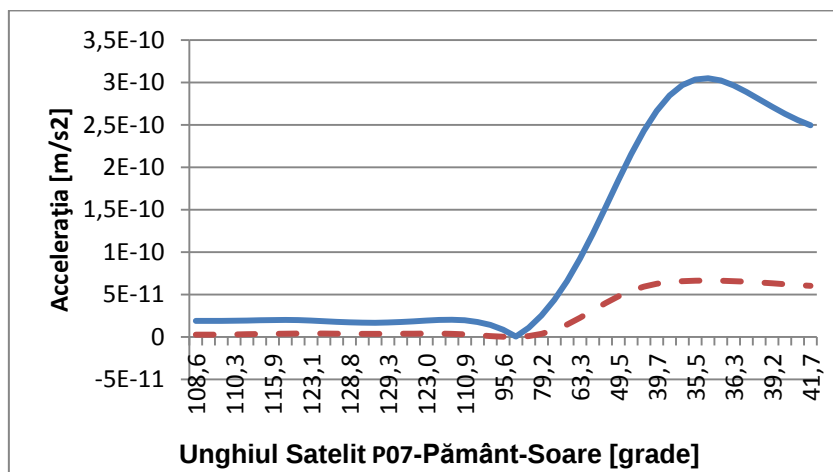
Tab. 4.3 Dimensiunile, parametrii optici și masele pentru sateliții GPS

Tipul de satelit GPS	Aria [m ²]	Oglindirea $\mu_{\text{vizibilă}}$	Reflectivitatea $V_{\text{vizibilă}}$	Oglindirea $\mu_{\text{infrarosie}}$	Reflectivitatea $V_{\text{infrarosie}}$
Block I Masa (500 Kg)					
+Z	1,510	0,75	0,86	0,5	0,2
Ramele panourilor solare	0,470	0,85	0,85	0,5	0,2
Panourile solare față	5,583	0,85	0,23	0,5	0,2
Panourile solare spate	5,583	0,5	0,11	0,5	0,2
Block II Masa (885 Kg)					
+Z	2,881	0,20	0,56	0,5	0,2
Ramele panourilor solare	0,985	0,41	0,52	0,5	0,2
Panourile solare față	10,866	0,85	0,23	0,5	0,2
Panourile solare spate	10,866	0,5	0,11	0,5	0,2
Block IIR Masa (1100 Kg)					
+Z	3,750	0	0,06	0,5	0,2
Ramele panourilor solare	0,320	0,85	0,85	0,5	0,2
Panourile solare față	13,600	0,85	0,28	0,5	0,2
Panourile solare spate	13,600	0,5	0,11	0,5	0,2

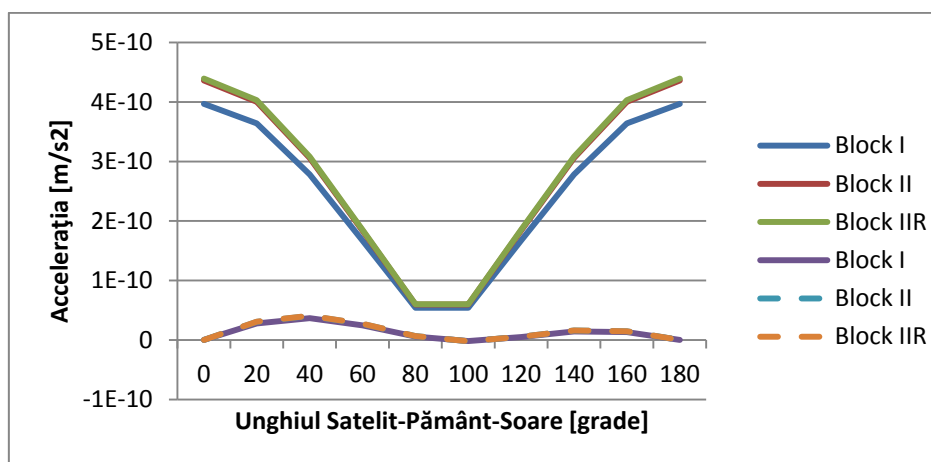
Utilizând formulele (4.27, 4.31, 4.50 și 4.51), valoarea medie a albedoului pentru perioada februarie-iunie și parametrii sateliților din tabelul de mai sus autorul a realizat graficele accelerației exercitate asupra sateliților GPS Block I, Block II și Block IIR ca urmare a acțiunii radiației Pământului în spectrul vizibil și infraroșu.



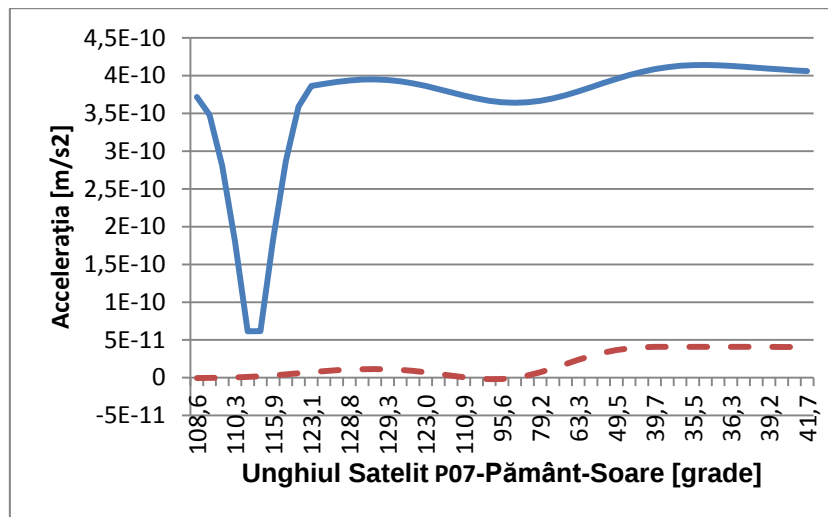
Acceleratiile datorită radiației vizibile reflectate de Pământ, componentele radiale și non-radiale



Acceleratiile datorită radiației vizibile reflectate de Pământ, componentele radiale și non-radiale pentru satelitul GPS P07



Acceleratiile datorită radiației emise infraroșu de Pământ, componentele radiale și non-radiale



Acceleratiile datorită radiației emise infraroșu de Pământ, componentele radiale și non-radiale asupra satelitului GPS P07

Cu linie continuă sunt reprezentate accelerațiile radiale iar cu linie întreruptă sunt reprezentate accelerațiile non-radiale.

Se observă că accelerația radială își atinge minimum pentru $\psi = 90^\circ$. Maximum componentei radiale este realizat pentru $\psi = 0^\circ$ și $\psi = 180^\circ$.

În cazul componentei non-radiale se observă un maxim și un minim pentru valorile aproximative $\psi = 35^\circ$ și $\psi = 145^\circ$.

Pentru cazul în care satelitul este aproximat sub forma de „sferă” se construiește un model simplu de satelit prin medierea valorii accelerației pentru unghiul ψ dintre satelit - Pământ și Soare. Astfel, accelerația se poate calcula cu formula:

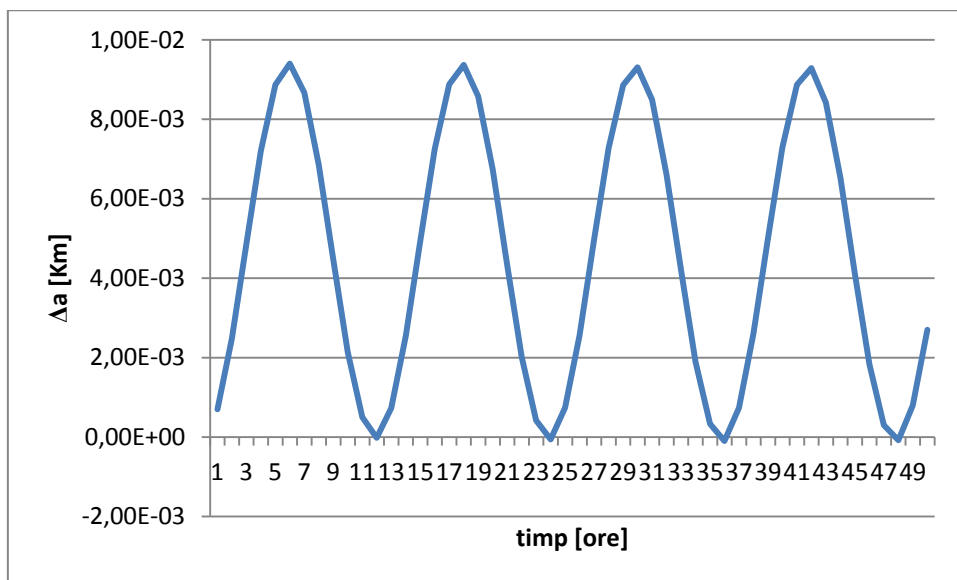
$$f_r = \frac{A}{M} \frac{E}{c} C_{sferă}$$

(4.52)

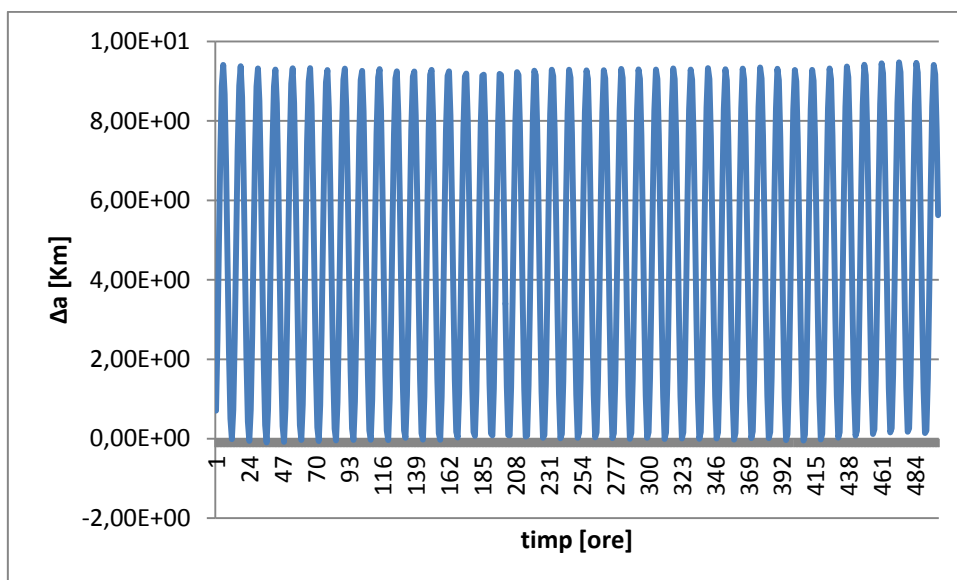
unde $C_{sferă}$ este o constantă determinată numeric și care dă dimensiunile medii și proprietățile optice ale sateliților GPS.

Tab. 4.4 Parametrii sateliții GPS (sateliții de tip sferă)

Tipul de satelit GPS	Raport Aria/Masă [m²/Kg]	$C_{sferă}$
Block I	0,01513	0,8876
Block II	0,01667	0,8551
Block IIR	0,01606	0,8134

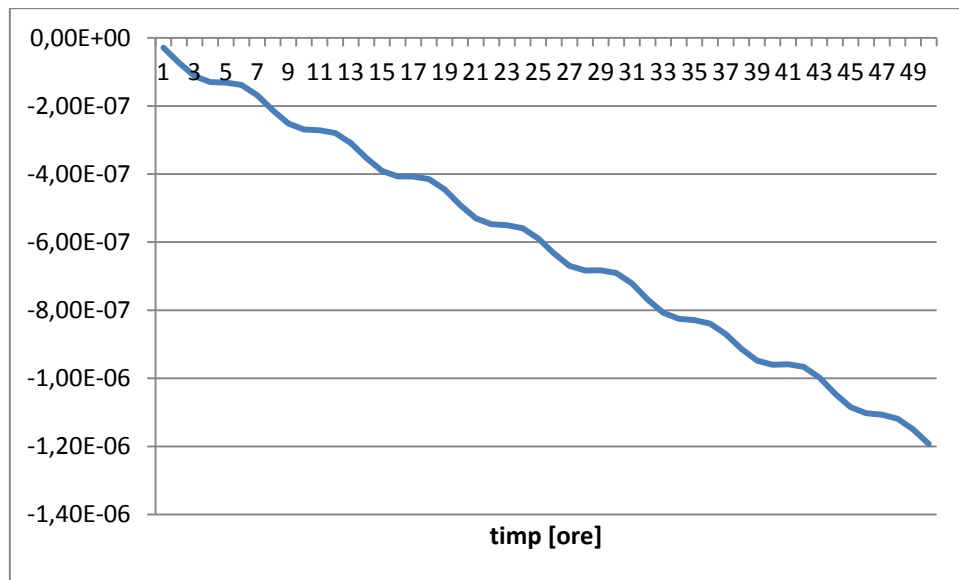


Variația semiaxei mari pentru 50 ore



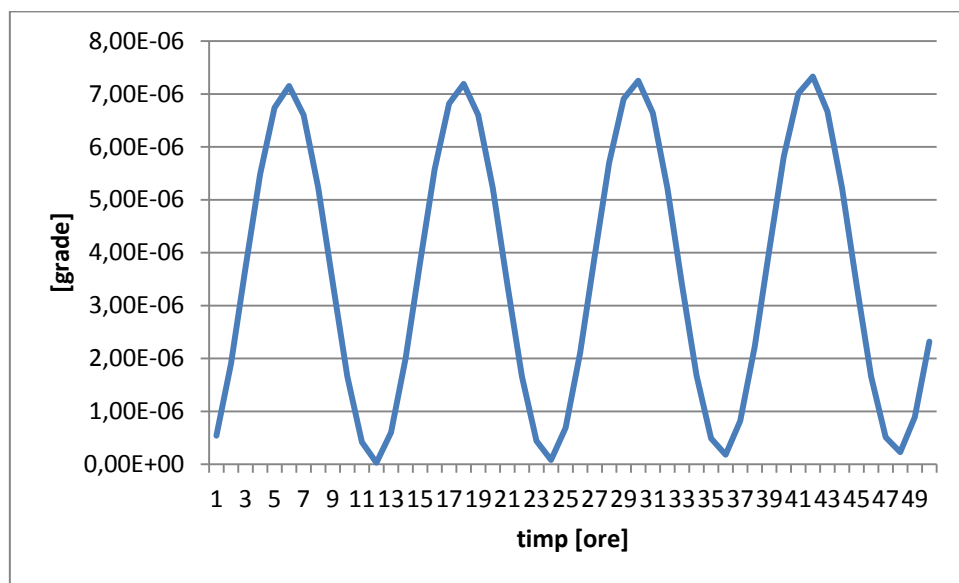
Variația semiaxei mari pentru 500 ore

Din cele două grafice de variație ale semiaxei mari realizate pentru 50 și 500 de ore se observă că aceasta prezintă două tipuri de perturbații, una scurt-periodică și una lung-periodică. Perturbația scurt-periodică este de perioadă egală cu perioada orbitală (12 ore) și o variație de 1 Km, iar perturbația lung-periodică are perioada de 240 de ore.

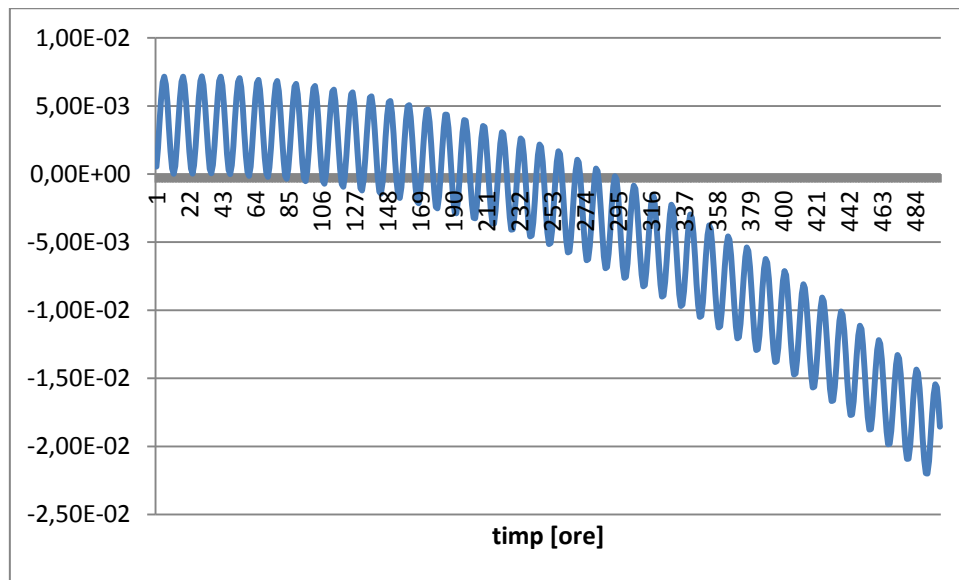


Variația excentricității pentru 50 ore

Excentricitatea prezintă a perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 6 ore având ordinul de marime $1,5 \cdot 10^{-8}$ Km.

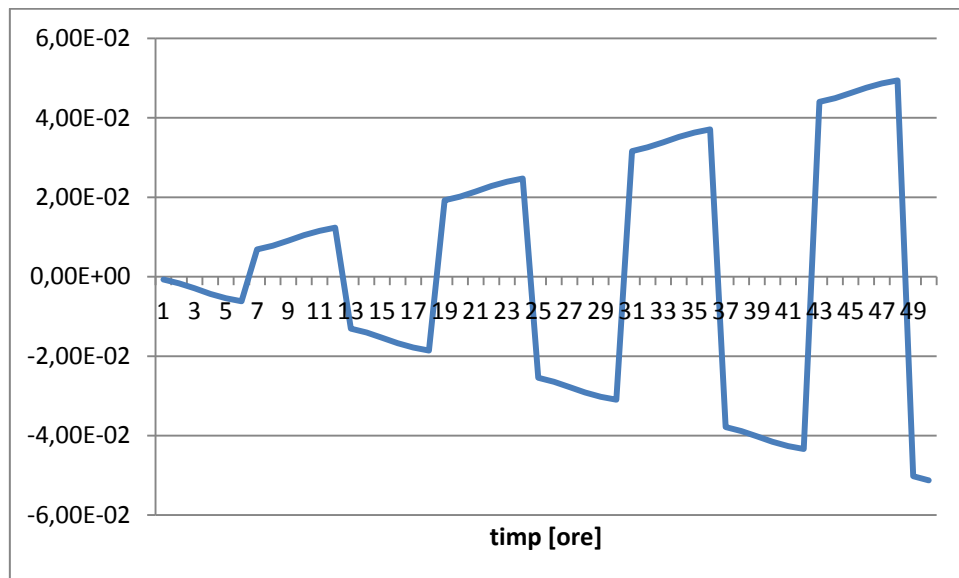


Variația înclinării pentru 50 ore

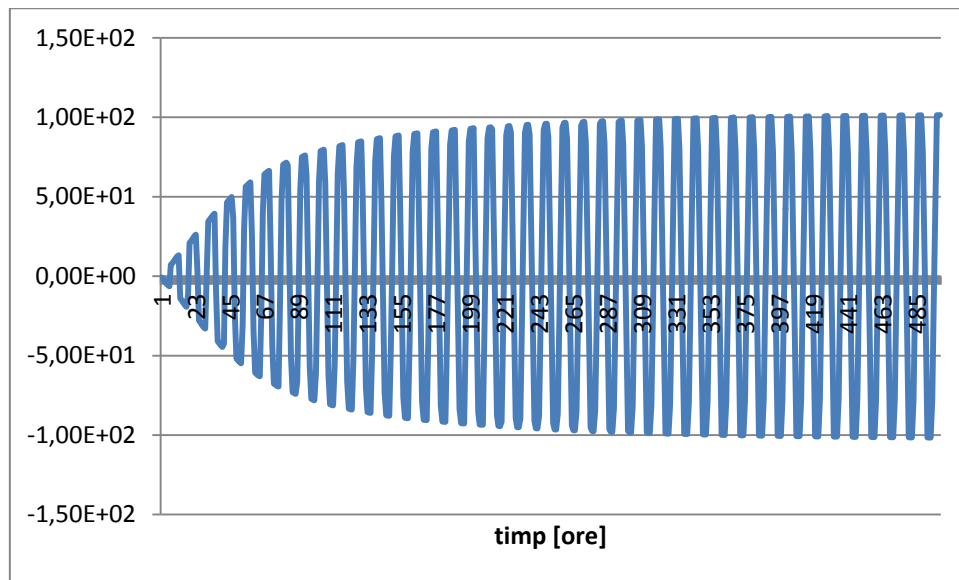


Variația înclinării pentru 500 ore

Din cele două grafice de variație ale înclinării orbitei realizate pentru 50 și 500 de ore se observă că aceasta prezintă două tipuri de perturbații, una scurt-periodică și una seculară. Perturbația scurt-periodică este de perioadă egală cu perioada orbitală (12 ore) și o variație de $7 \cdot 10^{-6}$ grade.

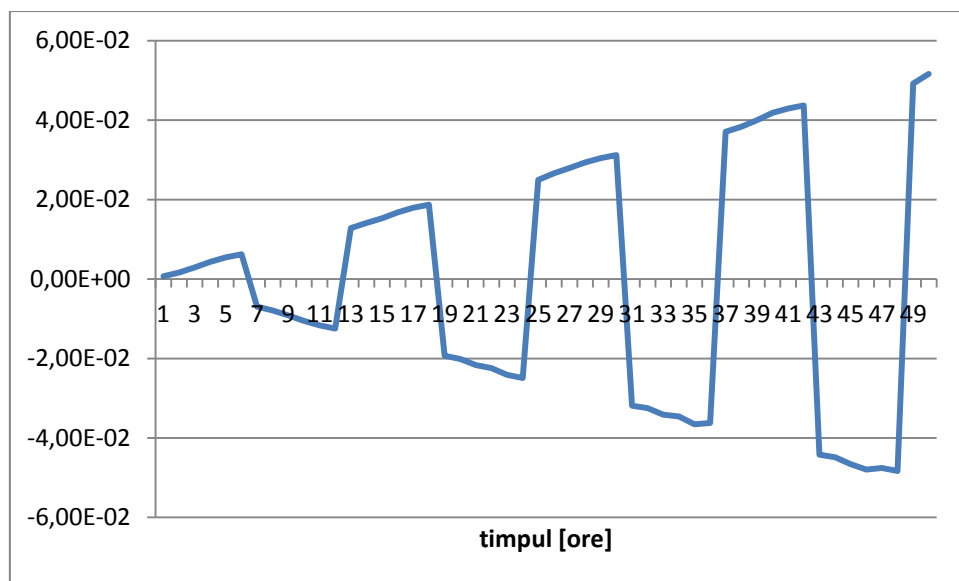


Variația anomaliei medii pentru 50 ore

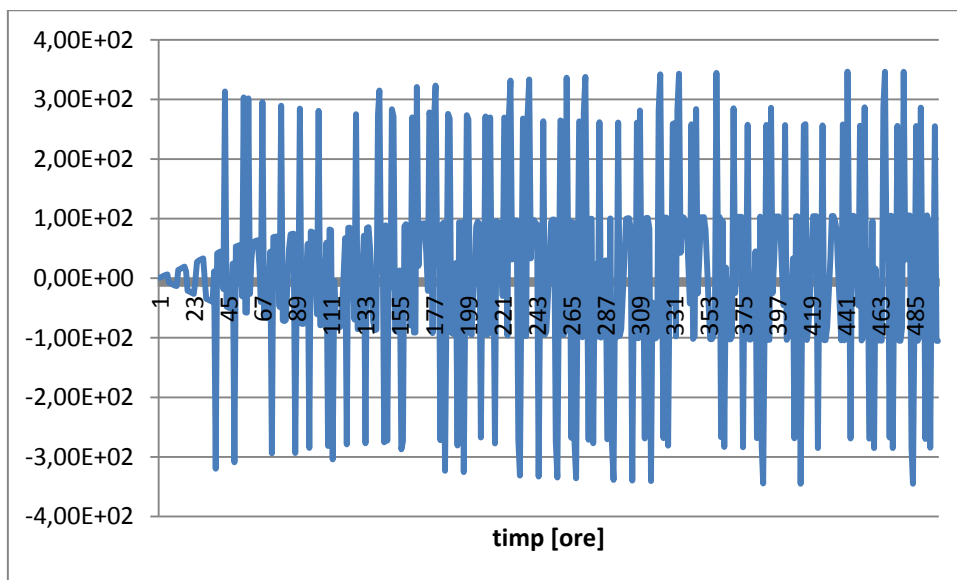


Variația anomaliei medii pentru 500 ore

Anomalia medie suferă o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore suprapusă peste o perturbație seculară.



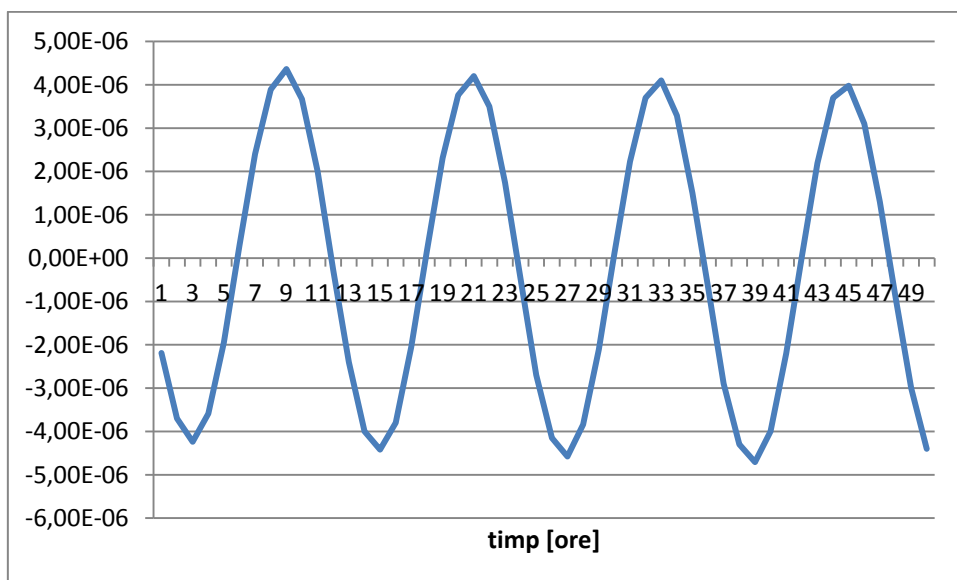
Variația argumentului perigeului pentru 50 ore



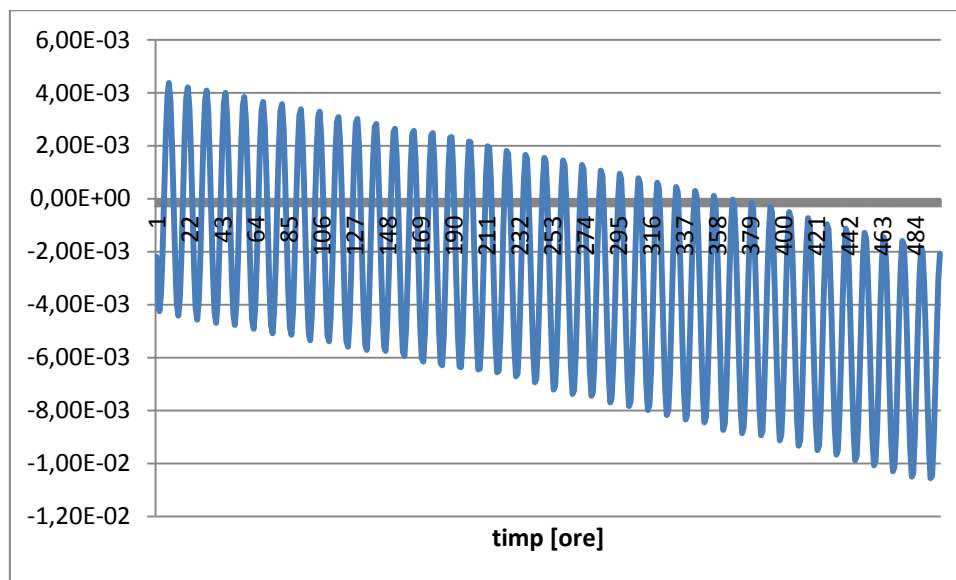
Variația argumentului perigeului pentru 500 ore

Argumentul perigeului suferă perturbații mixt periodice:

- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $1 \cdot 10^{-2}$ grade
- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $3 \cdot 10^{-2}$ grade
- o perturbație seculară.



Variația longitudinii nodului ascendent pentru 50 ore



Variația longitudinii nodului ascendent pentru 500 ore

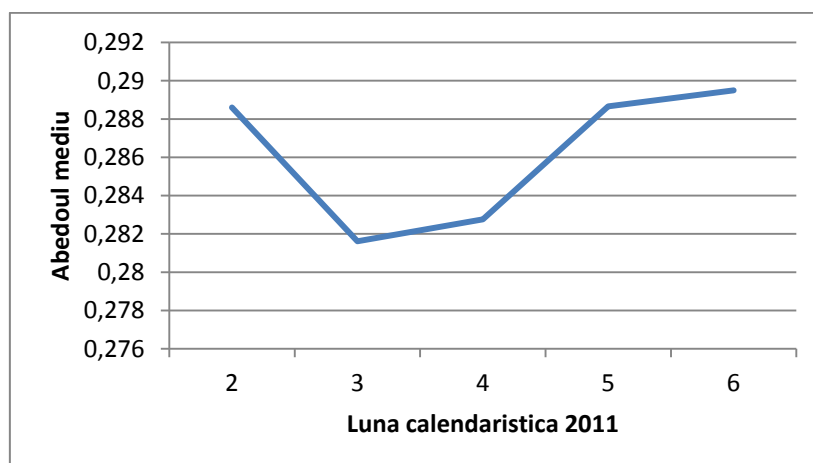
Longitudinea nodului ascendent suferă perturbații mixt periodice:

- o perturbație scurt periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $4 \cdot 10^{-3}$ grade
- o perturbație seculară.

Conform datelor furnizate de CERES (Tab. 4.4), valoarea medie a albedoului pentru perioada februarie – iunie 2011 a fost de 0,286226.

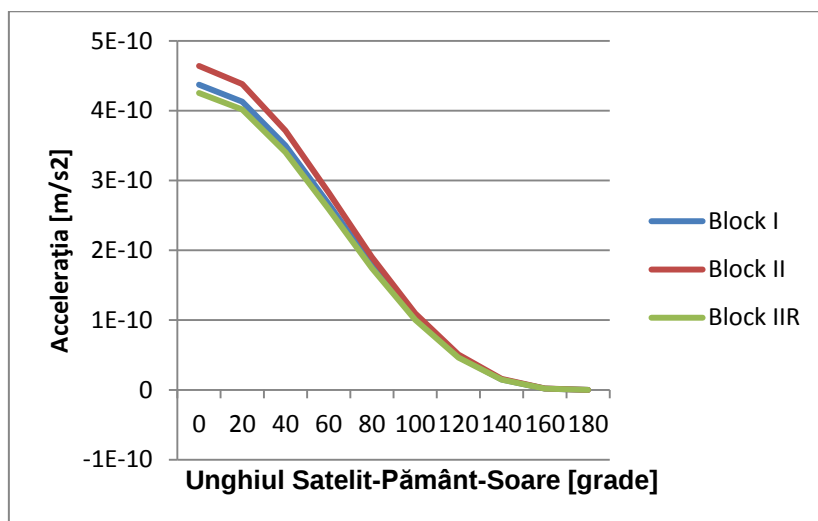
Tab. 4.5 Valorile medii ale albedoului CERES

Luna calendaristică	Valoarea albedoului	Valoarea medie a albedoului
Februarie	0,2886	0,286226
Martie	0,281614	
Aprilie	0,282758	
Mai	0,28866	
Iunie	0,289498	

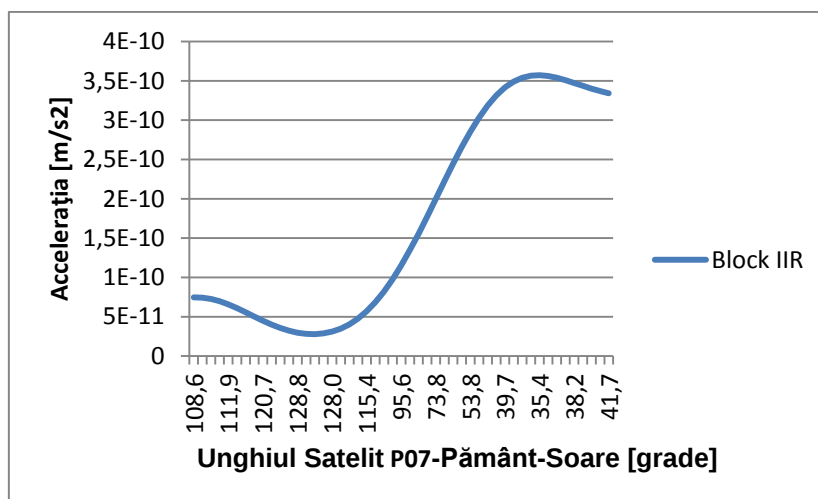


Graficul de variație a albedoului

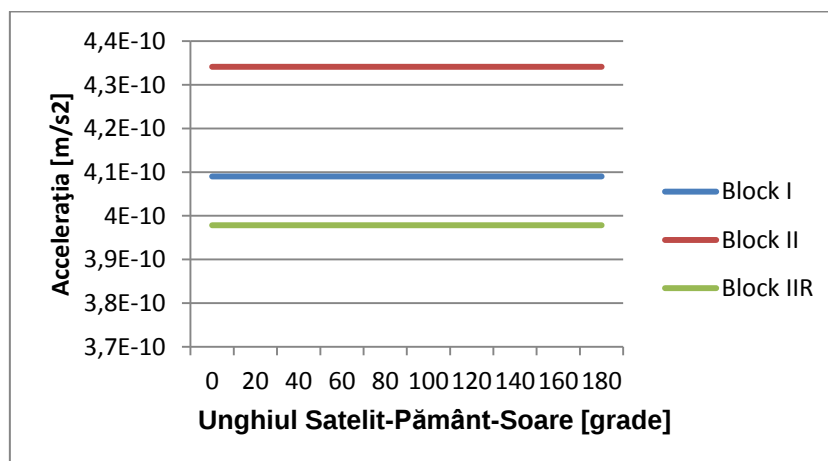
Utilizând formulele (4.27, 4.31, 4.52), valoarea medie a albedoului pentru perioada februarie-iunie și parametrii sateliților am realizat graficele accelerației exercitate asupra sateliților GPS Block I, Block II și Block IIR ca urmare a acțiunii radiației Pământului vizibile și infraroșii.



Accelerațiile datorate radiației vizibile reflectate de Pământ



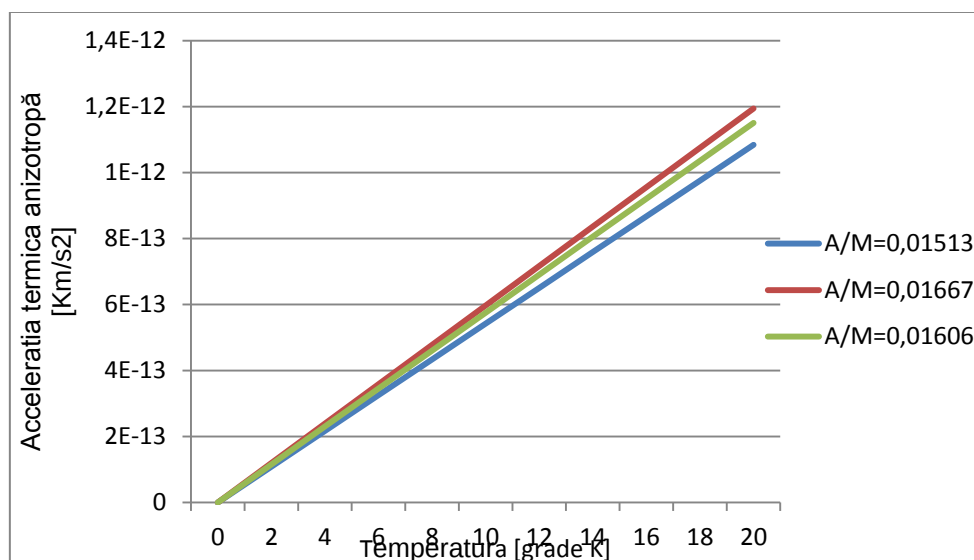
Accelerația determinată de radiația vizibilă reflectată de Pământ pentru satelitul GPS P07



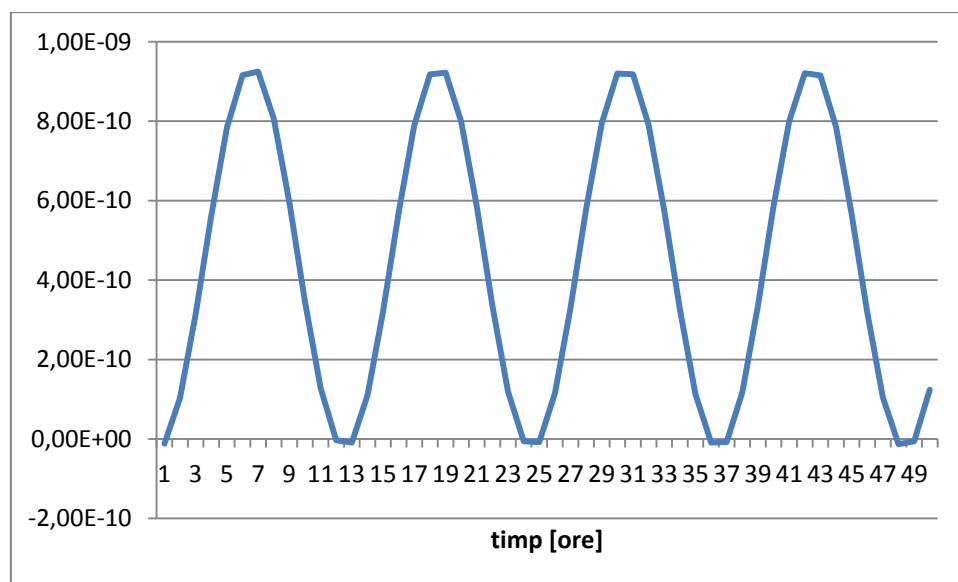
Accelerațiile datorate radiației emise infraroșu de Pământ

4.6.3 Emisia termică anizotropă

Accelerația termică anizotropă are o variație liniară în funcție de variația de temperatură a două părți ale corpului satelitului și în funcție de raportul dintre aria secțiunii eficace și masa satelitului. Valoarea accelerației datorită emisiei termice anizotrope pentru o diferență de temperatură „diurnă” este de ordinul 10^{-13} Km/s².

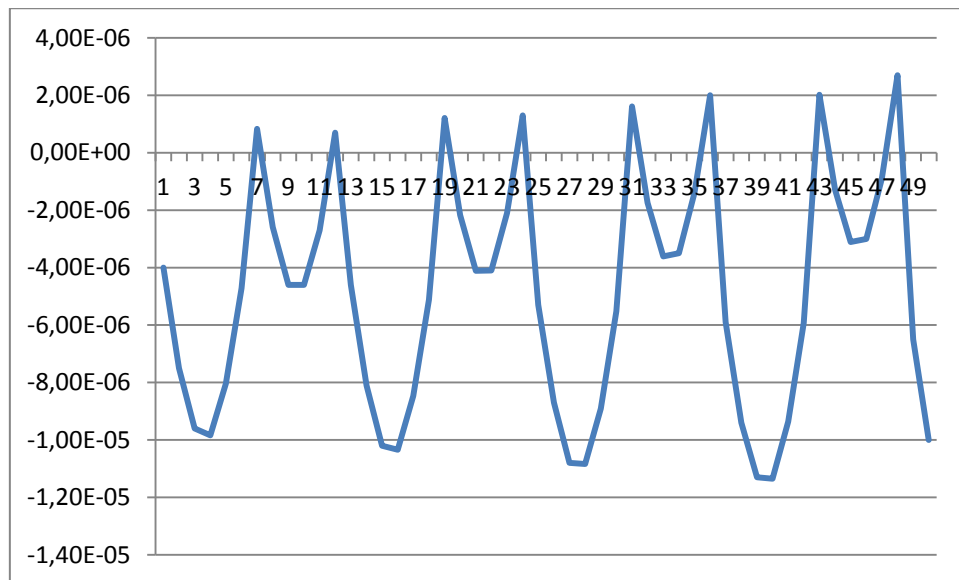


Semiaxa mare și înclinarea nu suferă perturbații.



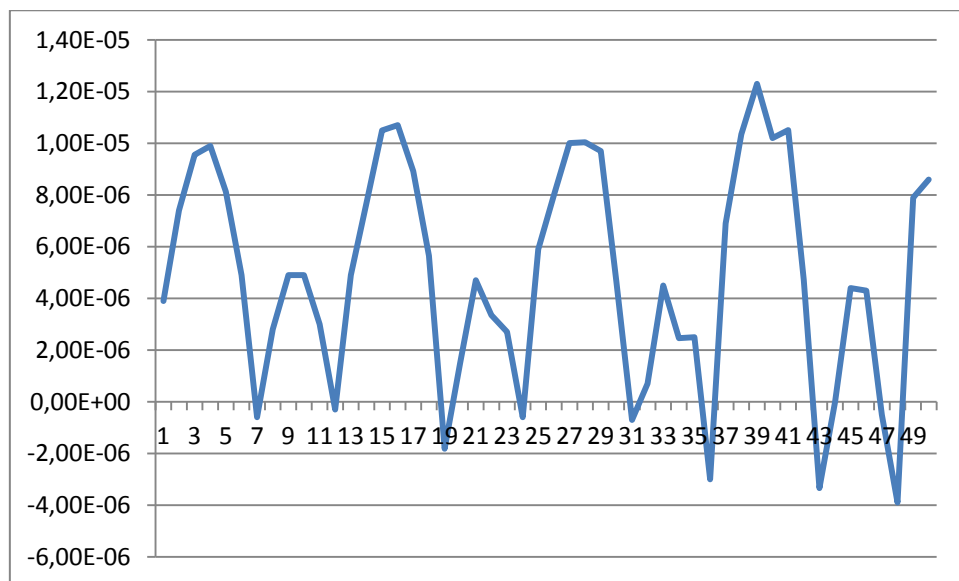
Variația excentricității pentru 50 ore

Excentricitatea suferă o perturbație scurt periodică de perioadă egală cu perioada orbitală și de amplitudine $8 \cdot 10^{-10}$.



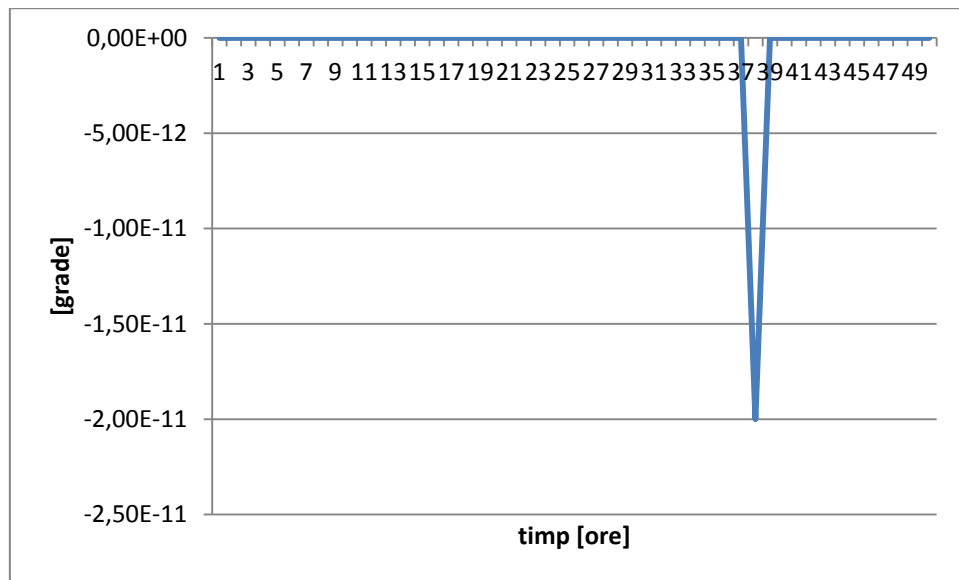
Variația anomaliei medii pentru 50 ore

Anomalia medie suferă perturbații scurt periodice cu perioada de 6 ore suprapuse peste o perturbație seculară.



Variația argumentului perigeului pentru 50 ore

Argumentul perigeului suferă perturbații scurt periodice având perioada de 6 ore suprapuse peste perturbații seculare.



Variația longitudinii nodului ascendent pentru 50 ore

Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație lung periodică având amplitudinea de $2 \cdot 10^{-11}$ grade.

4.6.4 Accelerația produsă de emisia antenelor

Emisia antenele de navigație ale sateliților GPS produce o accelerație constantă radială și ca și consecință are loc o schimbare a accelerației în această direcție. Sateliții GPS emit continuu cu o putere între 70 și 80 wați în direcția antenei în cadrul transmisiei celor două frecvențe fundamentale L1 și L2.

Forța exprimată în newtoni datorată absorbției de fotoni de la un flux al radiației incidente (E) este dată de formula:

$$F = \frac{E}{c} \quad (4.53)$$

unde: E – este exprimată în W/m^2

c – viteza luminii în vid exprimată în m/s .

Astfel, conform legii a treia a lui Newton atunci când un semnal de putere (W) este emisă există o forță egală și opusă reactivă care acționează pe direcția opusă". (Ziebart 2004)

Accelerația rezultantă este dată de:

$$Fr = \frac{W}{Mc} \quad (4.54)$$

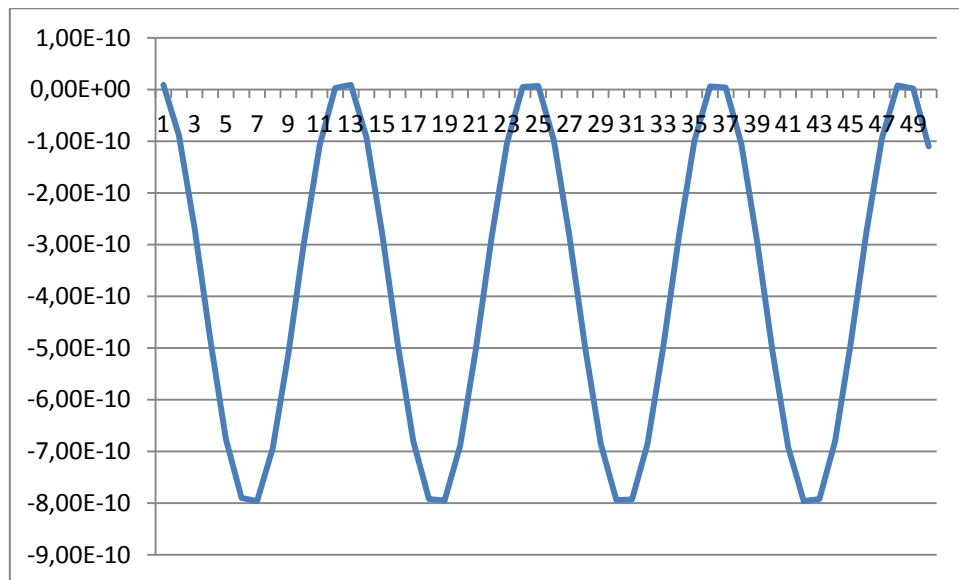
Considerând o putere de emisie a antenelor de 80 wați, accelerația rezultantă pe diferite tipuri de sateliți GPS este:

Block I: $5,3 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$

Block II: $3,0 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$

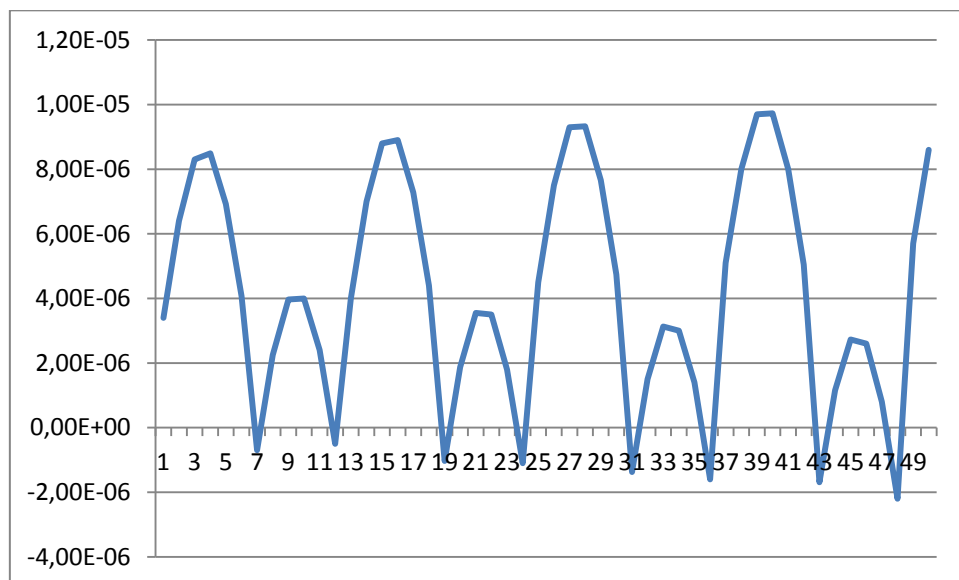
Block IIR: $2,4 \cdot 10^{-10} \text{ m/s}^2$

Semiaxa mare și înclinarea nu suferă perturbații.



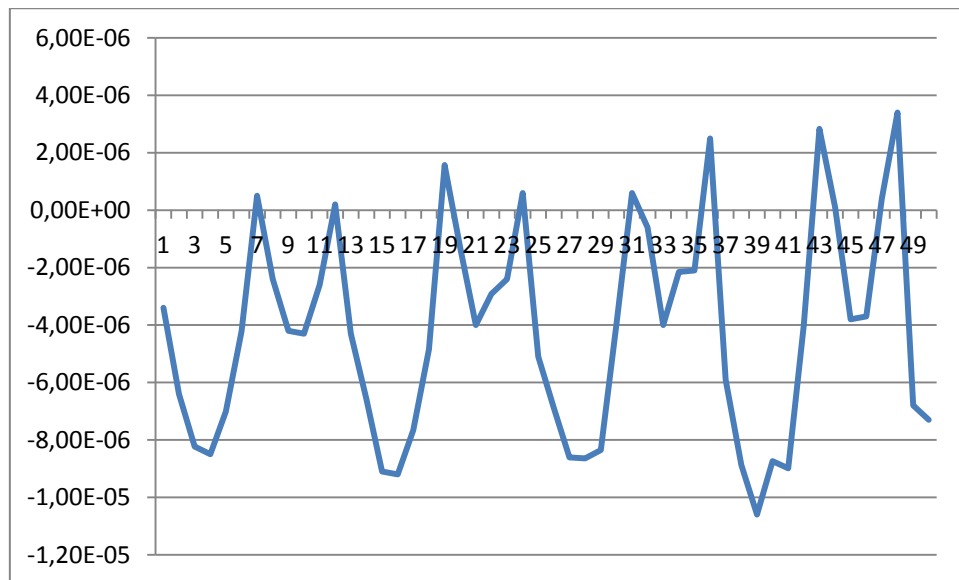
Variația excentricității pentru 50 ore

Excentricitatea prezintă o perturbație scurt periodică cu o perioadă egală cu perioada orbitală și o amplitudine de $8 \cdot 10^{-10}$.



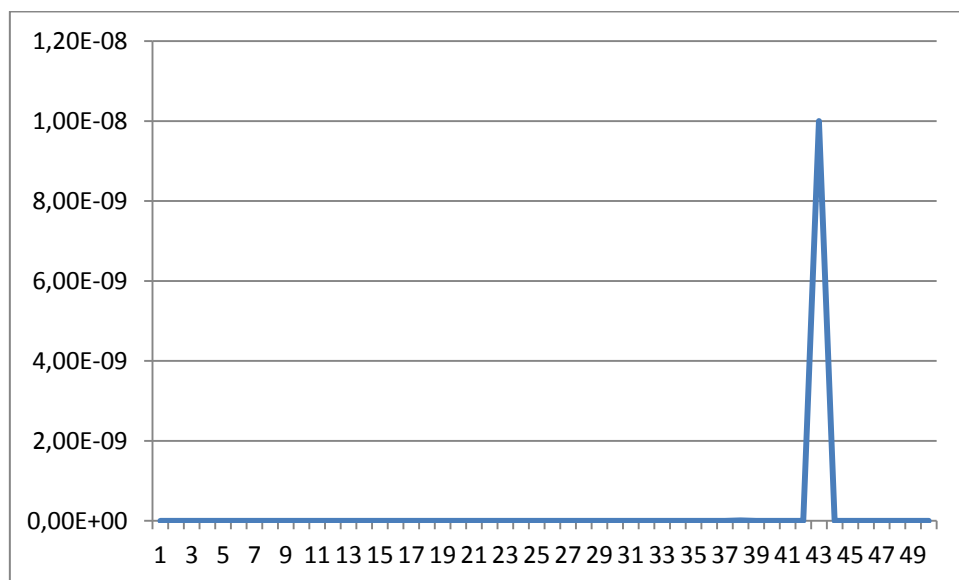
Variația ascensiei drepte a nodului ascendent pentru 50 ore

Perturbațiile care acționează asupra longitudinii nodului ascendent sunt scurt periodice cu perioada de 6 ore și amplitudinea de $4 \cdot 10^{-6}$ și $8 \cdot 10^{-6}$ grade suprapuse peste o perturbație seculară.



Variația argumentului perigeului pentru 50 ore

Argumentul perigeului suferă perturbații scurt periodice având perioada de 6 ore.



Variația longitudinii nodului ascendent pentru 50 ore

Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație lung periodică având amplitudinea de $1 \cdot 10^{-8}$ grade.

4.6.5 Eclipsele

MODELAREA REGIUNII DE ECLIPSĂ

Sateliții care orbitează în jurul Pământului trec periodic prin zone de eclipsă totală sau parțială atunci când acești traversează prin regiunile cunoscute sub numele de penumbră și umbră.

În zona de penumbra, presiunea radiației solare este parțial ocultată de către Pământ, în timp ce umbra poate fi definită ca fiind regiunea opusă Soarelui față de Pământ complet lipsit de radiația solară.

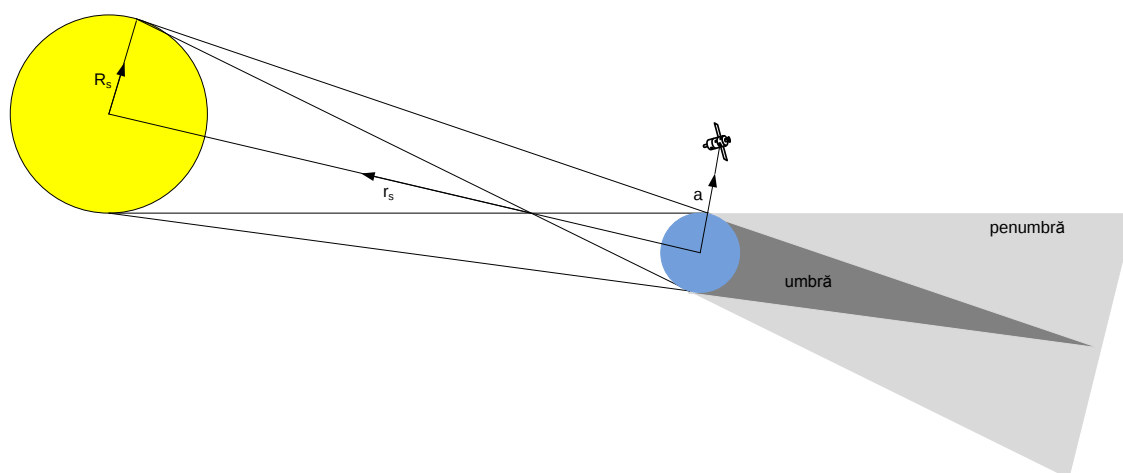


Fig. 4.5 Zona de eclipsă a satelitelui GPS

În figura de mai sus este reprezentată zona de umbră și de penumbră pentru forma sferică a Pământului. În realitate, Pământul este turtit la poli iar marginile regiunii de penumbră și umbra suferă modificări.

Pentru a modela cu acuratețe forța datorată radiației solare este necesar cunoașterea momentului intrării și ieșirii satelitelui din zona de umbră.

Conform literaturii de specialitate privind modelarea regiunii de umbră se indică faptul că aceste metode sunt fie precise, fie eficiente, dar nu ambele. Astfel, se va modela în această teză o nouă metodă pentru determinarea eclipselor (când satelitul este complet iluminat sau când este în penumbră sau umbră) luându-se în considerare forma reală a Pământului. Scopul este de a dezvolta o metodă care să combine precizia cu eficiența. Noua metodă matematică își are izvorul în metoda din lucrările lui Adhya et al. (2004) și teza de doctorat a acestuia Adhya (2005).

Determinarea eclipselor sateliților

În continuare prezint metoda dezvoltată de Adhya (2005).

Metoda se bazează pe testele care determină dacă liniile provenind de la marginile Soarelui până la satelit intersectează sau nu Pământul. Dacă o intersecție se realizează și distanța de la Soare până la acest punct este mai mică decât distanța Soare-satelit, atunci satelitul se află în zona de penumbră sau de umbră.

Un plan instantaneu este definit în geocentru, $\vec{r}_s$ este vectorul Pământ-Soare, și $\vec{a}$ este vectorul Pământ-satelit. În acest spațiu bidimensional Soarele este reprezentat sub formă de

cerc. În plan, razele de lumină care pleacă de la marginile Soarelui și tangentează Pământul determină marginile zonelor de penumbră și de umbră.

Determinarea punctelor de intersecție este realizată folosind aproximarea matematică de elipsoid pentru Pământ:

$$\frac{x^2 + y^2}{p^2} + \frac{z^2}{q^2} = 1 \quad (4.55)$$

unde x, y, z sunt coordonatele unui punct de pe elipsoid, p este raza ecuatorială iar q este raza polară.

Ecuatia dreptei care unește satelitul cu una din marginile Soarelui este:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad (4.56)$$

unde (a_1, a_2, a_3) sunt coordonatele vectorului de poziția a satelitului iar (b_1, b_2, b_3) sunt coordonatele vectorului de poziția a unei margini a Soarelui. Astfel ecuația de mai sus (4.56) poate fi scrisă sub forma:

$$\frac{x - a_1}{b_1 - a_1} = \frac{y - a_2}{b_2 - a_2} = \frac{z - a_3}{b_3 - a_3} \quad (4.57)$$

Vectorii $\vec{a}$ și $\vec{b}$ pot fi obținuți pentru o epocă specifică din efemeridele precise sau din integrarea numerică. Din ecuația (4.57), y și z se pot scrie în funcție de x și coeficienții $\vec{a}$ și $\vec{b}$.

$$y = \frac{x(b_2 - a_2) + a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 - a_1} \quad z = \frac{x(b_3 - a_3) + a_3b_1 - a_1b_3}{b_1 - a_1} \quad (4.58)$$

și înlocuind în ecuația (4.55) rezultă:

$$\frac{x^2 + \left[\frac{x(b_2 - a_2) + a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 - a_1} \right]^2}{p^2} + \frac{\left[\frac{x(b_3 - a_3) + a_3b_1 - a_1b_3}{b_1 - a_1} \right]^2}{q^2} = 1$$

$$q^2 p^2 x^2 + q^2 \left[\frac{x(b_2 - a_2) + a_2b_1 - a_1b_2}{b_1 - a_1} \right]^2 + p^2 \left[\frac{x(b_3 - a_3) + a_3b_1 - a_1b_3}{b_1 - a_1} \right]^2 = p^2 q^2$$

dezvoltând, se obține o ecuație de gradul 2 de forma:

$$Ax^2 + Bx + C = 0$$

ai cărei coeficienți sunt:

$$A = q^2 \left[(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 \right] + p^2 (b_3 - a_3)^2$$

$$B = 2q^2 (b_1b_2a_2 - a_1b_2^2 - a_2^2b_1 + a_1a_2b_2) + 2p^2 (b_1b_3a_3 - a_1b_3^2 - a_3^2b_1 + a_1a_3b_3)$$

$$C = q^2 (b_1a_2 - b_2a_1)^2 + p^2 (b_1a_3 - b_3a_1)^2 - p^2 q^2 (b_1 - a_1)^2$$

Pentru rezolvarea sistemului este necesară cunoașterea coordonatelor marginilor Soarelui. Soluțiile reale ale ecuației pătratice dau coordonatele x ale punctelor de intersecție ale dreptei care pleacă de la una din marginile Soarelui-satelit cu elipsoidul.

Condiția existenței soluțiilor reale este:

$$B^2 - 4AC \geq 0.$$

Dacă condiția este realizată, atunci are loc o intersecție. Valoarea negativă a inegalității simbolizează că nu are loc o intersecție și deci satelitul este complet iluminat. După obținerea coordonatei x de intersecție sunt necesare determinarea și a coordonatelor y și z pentru a calcula distanța până la Soare. Dacă această distanță este mai mare decât distanța dintre Soare

și satelit, atunci satelitul este complet iluminat. În caz contrar, se ține cont de următoarele condiții:

- dacă ambele linii au soluții reale, atunci satelitul se află în zona de umbră
- dacă doar una dintre linii are soluții reale, atunci satelitul se află în zona de penumbră
- dacă ecuația nu are soluții reale, atunci satelitul este complet iluminat

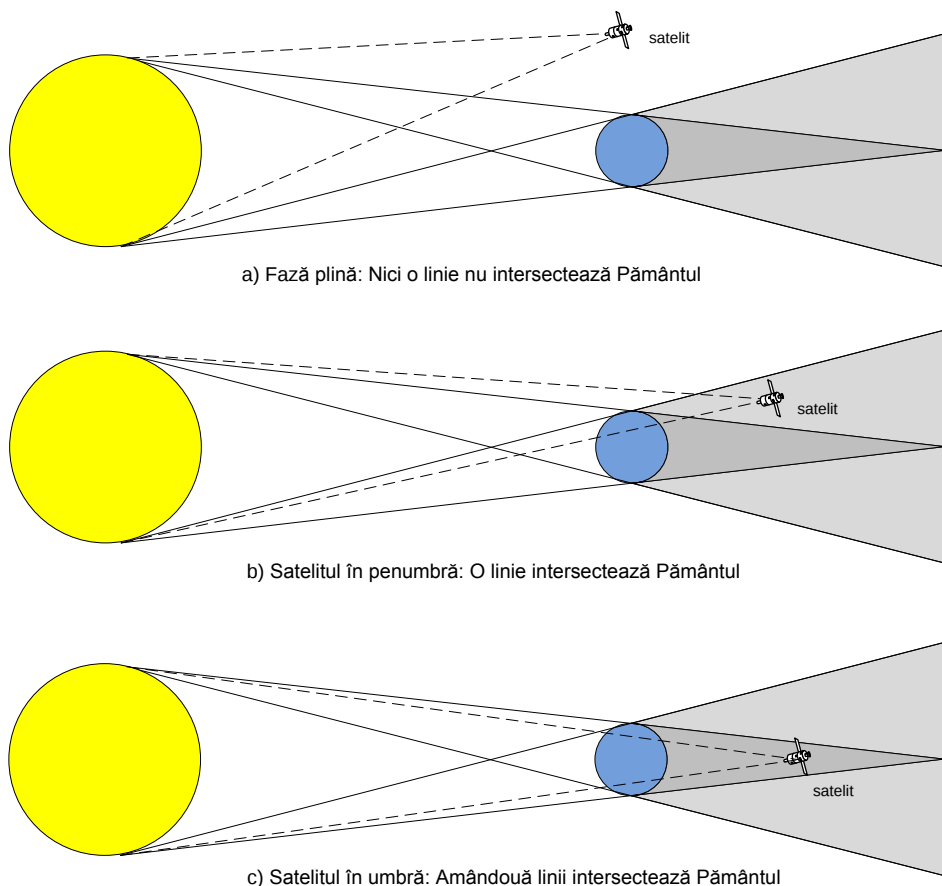


Fig. 4.6 Determinarea poziției satelitului GPS

Metoda propusă de autor constă în utilizarea dreptei care trece prin punctele centrul Soarelui – satelit. Coordonatele centrului Soarelui se pot obține fie prin integrare numerică, sau de pe site-uri specializate. Pentru acest studiul autorul a folosit date furnizate de site-ul www.imcce.fr/en/ephemerides. Acest site oferă coordonatele geocentrice ale Soarelui în funcție de unitatea astronomică. Pentru studiul realizat de autor s-au folosit coordonatele Soarelui obținute prin integrare numerică.

În continuare sunt prezentate situațiile de intersecție ale dreptei ce trece prin punctele centrul Soarelui-satelit și elipsoidul Pământului.

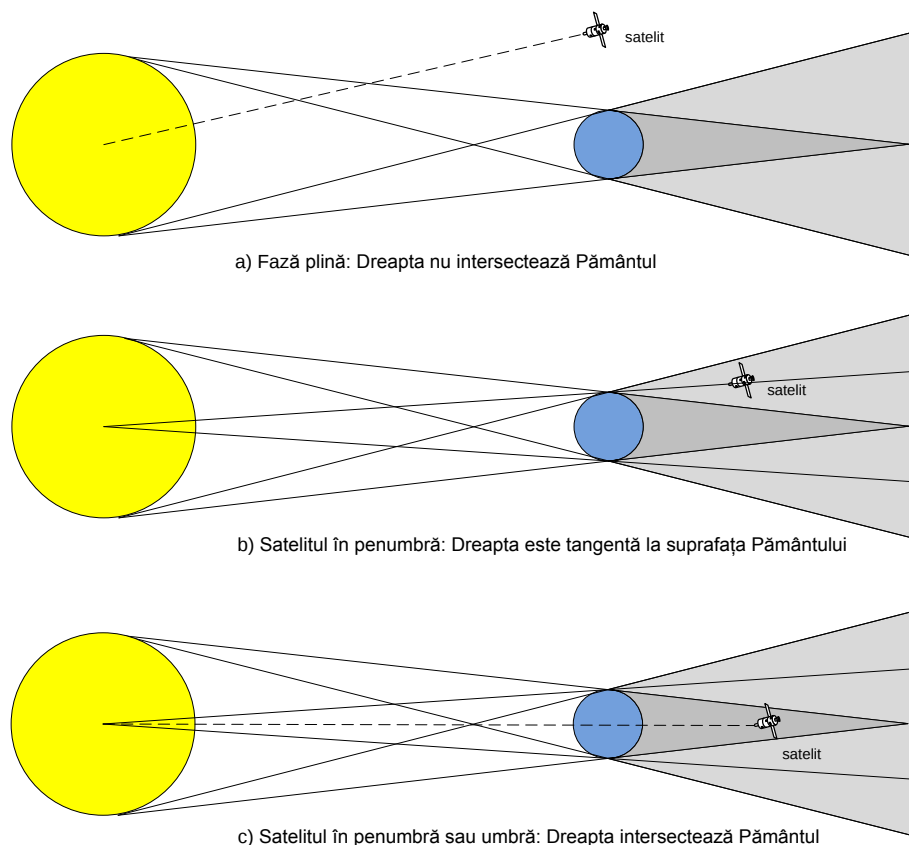
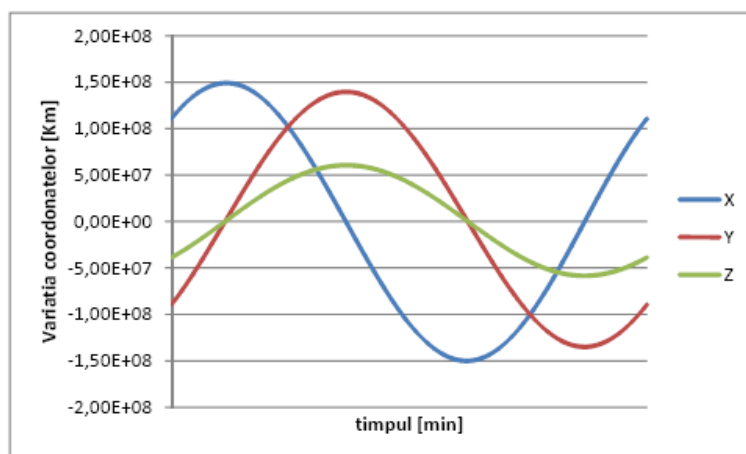


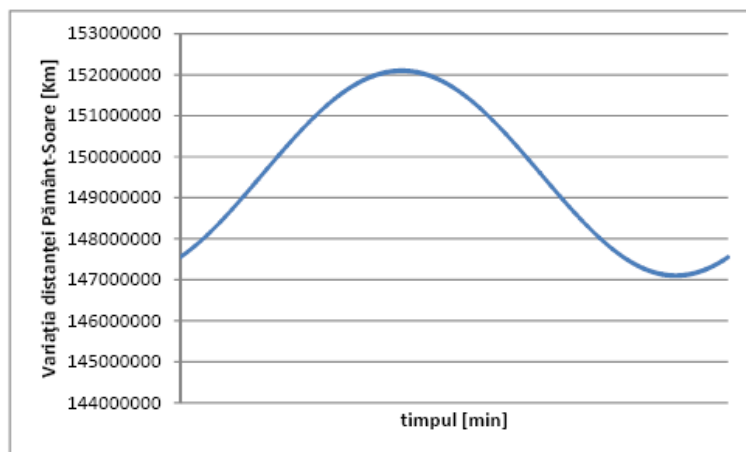
Fig. 4.7 Determinarea poziției satelitului GPS. Soluția propusă de autor

- dacă sistemul nu are soluții reale, atunci satelitul este complet iluminat.
- dacă sistemul are o singură soluție reală, atunci dreapta este tangentă la suprafața elipsoidului iar satelitul se poate afla în zona de penumbra sau complet iluminat. Atunci este necesară determinarea și a coordonatelor y și z de intersecție pentru a calcula distanța până la Soare. În cazul în care această distanță este mai mare decât distanța dintre Soare și satelit, atunci satelitul este complet iluminat, în caz contrar satelitul se află în zona de penumbra.
- dacă sistemul are două soluții reale, atunci este necesară determinarea și a coordonatelor y și z de intersecție pentru a calcula distanța până la Soare. În cazul în care această distanță este mai mare decât distanța dintre Soare și satelit, atunci satelitul este complet iluminat, în caz contrar satelitul se află în zona de penumbră sau de umbră.

Pentru acest studiu am determinat coordonatele Soarelui prin integrare numerică din minut în minut pentru 365de zile folosind ca dată de start, data de 10.02.2011, ora: 00:00:00 UTC.



Variația coordonatelor Soarelui pentru un an de zile



Variația razei vectoare a Soarelui pentru un an

Pentru determinarea coordonatelor geocentrice ale satelitului din minut în minut pentru o perioadă de 365 de zile autorul a pornit de la condițiile inițiale din data de 10.02.2011 ora 00.00 UT:

$x_{ai} = 2425.8676;$ $v_{xai} = 3.8327;$
 $y_{ai} = -15215.1157;$ $v_{yai} = 0.4529;$
 $z_{ai} = 21743.2188;$ $v_{zai} = -0.1055;$

Tab. 4.6 Numărul de soluții pentru intrarea satelitului GPS în zona de umbră

Tipul de elipsoid	Număr de soluții reale ale sistemului în funcție de perturbație		Număr minute pentru satelit în zona de umbră sau penumbră	
	J_2	Presiunea de radiație solară directă	J_2	Presiunea de radiație solară directă
$p = 6378,137$ Km $q = 6356,752$ Km	26424	26278	0	0
$p = q = 6378,137$ Km	26506	26376	0	0
$p = q = 6402$ Km	26702	26488	0	0

Pentru toate situațiile când sistemul a avut soluții reale a reieșit că satelitul nu a intrat pentru nici un moment în zona de umbră sau de penumbră a Pământului.

Rezultatele numerice privind trecerea satelitului prin zona de penumbră și de umbră a Pământului sunt în concordanță cu mișcarea reală a sateliților.

MODELAREA REGIUNII DE PENUMBRA

La intrarea satelitului în zona de penumbră, fluxul solar descrește spre zero până în zona de umbră. Regiunea de penumbră este o zonă relativ mică a cărei mărime crește odată cu altitudinea satelitului.

În anumite condiții geometrice Soare-Pământ-satelit pentru care la anumite înclinări ale orbitei au ca efect creșterea perioadei de traversare a zonei de penumbră. În continuare este realizat un calcul simplu pentru determinarea perioadei de tranzitare a zonei de penumbră.

Perioada maximă de timp petrecută în zona de penumbră

Perioada maximă de timp pe care o poate petrece un satelit GPS în zona de penumbră a fost calculată plecând de la orbita satelitului și geometria zonei de penumbră și de umbră (fig. 4.8). Pentru acest calcul, Pământul a fost considerat sferic.

R_S – reprezintă raza Soarelui, $R_S = 696000$ Km

R_P – reprezintă raza Pământului, $R_P = 6378$ Km

r_s – reprezintă distanța dintre centrul Pământului și centrul Soarelui,
 $r_s = 149597870691.0$ Km

a – raza satelitului, $a = 26559$ Km

α , β , x și y – reprezintă unghiurile și distanțele necesare calcului.

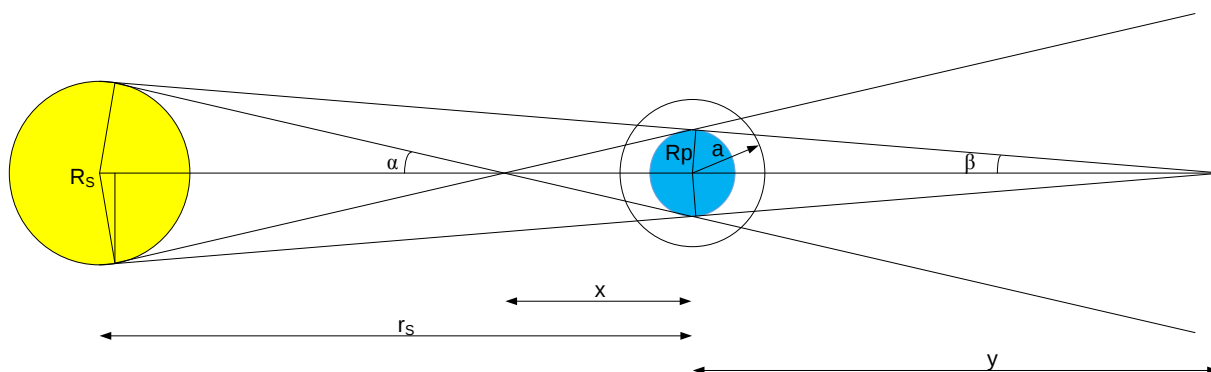


Fig. 4.8. Soarele, Pământul și geometria regiunii de penumbră și umbră

Mărimea zonei de penumbra se calculează astfel:

$$\sin \alpha = \frac{R_P}{x} = \frac{R_S}{r_s - x}$$

$$x = \frac{R_P r_s}{R_S + R_P}$$

$$\sin \beta = \frac{R_P}{y} = \frac{R_S}{r_s + y}$$

$$y = \frac{R_P r_s}{R_S - R_P}$$

raza secțiunii circulare prin conul de penumbră (h_p) este:

$$h_p = (x + a) \operatorname{tg} \alpha \quad h_u = (y - a) \operatorname{tg} \beta$$

iar raza secțiunii circulare prin conul de umbră (h_p) este:

$$d = 2\sqrt{h_p^2 - h_u^2}.$$

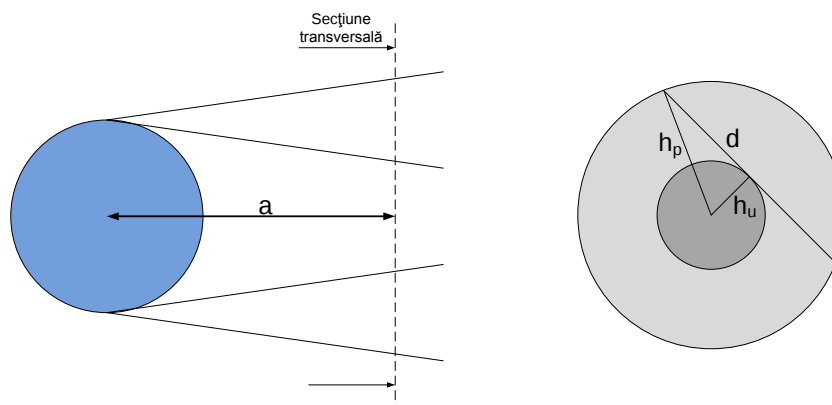


Fig. 4.9 Secțiunea transversal prin regiunea de eclipsă

În urma calculelor s-au obținut următoarele valori:

$$\alpha = 0,2690108$$

$$\beta = 0,264125217$$

$$x = 1358435,514 \text{ Km}$$

$$y = 1383562,617 \text{ Km}$$

$$h_p = 6502,769457 \text{ Km}$$

$$h_u = 6255,629262 \text{ Km}$$

$$d = 3551,401498 \text{ Km}$$

Dacă considerăm o viteză medie a satelitului de aproximativ 3.86 Km/s, atunci satelitul traversează zona de penumbră într-un interval de 15.3 minute.

Aceasta reprezintă valoarea teoretică care estimează perioada pe care o poate petrece un satelit în zona de penumbră.

4.6.6 Efectul Poynting – Robertson

Efectul Poynting-Robertson, numit după John Henry Poynting și Howard Percy Robertson, reprezintă un proces de frânare prin care radiația solară determină particulele de praf din sistemul solar să se rotească pe o spirală descrescătoare. Frânarea este produsă în esență de componenta tangențială a forței produsă de presiunea radiației asupra mișcării particulelor de praf.

Pentru particulele de praf care înconjoară Soarele, radiația Soarelui pare să vină pe o direcție puțin înainte (aberația de lumină). Prin urmare, absorbția acestei radiații duce la o forță cu o componentă în sens contrar direcției de mișcare. Unghiul de aberației este extrem de mic, deoarece radiația se deplasează cu viteza luminii în timp ce particula de praf se mișcă cu o viteză a cărei ordine de mărime este mult mai mic.

Forța de frânarea produsă de efectul Poynting-Robertson poate fi înțeleasă ca o forță ce acționează pe direcția opusă direcția de deplasare a particulei de praf pe orbita proprie, ceea ce produce un efect de scădere a momentului cinetic. Astfel, în timp ce particula de praf se deplasează pe o spirală foarte încet către Soare, viteza sa orbitală crește continuu.

Forța Poynting-Robertson este egală cu:

$$F_{PR} = \frac{Wv}{c^2} = \frac{r^2}{4c^2} \sqrt{\frac{GM_s L_s^2}{R^5}} \quad (4.59)$$

unde:

W - puterea radiației incidente,
 v - viteza particulelor de praf,
 c - viteza luminii,
 r - raza obiectului,
 G - constanta gravitațională universală,
 M_s - masa Soarelui,
 L_s - luminozitatea solară
 R - raza orbitei pe care se deplasează obiectul în jurul Soarelui.

Luminozitate solară, $L_\odot$, reprezintă unitatea fluxului radiant (putere emisă sub formă de fotoni) pentru a măsura luminozitatea stelelor. O unitate de luminozitate solară este egală cu luminozitatea curentă acceptată a Soarelui și are valoarea de 3.839×10^{26} W, sau 3.839×10^{33} erg/s. Valoarea este ușor mai ridicată, 3.939×10^{26} W (echivalent cu 4.382×10^9 kg/s sau $1,9 \times 10^{-16}$ $M_\odot/d$) în cazul în care se ia în considerare radiația solară neutrino și radiațiile electromagnetice. Soarele este o stea slab variabilă și, prin urmare, luminozitatea acestuia fluctuează periodic la 11 ani, numit și ciclu solar, ceea ce determină o variație periodică de aproximativ $\pm 0,1\%$.

Luminozitatea solară se referă la iradianța solară măsurată pe Pământ sau de către sateliții aflați pe orbita Pământului. Iradianța medie la partea de sus a atmosferei Pământului este cunoscută uneori sub numele de constanta solară, $I_\odot$. Iradianța este definită ca puterea pe unitatea de suprafață, astfel încât luminozitatea solară (energie totală emisă de Soare) este iradianța primită pe Pământ (constanta solară), înmulțită cu suprafața sferei a cărei rază este reprezentată de distanța medie dintre Pământ și Soare:

$$L_s = 4\pi k A^2 \quad (4.60)$$

unde:

A - unitatea astronomică în metri
 k - o constantă (a cărei valoare este foarte aproape de unu), care reflectă faptul că distanța medie de la Pământ la Soare nu este exact o unitate astronomică.

considerând:

$$c = 299792458 \text{ m/s}$$

$$r = 1 \text{ m}$$

$$G = 6,674 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3/\text{Kgs}^2$$

$$M_s = 2 \cdot 10^{30} \text{ Kg}$$

$$L_s = 3,9 \cdot 10^{26} \text{ Kgm}^2/\text{s}^3$$

$$R = 150000000000 \text{ m (unitatea astronomică)}$$

Rezultă o valoare a forței Poynting-Robertson:

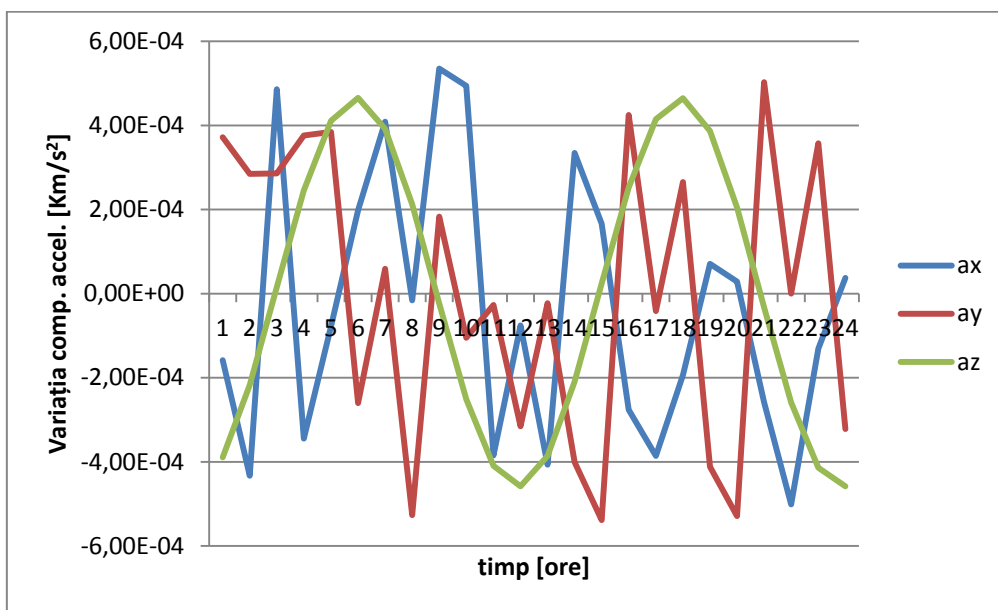
$$F_{PR} = 1,4 \cdot 10^{-12} \text{ kN}$$

Accelerația Poynting-Robertson se determină din raportul dintre forța Poynting-Robertson și masa satelitelui.

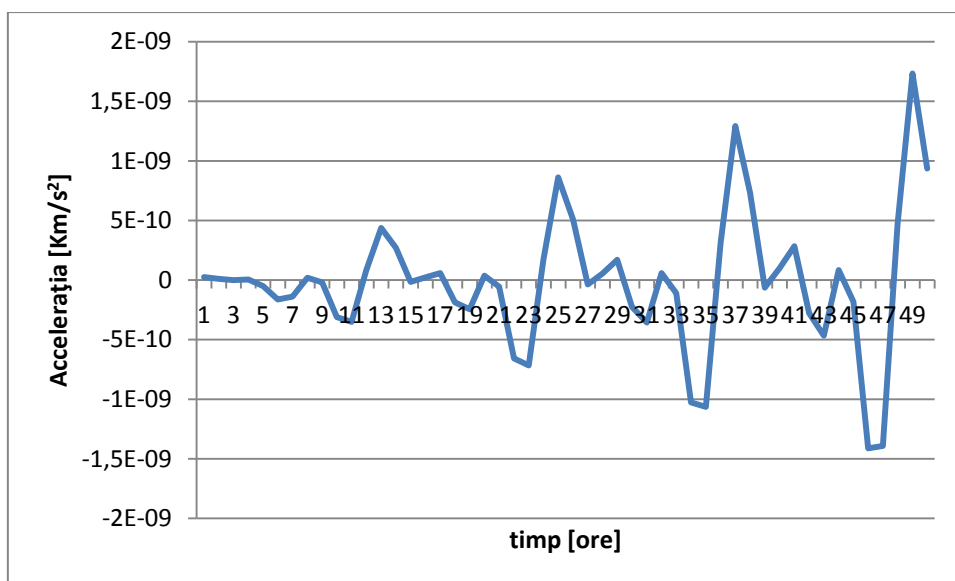
$$a_{PR} = \frac{Wv}{c^2 m} = \frac{r^2}{4c^2 m} \sqrt{\frac{GM_s L_s^2}{R^5}} \quad (4.61)$$

Considerând raportul $\frac{r^2}{m}$ dintre raza satelitelui și masa acestuia ca fiind un raport Arie/Masă specific satelitelui, atunci accelerația Poynting-Robertson are valoarea:

Tipul de satelit GPS	Raport Aria/Masă [m ² /Kg]	Accelerația Poynting-Robertson [Km/s]
Block I	0,01513	$6,930 \cdot 10^{-15}$
Block II	0,01667	$7,635 \cdot 10^{-15}$
Block IIR	0,01606	$7,356 \cdot 10^{-15}$

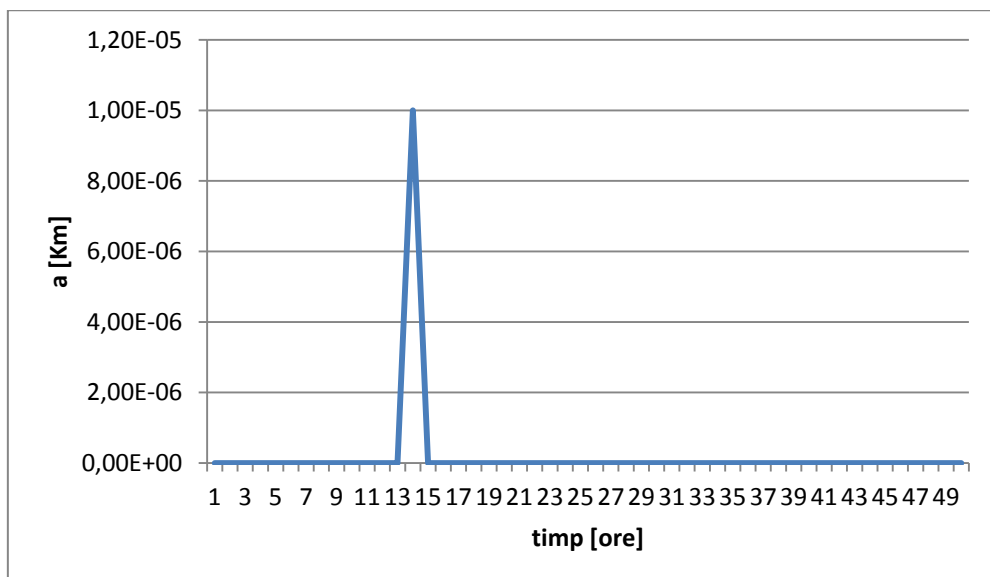


Variația componentelor accelerației datorată efectului Poynting-Robertson



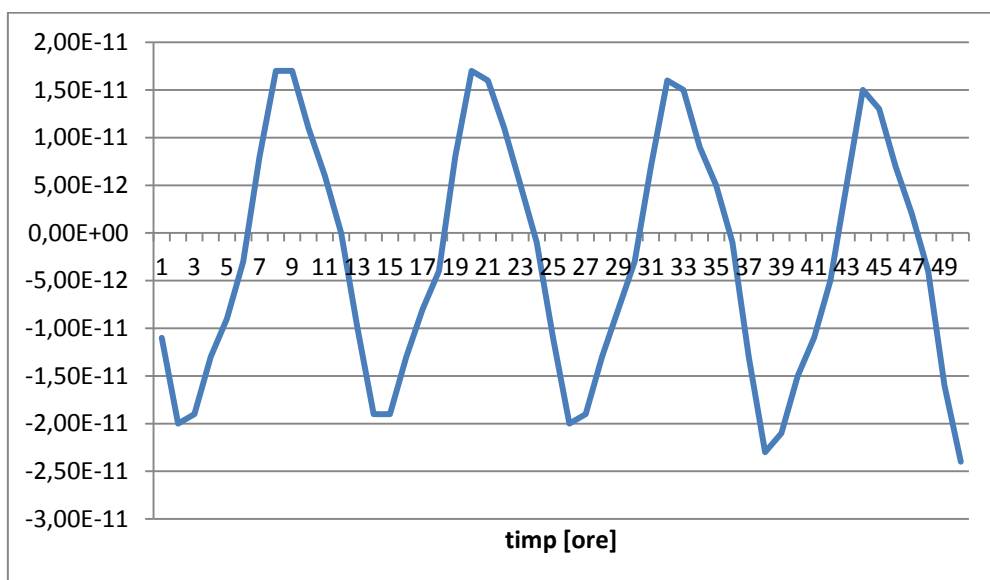
Variația accelerației totale datorată efectului Poynting-Robertson

În continuare sunt prezentate graficele de variație a elementelor orbitale (a , e , i , ω , Ω , M) precum și raza vectară și viteza în sistemul CST ale unui satelit GPS pentru o perioadă de 50 ore.



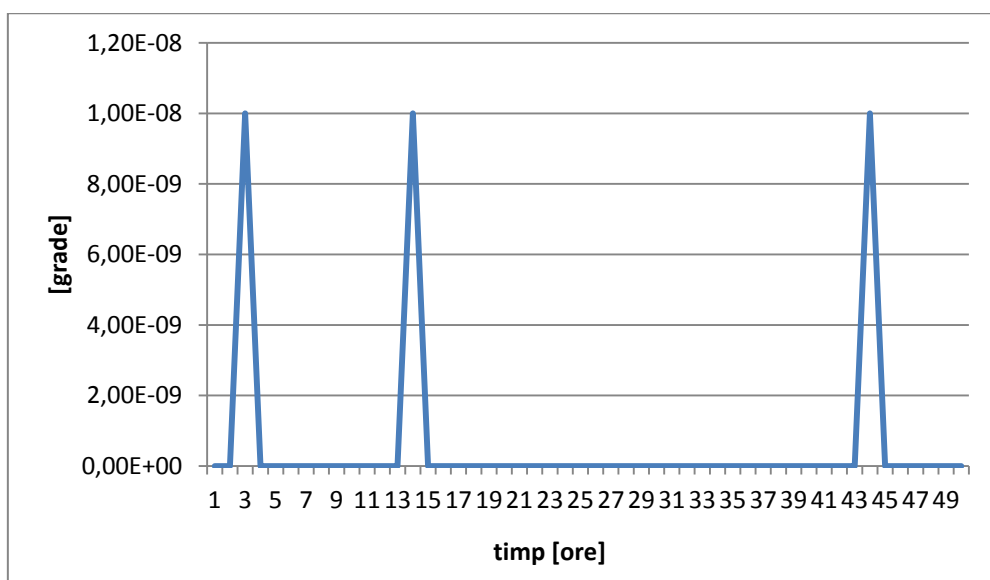
Variația semiaxe mari

Semiaxa mare suferă perturbații lung periodice cu amplitudinea maximă de 1 cm.



Variația excentricității

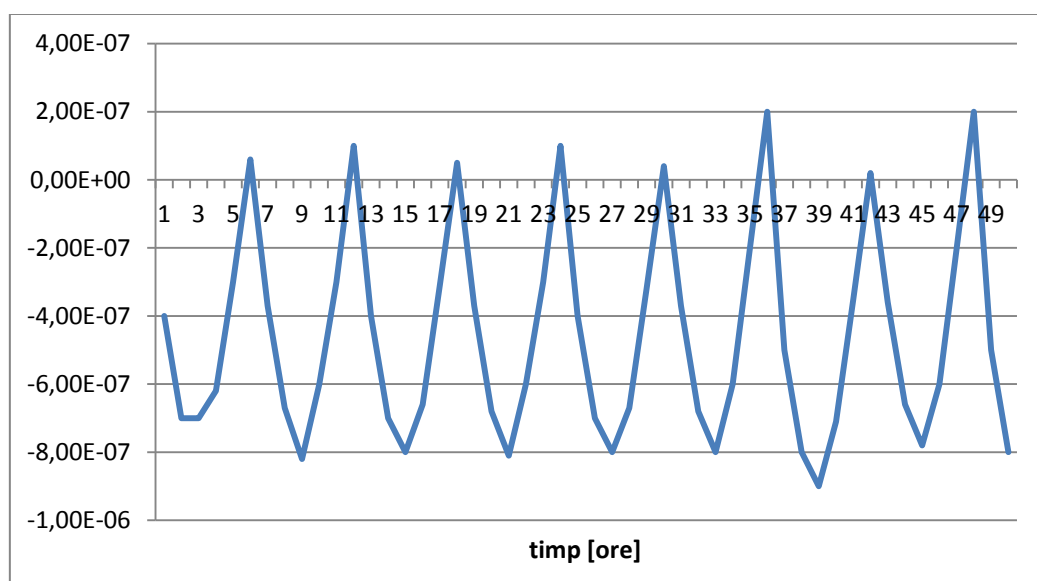
Excentricitatea prezintă a perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioada egală cu perioada orbitală având ordinul de mărime $1,5 \cdot 10^{-11}$.



Variația înclinării pentru 50 ore

Înclinarea este foarte stabilă, aceasta prezentând perturbații scurt periodice de perioadă 4 ore și ordinul de mărime de $1 \cdot 10^{-8}$ grade.

Celelalte elemente orbitale suferă perturbații scurt periodice de perioadă 6 ore și de amplitudine $8 \cdot 10^{-7}$ grade.



Variația anomaliei medii pentru 50 ore

CAPITOLUL V. ANALIZA CALITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELIȚILOR NAVSTAR/GPS

Înainte de matematicianul francez Henri Poincare, studiile sistemelor dinamice se concentrău pe găsirea soluțiilor în sensul explicitării funcțiilor care rezolvau ecuațiile de mișcare. Prin contribuția adusă de acesta la sfârșitul secolului al XIX-lea, teoria sistemelor dinamice a cunoscut o evoluție semnificativă. Soluția introdusă de Poincare consta în observarea geometria soluțiilor fără a explicita formulele. Astfel, fără a se ști formula exactă a soluției, se pot găsi proprietățile calitative ale acesteia. Această nouă metodă a contribuit la rezolvarea multor probleme care implicau ecuațiile diferențiale.

Analiza calitativă sau geometrică reprezintă o analiză a modului de evoluție a soluțiilor unui sistem dinamic. Această analiză se realizează în spațiul fazelor, care reprezintă spațiul stărilor, adică spațiul în care sunt reprezentate grafic toate mărimile care descriu starea sistemului. În spațiul fazelor, starea unui sistem dinamic la un moment dat se descrie grafic printr-un punct, definit de un set de variabile de fază, adică un set minim de variabile care descriu complet starea sistemului. Schimbarea stării sistemului în funcție de timp este o traiectorie în spațiul fazelor. Colecția tuturor traiectoriilor posibile (locale sau globale) ale unui sistem dinamic se numește portret de fază (local sau global).

Fie un sistem liniar de forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases} \quad (5.1)$$

Dacă funcțiile f și g nu depind explicit de timp, sistemul se numește autonom.

Pentru orice punct (x, y) din spațiul fazelor al unui sistem autonom se definește un vector $\vec{V} = (f(x, y), g(x, y))$ tangent la traiectoriile sistemului. Totalitatea acestor vectori se numește câmp de vectori și va defini traiectoria sistemului, deci, portretul de fază.

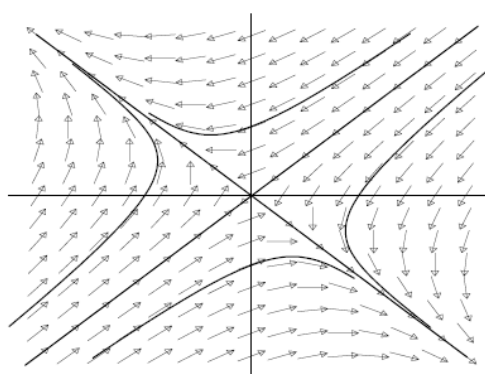
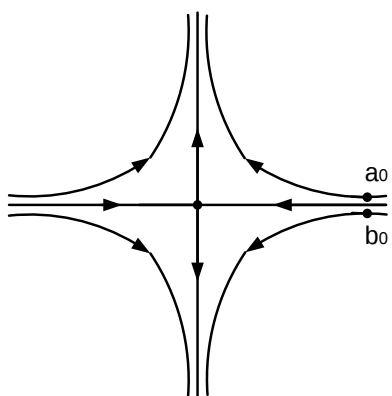
Un punct (x_e, y_e) care satisface relația:

$$f(x_e, y_e) = g(x_e, y_e) = 0 \quad (5.2)$$

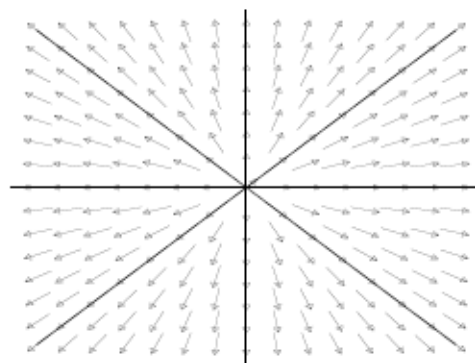
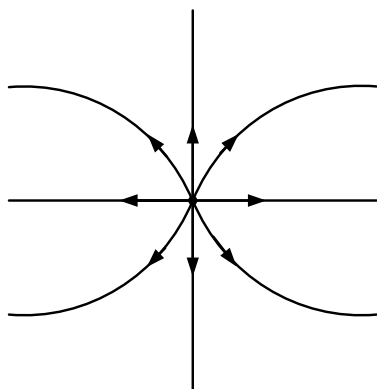
se numește punct de echilibru al sistemului.

Există mai multe tipuri de echilibru, după cum urmează:

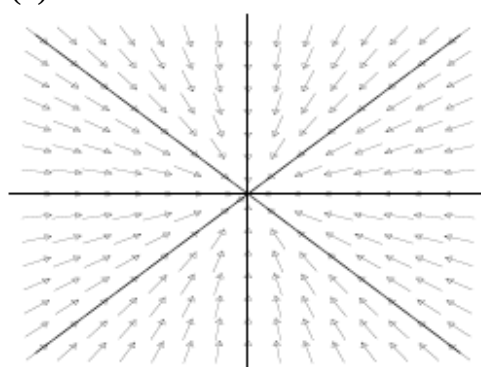
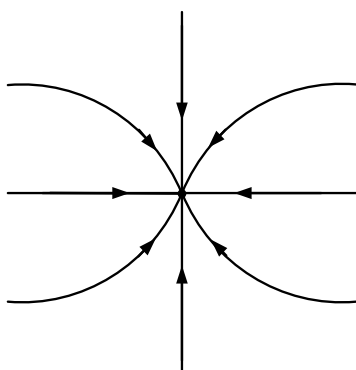
- punct șa (figura 5.1 a). Două orbite tind spre echilibru, două îl părăsesc, iar celelalte trec pe lângă el. Orbitale care trec pe lângă un punct șa se mențin multă vreme în vecinătatea lui după care se îndepărtează mult una de cealaltă. Pentru două puncte a_0 și b_0 situate pe orbite de-o parte și de alta a curbei care duce direct spre punctul șa, această curbă se numește separatoare deoarece separă orbitele cu viitor diferit;
- nod instabil: izvor (figura 5.1b). Toate orbitele din vecinătatea sa îl părăsesc;
- nod stabil: scurgere (figura 5.1c). Toate orbitele din vecinătatea sa tind către echilibru;
- centru (figura 5.1d). În jurul acestui punct există orbite închise sau periodice;
- focar, care poate fi stabil:
 - în scurgere (figura 5.1e), atunci când orbitele tind către punctul de echilibru
 - instabil: izvor (figura 5.1f) atunci când orbitele se îndepărtează de punctul de echilibru pe traiectorii în spirală.



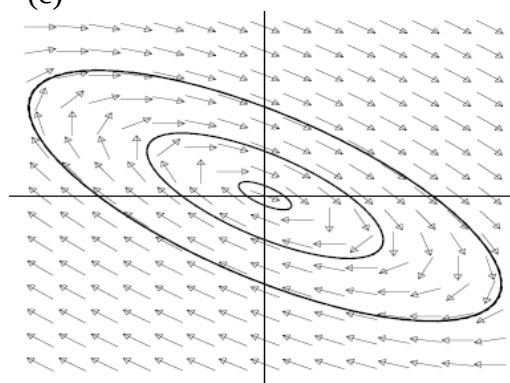
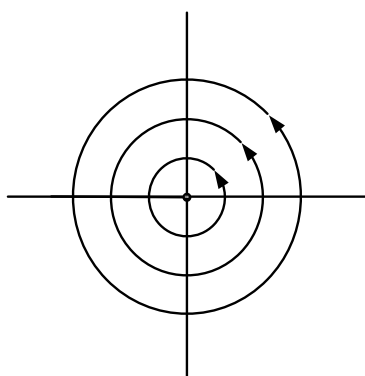
(a)



(b)



(c)



(d)

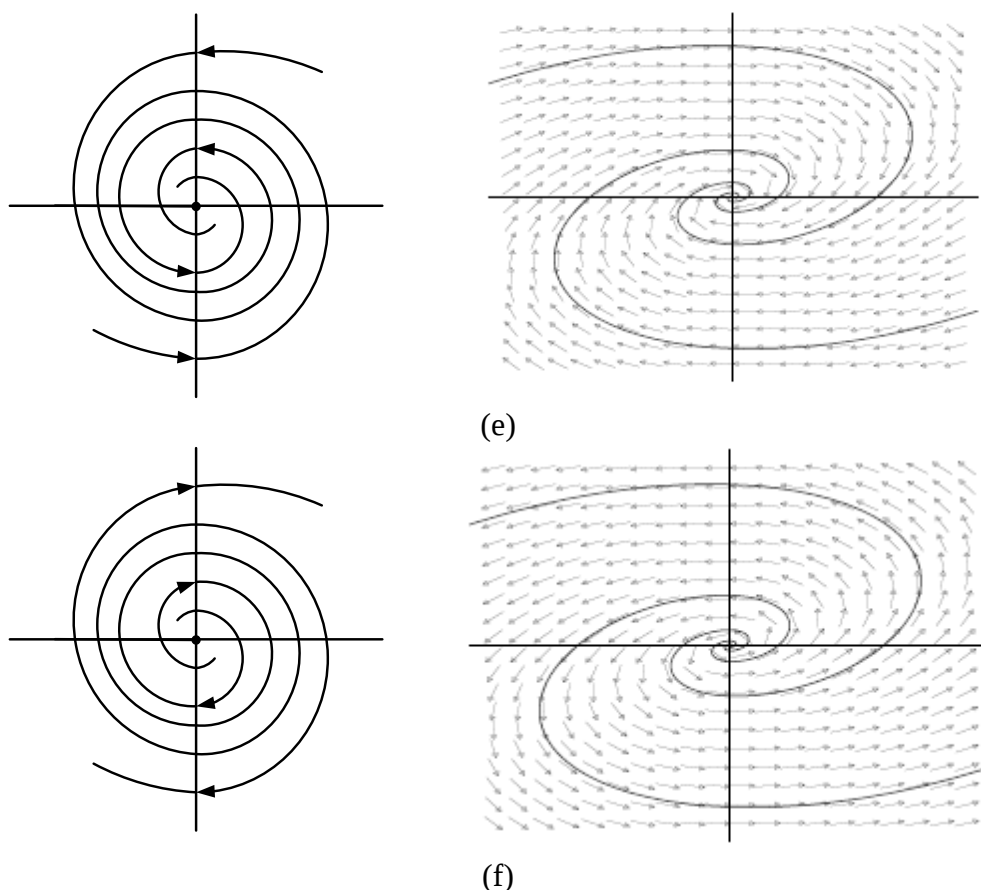


Figura 5.1 Tipuri de echilibru

Un punct de echilibru se numește *stabil* dacă există o vecinătate a sa astfel încât toate traiectoriile care pornesc din această vecinătate vor converge către echilibru.

Un punct de echilibru se numește *instabil* dacă există cel puțin o traiectorie în orice vecinătate a sa care se îndepărtează de echilibru.

Se poate defini stabilitatea în sensul Liapunov prin condiția ca toate soluțiile care se învecinează la un moment dat cu o orbită stabilă să rămână în apropierea ei pentru totdeauna.

Soluțiile care tind spre un punct de echilibru îl ating după un timp infinit de lung. În cazul real, forțele de frecare vor opri întotdeauna mișcarea după un interval de timp finit.

Se poate rămâne într-o stare de echilibru în permanență sau se poate tinde asimptotic spre aceasta.

O orbită închisă într-un portret de fază reprezintă un ciclu limită. Atunci când orbitele din vecinătatea sa se apropie de limită se numește stabil, iar când se îndepărtează se numește instabil. În cazul în care o orbită unește două puncte de echilibru distincte aceasta se numește heteroclină, iar când revine în același punct de echilibru se numește homoclină.

5.1 ANALIZA CALITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELITULUI GPS SUB INFLUENȚA ARMONICEI A DOUA ZONALE

5.1.1 Ecuațiile mișcării pentru analiza calitativă

Potențialul gravitațional pentru care se ia în considerare doar potențialul perturbator datorat armonicei a doua zonale are forma:

$$V(r) = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \left(\frac{a_{ec}}{r} \right)^2 J_2 P_2(\sin \varphi) \quad (5.3)$$

Se notează pentru ușurința calculului:

$$\mu = A \quad \text{și} \quad -\mu a_{ec}^2 J_2 P_2(\sin \varphi) = B. \quad (5.4)$$

În cazul în care potențialul gravitațional este dat de relația:

$$V(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^3} \quad (5.5)$$

problema celor două corpuri poartă numele de problema Schwarzschild.

Pentru descrierea mișcării celor două corpuri satelit – corp central (particulă - centru) care se desfășoară într-un plan, se aleg coordonatele configurație – impuls.

$$\text{Poziția satelitului va fi definită de vectorul } q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (5.6)$$

$$\text{iar viteza va fi definită de vectorul impuls } p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p = \dot{q} \quad (5.7)$$

Vectorul configurație (poziție) nu este definit în origine deoarece acest punct este asociat unei singularități a sistemului (coliziunea particulă – centru).

Potențialul gravitațional va avea următoarea formă:

$$V(q) = \frac{A}{\|q\|} + \frac{B}{\|q\|^3} \quad (5.8)$$

cu $\| \cdot \|$ norma euclidiană.

Ecuatiile hamiltoniene în acest caz au forma:

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \quad (5.9)$$

$$\text{iar hamiltonianul este: } H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{A}{\|q\|} - \frac{B}{\|q\|^3}. \quad (5.10)$$

Făcându-se notația $\frac{\|p\|^2}{2} = T(p)$ (energia cinetică), rezultă:

$$H(q, p) = T(p) - V(q) = \frac{h}{2} \quad (5.11)$$

ceea ce reprezintă integrala energiei, iar h este constanta energiei.

O integrală primă este o funcție a cărei valoare pentru o soluție dată se păstrează constantă.

Relația 5.11 are semnificația că energia sistemului se conservă.

Integrala momentului cinetic, sau a ariilor este o altă integrală primă, dată de relația:

$$L(q, p) = q \times p = C = q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1 \quad (5.12)$$

unde C este constanta momentului cinetic.

Ecuatiile explicite ale mișcării sunt:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= \nabla V(q) = -\left(\frac{A}{\|q\|^3} + \frac{B}{\|q\|^5} \right) \cdot q \end{aligned} \quad (5.13)$$

cu integrala energiei dată de relația:

$$\|p\|^2 - 2\frac{A}{\|q\|} - 2\frac{B}{\|q\|^3} = h \quad (5.14)$$

Soluțiile problemei celor două corpuri sunt traiectorii ale particulei pe conice în jurul corpului central care ocupă unul din focare. Aceste conice sunt ne-degenerate pentru $C \neq 0$ (mișcare curbilinie), iar în cazul $C = 0$ mișcarea este rectilie și pot avea loc coliziuni particulă – centru.

Potențialul gravitațional $V(q)$ are o singularitate izolată în origine $q(0,0)$, care corespunde coliziunii particulă – centru (Saari, 1974). În acest caz, forța devine infinită iar ecuațiile mișcării își pierd sensul. Spațiul fazelor din vecinătatea singularității este puternic deformat. Pentru studiul acestor singularități se utilizează regularizări.

5.1.2 TRANSFORMĂRILE McGEHEE

Pentru eliminarea singularităților și regularizarea ecuațiilor de mișcare se utilizează transformările McGehee de speța a doua. Pentru aceasta se fac următoarele transformări:

$$\begin{aligned} r &= \|q\| \\ \theta &= \arctg\left(\frac{q_2}{q_1}\right) \\ u = \dot{r} &= \frac{q_1 \cdot p_1 + q_2 \cdot p_2}{\|q\|} \\ v = r\dot{\theta} &= \frac{q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1}{\|q\|} \end{aligned} \quad (5.15)$$

unde (r, θ) - sunt coordonatele polare standard,
 (u, v) - sunt componentele polare ale vitezei.
 Ecuațiile mișcării devin:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u & \dot{\theta} &= \frac{v}{r} \\ \dot{u} &= \frac{v^2}{r} - \frac{A}{r^2} - \frac{B}{r^4} \\ \dot{v} &= -u \frac{v}{r}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Integralele prime au forma:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2\frac{A}{r} - 2\frac{B}{r^3} &= h \\ r \cdot v &= C. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Se observă că în vecinătatea coliziunii ($r \rightarrow 0$) viteza (v) tinde la infinit. Următorul pas este re-scalarea componentelor vitezei prin intermediul formulelor:

$$x = r^{\frac{3}{2}}u \quad y = r^{\frac{3}{2}}v \quad (5.18)$$

și re-scalarea timpului cu formula:

$$dt = r^{\frac{5}{2}}ds \quad (5.19)$$

Rezultă noile ecuații de mișcare:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{ds} = rx \\ \theta' &= \frac{d\theta}{ds} = y \\ x' &= \frac{dx}{ds} = \frac{3}{2}x^2 + y^2 - Ar^2 - 3B \\ y' &= \frac{dy}{ds} = \frac{1}{2}xy \end{aligned} \quad (5.20)$$

unde s-au păstrat vechile notații pentru noile funcții de variabilă temporală s .

Integralele prime devin în acest caz:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= hr^3 + 2Ar^2 + 2B \\ y^2 &= C^2 \cdot r\end{aligned}\tag{5.21}$$

În acest moment, atât ecuațiile de mișcare cât și integralele prime sunt bine definite pentru limita $r \rightarrow 0$. Deci spațiul fazelor poate fi extins analitic să conțină și varietatea $\{(r, \theta, x, y) | r = 0\}$.

5.1.3 VARIETATEA COLIZIUNII

Se definește varietatea $M_0 = \{(r, \theta, x, y) | r = 0, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathfrak{R}^2\}$ unde S^1 este intervalul $[0, 2\pi]$ cu capetele confundate și varietatea de energie constantă $M_h = \{(r, \theta, x, y) | x^2 + y^2 = h \cdot r^3 + 2 \cdot A \cdot r^2 + 2 \cdot B, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathfrak{R}^2\}$. Varietatea coliziunii va fi intersecția celor două varietăți definite mai sus, adică:

$$M_{col} = \{(r, \theta, x, y) | r = 0, x^2 + y^2 = 2B, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathfrak{R}^2\} \tag{5.22}$$

Pentru valorile pozitive ale lui B , M_{col} este un cilindru în spațiul tridimensional al coordonatelor $(\theta, x, y) \in S^1 \times \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}$. Însă S^1 este un cerc, deci rezultă că cilindrul M_{col} poate fi înlocuit cu un tor în spațiul fazelor cvadridimensional al coordonatelor (r, θ, x, y) .

Astfel, cu ajutorul transformărilor McGehee s-a ajuns la situația să explodeze singularitatea coliziunii și aceasta a fost înlocuită cu o varietate limită M_{col} , alipită spațiului fazelor. Transformările McGehee acționează ca o lupă cu o putere de mărire infinită asupra singularității coliziunii, iar M_{col} nu este altceva decât o imagine mărită a unei singularități. Cum orice soluție care pornește pe M_{col} rămâne în întregime pe M_{col} , rezultă faptul că aceasta varietate este invariantă la curent.

Varietatea coliziunii nu are semnificație fizică, dar furnizează informații importante asupra traiectoriilor care se apropie mult de coliziune, lucru datorat unei proprietăți importante și anume continuitatea în raport cu condițiile inițiale. Aceasta semnifică faptul că dacă două soluții au condiții inițiale apropiate se vor menține una în vecinătatea celeilalte un interval de timp cu atât mai lung cu cât condițiile inițiale sunt mai apropiate.

O altă proprietate a varietății coliziunii spune că aceasta conține numai puncte de echilibru pentru curentul cvadridimensional al variabilelor McGehee (r, θ, x, y) .

Din integrala momentului cinetic se observă că orice soluție a ecuației de mișcare are nevoie de un timp fictiv s infinit de lung pentru a ajunge pe M_{col} .

Ecuațiile de mișcare pe M_{col} se obțin pentru $r = 0$:

$$\begin{aligned}\theta' &= y \\ x' &= -\frac{y^2}{2} \\ y' &= \frac{1}{2}xy\end{aligned}\tag{5.23}$$

care reprezintă de altfel ecuațiile câmpului de vectori pe M_{col} . Aceste ecuații admit punctele de echilibru $(\theta, x, y) = (\theta_0, \pm\sqrt{2B}, 0)$, cu $\theta_0 \in S^1$ arbitrar. Rezultă că există două cercuri de echilibre degenerate pe torul M_{col} : cercul superior (CS) pentru $(\theta = \theta_0 \in S^1, x = +\sqrt{2B}, y = 0)$ și cercul inferior (CI) pentru $(\theta = \theta_0 \in S^1, x = -\sqrt{2B}, y = 0)$.

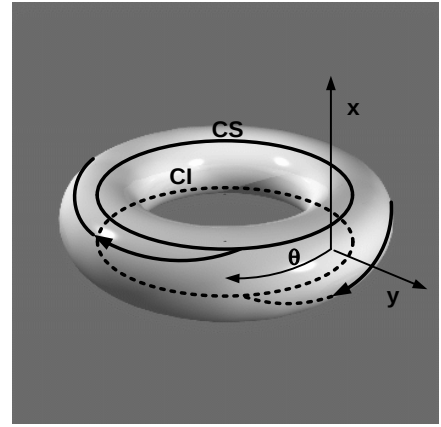
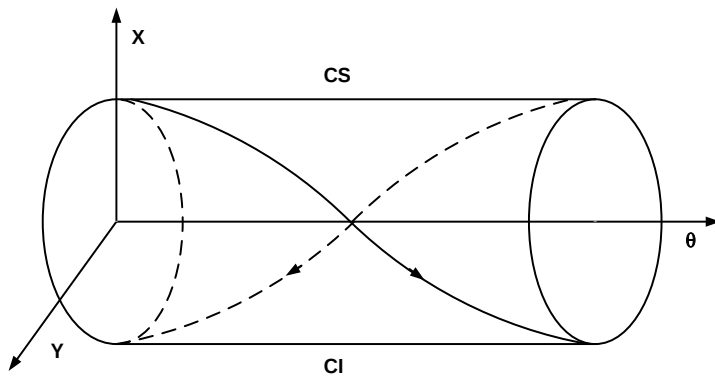


Figura 5.2 Varietatea coliziunii

Deoarece $x' < 0, (\forall)y \neq 0$, toate celelalte orbite ale curentului pe M_{col} sunt heterocline și se deplasează de la CS spre CI. Orice orbită heteroclină care pleacă asimptotic dintr-un punct de pe CS ajunge asimptotic pe CI numai după ce a efectuat un tur complet al torului M_{col} .

O reprezentare mai sugestivă se poate face utilizând o variabilă unghiulară α unde:

$$x = \sqrt{2B} \sin \alpha \quad \text{și} \quad y = -\sqrt{2B} \cos \alpha \quad (5.24)$$

$$\text{De aici rezultă că} \quad \theta' = -\sqrt{2B} \cos \alpha \quad \text{și} \quad \alpha' = -\sqrt{\frac{B}{2}} \cos \alpha \quad (5.25)$$

$$\text{adică } \frac{d\alpha}{d\theta} = \frac{1}{2}.$$

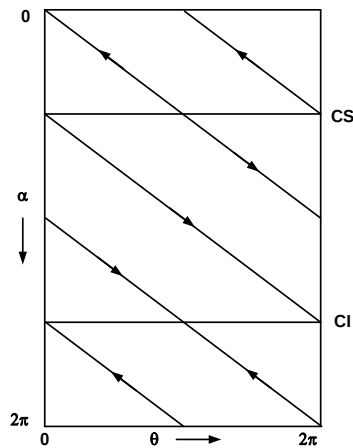


Figura 5.3 Fluxul pe varietatea coliziunii

Din integrala energiei se observă că pot avea loc coliziuni și pentru $C \neq 0$, nu numai pentru $C = 0$. În cazul în care $B < 0$ nu există coliziune, M_{col} este vidă, iar în cazul în care $B = 0$, M_{col} se reduce la un singur cerc de echilibru degenerat (CS și CI coincid).

Varietatea coliziunii M_{col} nu depinde de constanta energiei h , deci pentru orice nivel de energie coliziunile sau ejecțiile sunt posibile.

Ecuatiile mișcării rămân neschimbate dacă se efectuează următoarele transformări:

$$\begin{aligned} (r, \theta, u, v, t) &\rightarrow (r, \theta, -u, -v, -t) \\ (r, \theta, x, y, t) &\rightarrow (r, \theta, -x, -y, -t) \\ (r, \theta, x, y, s) &\rightarrow (r, \theta, -x, -y, -s) \end{aligned} \quad (5.26)$$

Deci curentul este reversibil, adică pentru orice soluție există o altă soluție cu aceleași coordonate, dar cu viteze inversate, într-un timp care se derulează invers.

Din ecuațiile de mișcare rezultă că $x < 0$ corespunde coliziunii ($r \rightarrow 0$ în viitor), iar $x > 0$ corespunde eiecției ($r \rightarrow 0$ în trecut).

5.1.4 PORTRETUL DE FAZĂ

Deoarece variabila θ nu apare explicit în ecuațiile de mișcare sau în integralele prime se poate reduce spațiul cvadridimensional (r, θ, x, y) la cel tridimensional (r, x, y) prin factorizarea curentului prin S^1 . Orice soluție în spațiul (r, x, y) trebuie privită ca o varietate de soluții în spațiul fazelor cvadridimensional. Utilizând integrala primă a momentului cinetic, reducem spațiul fazelor la două dimensiuni (r, x) . Câmpul de vectori devine:

$$\begin{aligned} r' &= rx \\ x' &= \frac{3}{2}hr^3 + 2Ar^2 - \frac{1}{2}C^2r \end{aligned} \quad (5.27)$$

unde integrala energiei se utilizează pentru eliminarea lui x din a doua ecuație:

$$x^2 = hr^3 + 2Ar^2 - C^2r + 2B \quad (5.28)$$

Torul M_{col} s-a redus la cercul $\{(r, x, y) | r = 0; x^2 + y^2 = 2B\}$ în spațiul tridimensional, iar în spațiul bidimensional s-a redus la două puncte $M(r = 0, x = \sqrt{2B})$ și $N(r = 0, x = -\sqrt{2B})$

Pentru întocmirea portretelor de fază ale mișcării satelitului GPS în jurul corpului central, în cazul problemei Schwarzschild, se va analiza graficul funcției $x(r) = \pm\sqrt{f(r)}$ unde $f(r) = hr^3 + 2Ar^2 - C^2r + 2B$. Soluțiile ecuației $f(r) = 0$ se notează cu r_1, r_2, r_3 ($r_1 \leq r_2 \leq r_3$ dacă sunt reale), iar soluțiile ecuației $\frac{df(r)}{dr} = 0$ se notează cu r'_1, r'_2 ($r'_1 \leq r'_2$ dacă sunt reale).

Din ecuațiile de mișcare se poate scrie în coordonate polare $r^2 \cdot \theta' = C$ unde θ variază monoton pentru $C \neq 0$ sau rămâne constant pentru $C = 0$ de-a lungul mișcării. De asemenea, din prima ecuație a mișcării rezultă că r variază monoton în fiecare din semiplanurile $x > 0$ (unde crește) sau $x < 0$ (unde descrește). În termenii mișcării fizice aceasta înseamnă că un arc de curbă în spațiul fazelor reprezintă o spirală pentru $C \neq 0$ sau o mișcare radială pentru $C = 0$, care se desfășoară spre exterior în cazul în care $x > 0$ sau spre interior pentru $x < 0$. O curbă închisă din spațiul fazelor reprezintă o orbită periodică sau cvasi-periodică. Un punct de echilibru din spațiul fazelor, cu excepția M și N (orbite degenerate care rămân în coliziune), reprezintă mișcare circulară ($C \neq 0$) sau repaus ($C = 0$).

În ceea ce privește coliziunea sau eiecția pentru $C \neq 0$ se observă că dacă $r \rightarrow 0$ atunci $\theta' \rightarrow \infty$, adică particula execută o mișcare în spirală de un număr infinit de ori în jurul centrului, până la coliziune sau după eiecție, ceea ce reprezintă efectul găurii negre (Diacu et al., 1995).

În continuare, considerând energia ca parametru, se vor interpreta curbele din spațiul fazelor ca orbite fizice. Energia critică are valoarea $h_c = -\frac{4A^2}{3C^2}$. Pe lângă energia sistemului se iau în discuție valorile coeficienților din ecuațiile de mișcare și ale soluțiilor ecuațiilor $f(r) = 0$ și $\frac{df(r)}{dr} = 0$.

ENERGIA SISTEMULUI NEGATIVĂ ($h < 0$), $A > 0$, $B > 0$

1. Energia negativă ($h < 0$); $C = 0$.

Orbite heterocline (0), care fizic reprezintă mișcare rectilinie care începe și se termină în coliziune.

2. Energia mai mică sau egală decât energia critică ($h \leq h_c$); $C \neq 0$ – suficient de mic.

Traectorii heterocline (1), care reprezintă mișcare în spirală de tipul eiecție sau coliziune.

3. Energia mai mică sau egală decât energia critică ($h \leq h_c$); $C \neq 0$.

Traectorii heterocline (4), care reprezintă mișcare în spirală de tipul eiecție sau coliziune.

4. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică, ($h_c < h < 0$); $C \neq 0$;

$$r_1, r_2 \in C, \quad r_3 > 0.$$

Traectorie heteroclină (1), care reprezintă mișcare în spirală de tipul eiecție sau coliziune.

5. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică ($h_c < h < 0$); $C \neq 0$;

$$r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_1 < r_2 = r_3 = r_2'.$$

Traectoriile constau în curbele (4) și echilibrul stabil (SE), cel din urmă însemnând mișcare

circulară la distanța $r_{SE} = \frac{-2A - \sqrt{4A^2 + 3hC^2}}{3h}$ de centru.

6. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică ($h_c < h < 0$); $C \neq 0$;

$$r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_1 < r_2 < r_3.$$

Traectoriile sunt curbele (4), adică mișcare în spirală de tipul eiecție sau coliziune și (3), care reprezintă mișcare periodică (orbită de forma unei rozete închise) sau cvasi-periodică (traectorii deschise care umplu dens o coroană circulară). Configurația acestor orbite este prezentată în figura 5.5 și a fost obținută prin simulare numerică cu ajutorul softului Mathematica.

7. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică ($h_c < h < 0$); $C \neq 0$;

$$r_1, r_2, r_3 > 0, \quad r_1 = r_2 = r_1' < r_3.$$

Traectoriile sunt curbele heterocline (2) și (2'), care reprezintă mișcare în spirală care pleacă din coliziune și tinde asimptotic spre mișcare circulară instabilă, echilibrul instabil sau punctul

și (UE), care reprezintă mișcare circulară la distanța $r_{UE} = \frac{-2A + \sqrt{4A^2 + 3hC^2}}{3h}$ de centru și

orbita homoclină (H), care semnifică mișcare în spirală care începe asimptotic de la un cerc instabil și revine asimptotic la acesta.

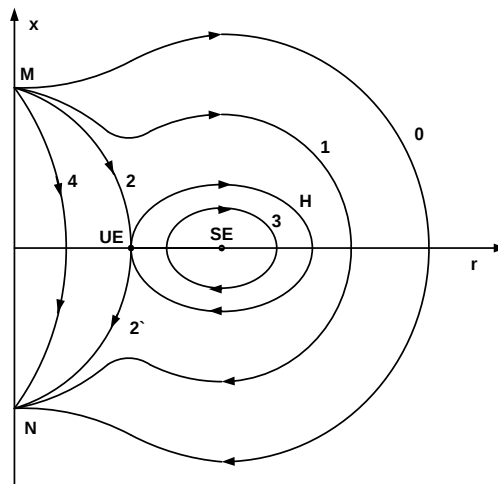


Figura 5.4 Portretul de fază în cazul energiei negative

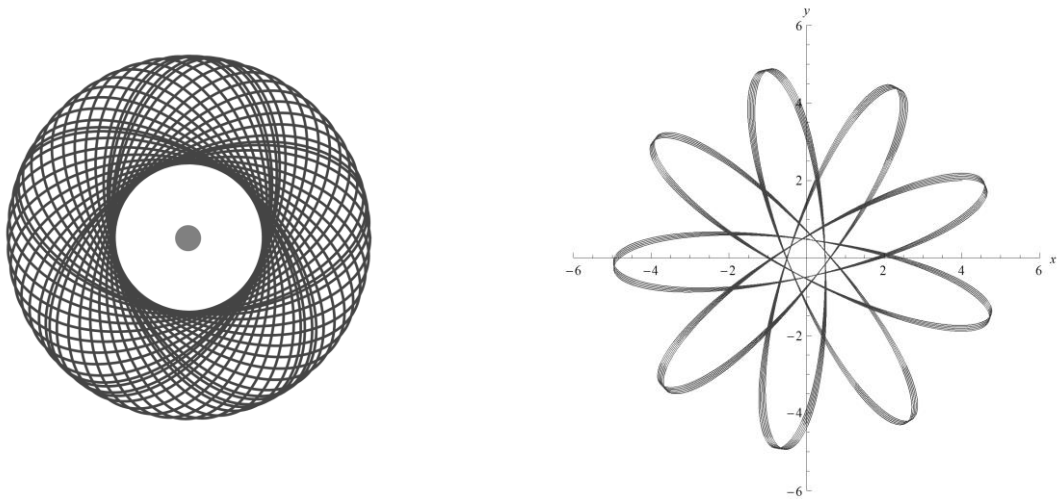


Figura 5.5 Exemplu de orbită cvasi-periodică și periodică

ENERGIA SISTEMULUI NULĂ ($h=0$), $A > 0$, $B > 0$

1. $C = 0$.

Traietoriile sunt curbele (0) și (0'), care semnifică orbite rectilinii de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune.

2. $0 < C^2 < 4\sqrt{AB}$.

Traietoriile sunt (1) și (1'), adică mișcare în spirală de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune. Viteza la infinit este nulă, ca de altfel în toate cazurile cu energie nulă.

3. $C^2 = 4\sqrt{AB}$.

Traietoriile sunt (2), (2'), care reprezintă mișcare în spirală care pleacă din coliziune și tinde către cercuri instabile sau invers, (3), (3'), care reprezintă mișcare în spirală la infinit care pleacă asimptotic de la cercuri instabile sau invers, și echilibrul instabil (UE), care reprezintă mișcare circulară instabilă la distanța $r = \sqrt{\frac{B}{A}}$ de centru.

4. $C^2 > 4\sqrt{AB}$.

Traietoriile sunt curbele (4), care reprezintă mișcare în spirală de tipul ejecție – coliziune și curbele (5), care sunt mișcări în spirală de la infinit și care se întorc la infinit, fără coliziune.

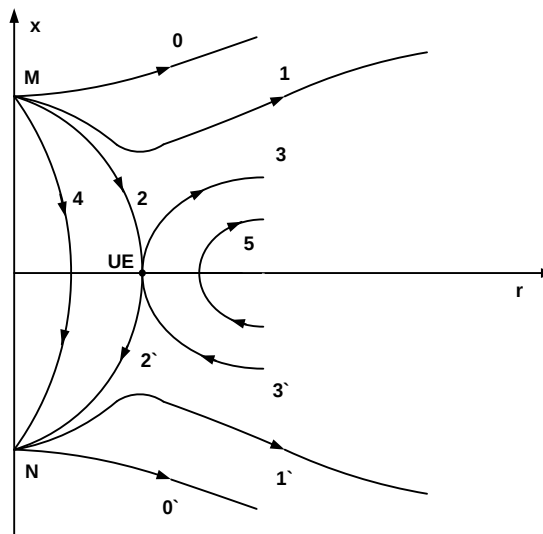


Figura 5.6 Portretul de fază în cazul energiei nule și pozitive

ENERGIA SISTEMULUI POZITIVĂ ($h > 0$), $A > 0$, $B > 0$

Portretul de fază este identic cu cel în cazul energiei nule.

1. $C = 0$.

Traietoriile sunt curbele (0) și (0'), adică orbite rectilinii de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune.

2. $C \neq 0$; $r_1, r_2 \in C$, $r_3 < 0$.

Traietoriile sunt (1) și (1'), adică mișcare în spirală de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune.

3. $C \neq 0$; $r_1 < 0 < r_2 = r_3 = r'_2$.

Traietoriile sunt (2), (2'), care reprezintă mișcare în spirală care pleacă din coliziune și tinde către cercuri instabile sau invers, (3), (3'), care reprezintă mișcare în spirală la infinit care pleacă asimptotic de la cercuri instabile sau invers, și echilibrul instabil (UE), care reprezintă

mișcare circulară instabilă la distanța $r_{UE} = \frac{-2A + \sqrt{4A^2 + 3hC^2}}{3h}$ de centru.

4. $C \neq 0$; $r_1 < 0 < r_2 < r'_2 < r_3$.

Traietoriile sunt curbele (4), care reprezintă mișcare în spirală de tipul ejecție – coliziune și curbele (5), care sunt mișcări în spirală de la infinit și care se întorc la infinit, fără coliziune.

COEFICIENȚII $A < 0$, $B > 0$

Portretul de fază este identic cu cel din cazul energiei nule sau pozitive (figura 5.6) excepția fiind dată de lipsa traiectoriilor (0) și (0'). Acest portret este valabil pentru toate valorile energiei și momentului cinetic. Discuția pentru cazul în care $C \neq 0$ s-a realizat în paragrafele anterioare. Se va analiza doar cazul pentru $C = 0$, unde apar noi interpretări.

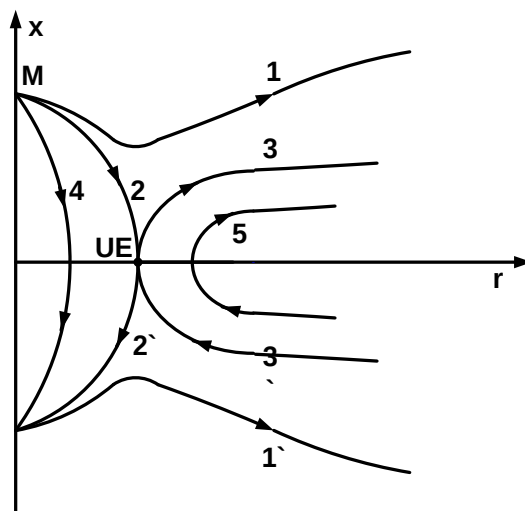


Figura 5.7 Portretul de fază în cazul 4

1. Energia sistemului mai mică sau egală cu zero ($h \leq 0$), $C = 0$.

Portretul este format numai din curbele (4) care reprezintă mișcare rectilinie care pornește din coliziune, atinge o anumită distanță maximă finită și revine în coliziune. De remarcat faptul că și în cazul energiei nule particula nu poate evada.

2. Energia sistemului pozitivă ($h > 0$), $C = 0$

- (1) și (1') – orbite rectilinii de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune
 (2) și (2') – mișcare radială care pleacă din coliziune și tinde către repaus instabil sau invers
 (3) și (3') – orbite rectilinii care pornesc de la repaus instabil și tind la infinit cu viteză asimptotică pozitivă sau invers
 (4) – mișcare rectilinie care pornește din coliziune, atinge o anumită distanță maximă finită și revine în coliziune
 (5) – mișcare radială care vine de la infinit, atinge o distanță minimă și revine la infinit.
 (UE) – repaus instabil la distanța $r_{UE} = -\frac{4A}{3h}$ de centru.

COEFICIENȚII $A > 0$, $B < 0$

Portretul este valabil pentru orice valori ale momentului cinetic.

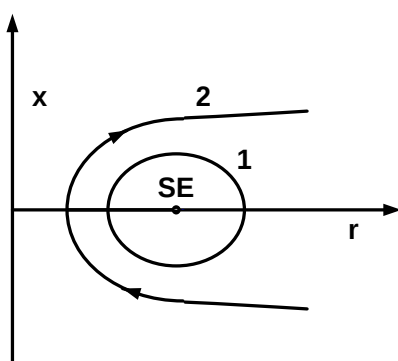


Figura 5.8 Portretul de fază în cazul 5 și cazul 6

1. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică ($h_c < h < 0$)

SE – mișcare circulară stabilă sau repaus stabil ($C = 0$), pentru $r_2 = r_3 = r'_2$, la distanța $r_{SE} = \frac{-2A - \sqrt{4A^2 + 3hC^2}}{3h}$, respectiv $r_{SE} = -\frac{4A}{3h}$, de centru.

(1) – orbite periodice sau cvasi-periodice stabile sau pentru $C = 0$ vibrații radiale între o distanță minimă și o distanță maximă finită față de centru.

Pentru toate celelalte situații mișcarea fizică nu este posibilă.

2. Energia mai mare sau egală cu zero ($h \geq 0$)

(2) – mișcare în spirală ($C \neq 0$) sau radială ($C=0$) pe orbite care vin de la infinit, ating o distanță minimă și revin la infinit.

COEFICIENȚII $A < 0$, $B < 0$

Portretul de fază este format numai din curba (2) din cazul precedent, valabil pentru toate valorile momentului cinetic. În cazul $h \leq 0$ mișcarea reală este imposibilă. Pentru $h > 0$ curbele (2) reprezintă mișcare în spirală ($C \neq 0$) sau radială ($C=0$) pe orbite care vin de la infinit, ating o distanță minimă și revin la infinit, viteza la infinit fiind tot timpul pozitivă.

5.2 ANALIZA CALITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELITULUI GPS SUB DIVERSE INFLUENȚE, NU NEAPĂRAT GRAVITAȚIONALE

În această secțiune se va analiza din punct de vedere calitativ, dinamica satelitului GPS în cazul în care mișcarea sa este perturbată de anumite influențe caracterizate de un potențial de forma:

$$V(r) = \frac{A}{r} + V_p(r) \quad (5.29)$$

în care termenul al doilea din membrul drept reprezintă potențialul perturbator, de forma:

$$V_p(r) = \frac{B}{r^2} \quad (5.30)$$

iar $A = \mu$ numai în cazul în care primul termen din (5.29) reprezintă potențialul newtonian.

În analiza care urmează, A și B pot lua orice valori pe axa reală. Aceasta sporește generalitatea analizei, extinzând-o la situații astronomice concrete în care A și B nu sunt neapărat parametri pozitivi.

Pentru aceste situații menționăm: dinamica în câmpul gravitațional clasic Manev sau de tip Manev, mișcarea în câmpul gravitațional relativist de tip Fock (în prima aproximație), în câmpul de radiație reemisă (difuz sau în infraroșu) de corpul central (în prima aproximație), în câmpul magnetic dipolar (în prima aproximație), sub influența efectului Poynting-Robertson, etc.

5.2.1 ECUAȚIILE MIȘCĂRII PENTRU ANALIZA CALITATIVĂ

Câmpul gravitațional în care potențialul este dat de relația:

$$V(r) = \frac{A}{r} + \frac{B}{r^2} \quad (5.31)$$

poartă numele de câmp de tip Manev.

Pentru descrierea mișcării alegem coordonatele configurație – impuls. Poziția satelitului va fi definită de vectorul $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$,

iar viteza va fi definită de vectorul impuls $p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2$, $p = \dot{q}$ (5.33)

Potențialul gravitațional va avea următoarea formă:

$$V(q) = \frac{A}{\|q\|} + \frac{B}{\|q\|^2} \quad (5.34)$$

Ecuatiile hamiltoniene în acest caz sunt:

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \quad (5.35)$$

iar hamiltonianul este:

$$H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - \frac{A}{\|q\|} - \frac{B}{\|q\|^2} \quad (5.36)$$

Ecuatiile explicite ale mișcării sunt:

$$\dot{q} = p \text{ și } \dot{p} = \nabla V(q) = -\left(\frac{A}{\|q\|^3} + \frac{B}{\|q\|^4} \right) \cdot q \quad (5.37)$$

cu integrala energiei dată de relația:

$$\|p\|^2 - 2\frac{A}{\|q\|} - 2\frac{B}{\|q\|^2} = h \quad (5.38)$$

Pentru eliminarea singularităților și regularizarea ecuațiilor de mișcare se utilizează transformările McGehee de speța a doua.

Ecuațiile mișcării devin:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{ds} = rx & \theta' &= \frac{d\theta}{ds} = y \\ x' &= \frac{dx}{ds} = x^2 + y^2 - Ar - 2B \\ y' &= 0 \end{aligned} \quad (5.39)$$

Integralele prime sunt în acest caz:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= hr^2 + 2Ar + 2B \\ y^2 &= C^2 \end{aligned} \quad (5.40)$$

În acest moment atât ecuațiile de mișcare, cât și integralele prime sunt bine definite pentru limita $r \rightarrow 0$. Deci spațiul fazelor poate fi extins analitic să conțină și varietatea $\{(r, \theta, x, y) | r = 0\}$.

Varietatea coliziunii va fi dată de relația:

$$M_{\text{col}} = \{(r, \theta, x, y) | r = 0, x^2 = 2B - C^2, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \quad (5.41)$$

5.2.2 PORTRETUL DE FAZĂ

Deoarece variabila θ nu apare explicit în ecuațiile de mișcare sau în integralele prime se poate reduce spațiul cvadridimensional (r, θ, x, y) la cel tridimensional (r, x, y) prin factorizarea curentului prin S^1 . Orice soluție în spațiul (r, x, y) trebuie privită ca o varietate de soluții în spațiul fazelor cvadridimensional. Utilizând integrala primă a momentului cinetic, reducem spațiul fazelor la două dimensiuni (r, x) . Câmpul de vectori devine:

$$\begin{aligned} r' &= rx \\ x' &= hr^2 + Ar \end{aligned} \quad (5.42)$$

unde integrala energiei se utilizează pentru eliminarea lui x din a doua ecuație:

$$x^2 = hr^2 + 2Ar + 2B - C^2 \quad (5.43)$$

Varietatea coliziunii constă în 2 puncte în spațiul fazelor $M(0, \sqrt{2B - C^2})$ și $N(0, -\sqrt{2B - C^2})$. În situația în care $2B = C^2$ varietatea coliziunii se reduce la un singur punct $O(0, 0)$.

Pentru întocmirea portretelor de fază al mișcării satelitului GPS în jurul corpului central se va analiza graficul funcției $x(r) = \pm \sqrt{f(r)}$ unde $f(r) = hr^2 + 2Ar + 2B - C^2$. Soluțiile ecuației $f(r) = 0$ se notează cu r_1, r_2 ($r_1 \leq r_2$) dacă sunt reale,

$$r_{1,2} = \frac{-A \pm \sqrt{A^2 - h(2B - C^2)}}{h}, \text{ iar soluția ecuației } \frac{df(r)}{dr} = 0 \text{ se notează cu } r', \text{ unde } r' = -\frac{A}{h}.$$

Sistemul are energia critică dată de relația $h_c = \frac{A^2}{2B - C^2}$.

ENERGIA SISTEMULUI NEGATIVĂ ($h < 0$)

1. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică ($h < h_c < 0$); $A > 0$; $C = 0$.

(1) – Orbite heterocline, care fizic reprezintă mișcare rectilinie care începe și se termină în coliziune

2. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică ($h < h_c < 0$); $C \neq 0$; $A > 0$; $2B - C^2 > 0$.

(2) – mișcare în spirală de tipul ejecție – coliziune

3. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică ($h < h_c < 0$); $A > 0$; $C \neq 0$; $2B - C^2 = 0$.

(3) – orbită homoclină care pleacă asimptotic de la coliziune și revine la coliziune

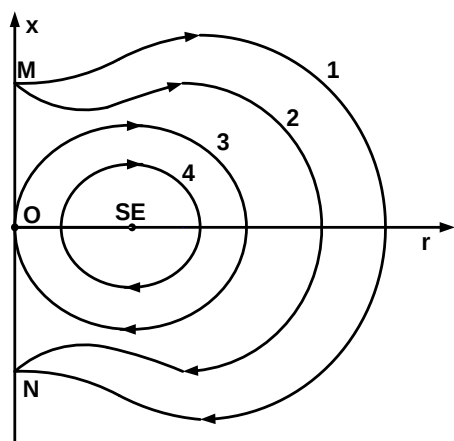
4. Energia negativă și totodată mai mare decât energia critică ($h < h_c < 0$); $A > 0$; $C \neq 0$; $2B - C^2 < 0$.

(4) – mișcare stabilă pe orbite periodice sau cvasi-periodice

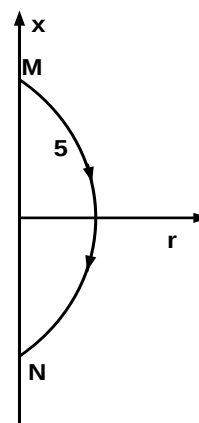
5. Energia negativă și egală cu energia critică ($h = h_c < 0$); $A > 0$; $C \neq 0$; $r_1 = r_2 = r'$

SE – punct de echilibru stabil, care reprezintă mișcare pe orbite circulare stabile la distanța

$r = -\frac{A}{h}$ de centru



(a)



(b)

Figura 5.9 Portretele de fază în cazul 1

6. Energia negativă și totodată mai mică decât energia critică ($h < h_c < 0$); $A < 0$; $C \neq 0$; $2B - C^2 > 0$.

(5) – mișcare în spirală de tipul ejecție – coliziune

În cazul în care energia sistemului este mai mare decât energia critică ($h > h_c$), mișcarea fizică nu este posibilă.

ENERGIA SISTEMULUI NULĂ SAU POZITIVĂ ȘI MAI MICĂ DECÂT ENERGIA CRITICĂ ($0 \leq h < h_c$) și $A > 0$

1. $C = 0$; $B > 0$

(1) și (1') – orbite rectilinii de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune

2. $C = 0$; $B < 0$

(5) – traiectorie rectilinie fără coliziune, care vine de la infinit și se întoarce la infinit

3. $C \neq 0$; $2B - C^2 > 0$

(2) și (2') – mișcare în spirală de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune

4. $C \neq 0$; $2B - C^2 < 0$

(4) – mișcare în spirală de la infinit și care se întoarce la infinit, fără coliziune

5. $C \neq 0; 2B - C^2 = 0$

(3) și (3') – mișcare în spirală care vine de la infinit și tinde asimptotic la coliziune sau pleacă asimptotic de la coliziune și tinde la infinit

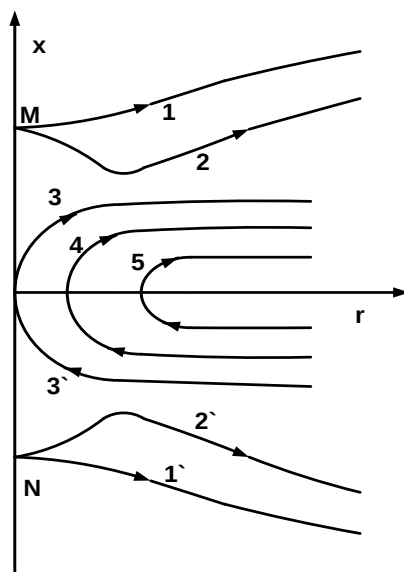


Figura 5.10 Portretul de fază în cazul 2

ENERGIA SISTEMULUI NULĂ SAU POZITIVĂ ($h \geq 0$) și $A < 0$

1. $0 \leq h < h_c; C = 0; B > 0$

(1) și (1') – orbite rectilinii de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune

2. $0 \leq h < h_c; C = 0; B < 0$

(7) și (7') - mișcare rectilinie fără coliziune, care vine de la infinit și se întoarce la infinit

3. $0 \leq h < h_c; C \neq 0; 2B - C^2 < 0$

(6) – mișcare în spirală de la infinit și care se întoarce la infinit, fără coliziune

4. $0 \leq h < h_c; C \neq 0; 2B - C^2 > 0$

(4) – mișcare în spirală de tipul ejecție sau coliziune

(6) – mișcare în spirală de la infinit și care se întoarce la infinit, fără coliziune

5. $0 \leq h = h_c; C \neq 0$

(3) și (3') – mișcare în spirală care pleacă din coliziune și tinde către orbite circulare instabile sau invers

(5), (5') – mișcare în spirală la infinit care pleacă asimptotic de la cercuri instabile sau invers

UE – punct de echilibru instabil, care reprezintă mișcare pe orbită circulară instabilă la distanța $r = -\frac{A}{h}$ de centru.

6. $0 < h_c < h; C \neq 0$

(2) și (2') – mișcare în spirală de tipul ejecție – evadare sau infinit – coliziune

7. $0 < h_c < h; C \neq 0; 2B - C^2 = 0$

(6) – mișcare în spirală de la infinit și care se întoarce la infinit, fără coliziune

O – stare de repaus în coliziune

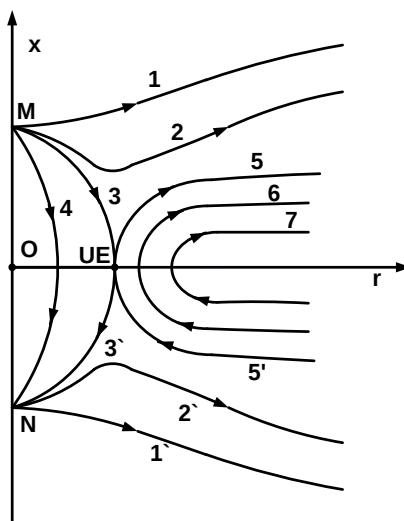


Figura 5.11 Portretul de fază în cazul 3

5.3 ANALIZA CALITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELITULUI GPS SUB INFLUENȚA ARMONICELOR ZONALE DE ORDIN SUPERIOR

5.3.1 ECUAȚIILE MIȘCĂRII PENTRU ANALIZA CALITATIVĂ

Potențialul gravitațional până la armonica a șasea zonală are forma:

$$V(r) = \frac{\mu}{r} - \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^6 \left(\frac{a_{ec}}{r} \right)^n J_n P_n(\sin \varphi) \quad (5.44)$$

Pentru ușurința calculelor se notează:

$$a_1 = \mu, \quad a_2 = 0 \quad \text{și} \quad a_k = -\mu a_{ec}^{k-1} J_{k-1} P_{k-1}(\sin \varphi) \quad \text{pentru} \quad k = 3..6 \quad (5.45)$$

rezultând noua formă a potențialului gravitațional:

$$V(r) = \sum_{n=1}^7 \frac{a_n}{r^n} \quad (5.46)$$

Pentru descrierea mișcării celor două corpuri satelit – corp central (particulă - centru) care se desfășoară într-un plan, alegem coordonatele configurație – impuls.

$$\text{Poziția satelitului va fi definită de vectorul } q = (q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad (5.47)$$

$$\text{iar viteza va fi definită de vectorul impuls } p = (p_1, p_2) \in \mathbb{R}^2, \quad p = \dot{q}. \quad (5.48)$$

Vectorul configurație (poziție) nu este definit în origine deoarece acest punct este asociat unei singularități a sistemului (coliziunea particulă – centru).

Potențialul gravitațional va avea următoarea formă:

$$V(q) = \sum_{n=1}^7 \frac{a_n}{\|q\|^n} \quad (5.49)$$

Ecuatiile hamiltoniene în acest caz sunt:

$$\dot{q} = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p} \quad ; \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q} \quad (5.50)$$

$$\text{iar hamiltonianul este: } H(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2} - \sum_{n=1}^7 \frac{a_n}{\|q\|^n} \quad (5.51)$$

Notând $\frac{\|p\|^2}{2} = T(p)$ - energia cinetică, rezultă că:

$$H(q, p) = T(p) - V(q) = \frac{h}{2}, \quad (5.52)$$

ceea ce reprezintă integrala energiei, iar h este constanta energiei. Integrala momentului cinetic este dată de formula:

$$L(q, p) = q \times p = C = q_1 \cdot p_2 - q_2 \cdot p_1 \quad (5.53)$$

unde C este constanta momentului cinetic.

Ecuatiile explicite ale mișcării sunt următoarele:

$$\begin{aligned} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= \nabla V(q) = - \sum_{n=1}^7 \left(\frac{n \cdot a_n}{\|q\|^{n+2}} \right) q. \end{aligned} \quad (5.54)$$

cu integrala energiei dată de relația:

$$\|p\|^2 - 2 \sum_{n=1}^7 \frac{a_n}{\|q\|^n} = h. \quad (5.55)$$

5.3.2 TRANSFORMĂRILE McGEHEE

Pentru eliminarea singularităților și regularizarea ecuațiilor de mișcare se utilizează transformările McGehee de speța a doua. Ecuatiile mișcării devin:

$$\begin{aligned} \dot{r} &= u \\ \dot{\theta} &= \frac{v}{r} \\ \dot{u} &= \frac{v^2}{r} - \sum_{n=1}^7 \frac{n a_n}{r^{n+1}} \\ \dot{v} &= -u \frac{v}{r} \end{aligned} \quad (5.56)$$

iar integralele prime au forma:

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 - 2 \sum_{n=1}^7 \frac{a_n}{r^n} &= h \\ r \cdot v &= C \end{aligned} \quad (5.57)$$

Se observă că în vecinătatea coliziunii ($r \rightarrow 0$) viteza tinde la infinit. Următorul pas este re-scalarea componentelor vitezei prin intermediul formulelor:

$$x = r^{\frac{7}{2}} u \quad y = r^{\frac{7}{2}} v \quad (5.58)$$

și rescalarea timpului cu formula:

$$ds = r^{-\alpha} dt, \quad \alpha \in N \quad (5.59)$$

Rezultă noile ecuații de mișcare:

$$\begin{aligned} r' &= \frac{dr}{ds} = rx \quad \theta' = \frac{d\theta}{ds} = y \\ x' &= \frac{dx}{ds} = \frac{7}{2} x^2 + y^2 - \sum_{n=1}^7 n a_n r^{7-n} \\ y' &= \frac{dy}{ds} = \frac{5}{2} xy \end{aligned} \quad (5.60)$$

unde am păstrat vechile notații pentru noile funcții de variabilă temporală s .

Integralele prime devin în acest caz:

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= hr^7 + 2 \sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n} \\ y^2 &= C^2 r^5 \end{aligned} \quad (5.61)$$

În acest moment atât ecuațiile de mișcare, cât și integralele prime sunt bine definite pentru limita $r \rightarrow 0$, deci spațiul fazelor poate fi extins analitic să conțină și varietatea $\{(r, \theta, x, y) | r = 0\}$.

5.3.3 VARIETATEA COLIZIUNII

Se definește varietatea $M_0 = \{(r, \theta, x, y) | r = 0, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathcal{R}^2\}$ unde S^1 este intervalul $[0, 2\pi]$ cu capetele confundate și varietatea de energie constantă

$$M_h = \{(r, \theta, x, y) | x^2 + y^2 = hr^7 + 2 \sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n}, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathcal{R}^2\}.$$

Varietatea coliziunii va fi intersecția celor două varietăți definite mai sus, adică:

$$M_{col} = \{(r, \theta, x, y) | r = 0, x^2 + y^2 = 2a_7, \theta \in S^1, (x, y) \in \mathcal{R}^2\} \quad (5.62)$$

Pentru valorile negative ale lui a_7 , M_{col} este vidă, mișcarea este fără coliziune, iar pentru valori pozitive ale lui a_7 , M_{col} este un cilindru bidimensional în spațiul tridimensional al coordonatelor $(\theta, x, y) \in S^1 \times \mathcal{R} \times \mathcal{R}$. Însă S^1 este un cerc, deci rezultă că cilindrul M_{col} poate fi înlocuit cu un tor în spațiul fazelor cvadridimensional al coordonatelor (r, θ, x, y) .

Din integrala momentului cinetic se observă că orice soluție a ecuației de mișcare are nevoie de un timp fictiv s infinit de lung pentru a ajunge pe M_{col} .

Ecuațiile de mișcare pe M_{col} se obțin pentru $r = 0$:

$$\theta' = y, \quad x' = -\frac{5y^2}{2}, \quad y' = \frac{5}{2}xy \quad (5.63)$$

care reprezintă de altfel ecuațiile câmpului de vectori pe M_{col} . Aceste ecuații admit punctele de echilibru $(\theta, x, y) = (\theta_0, \pm\sqrt{2a_7}, 0)$, cu $\theta_0 \in S^1$ arbitrar. Rezultă că există două cercuri de echilibre degenerate pe torul M_{col} : cercul superior pentru $(\theta = \theta_0 \in S^1, x = +\sqrt{2a_7}, y = 0)$ și cercul inferior pentru $(\theta = \theta_0 \in S^1, x = -\sqrt{2a_7}, y = 0)$.

Din expresia integralei momentului cinetic în coordonate polare se observă că în cazul în care $r \rightarrow 0$ atunci $\theta' \rightarrow \infty$. În termenii mișcării fizice, particula se deplasează pe orbite în formă de spirală în jurul centrului de un număr infinit de ori până la coliziune (sau respectiv, după ejecție). Acesta reprezintă efectul găurii negre (Diacu et al., 1995). Din expresia integralei energiei se observă că evadarea $r \rightarrow \infty$ nu este posibilă decât în cazul energiei ne-negative $h \geq 0$.

5.3.4 PORTRETUL DE FAZĂ

Deoarece variabila θ nu apare explicit în ecuațiile de mișcare sau în integralele prime se poate reduce spațiul cvadridimensional (r, θ, x, y) la cel tridimensional (r, x, y) prin factorizarea curenului prin S^1 . Orice soluție în spațiul (r, x, y) trebuie privită ca o varietate de soluții în spațiul fazelor cvadridimensional. Utilizând integrala primă a momentului cinetic, reducem spațiul fazelor la două dimensiuni (r, x) . Câmpul de vectori devine:

$$\begin{aligned} r' &= r\dot{x} \\ \dot{x} &= \frac{7}{2}hr^7 - \frac{5}{2}C^2r^5 + \sum_{n=1}^6 (7-n)a_n r^{7-n} \end{aligned} \quad (5.64)$$

unde integrala energiei se utilizează pentru eliminarea lui x din a doua ecuație:

$$x^2 = hr^7 - C^2r^5 + 2\sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n} \quad (5.65)$$

Torul M_{col} s-a redus la cercul $\{(r, x, y) | r=0; x^2 + y^2 = 2a_7\}$ în spațiul tridimensional, iar în spațiul bidimensional s-a redus la două puncte $N(r=0, x=\sqrt{2a_7})$ și $P(r=0, x=-\sqrt{2a_7})$.

Pentru întocmirea portretelor de fază ale mișcării satelitului GPS în jurul corpului central, se va analiza graficul funcției $x(r) = \pm\sqrt{f(r)}$ unde $f(r) = hr^7 - C^2r^5 + 2\sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n}$ și de asemenea se iau în discuție valorile coeficienților din ecuațiile de mișcare și ale soluțiilor ecuațiilor $f(r) = 0$ și $\frac{df(r)}{dr} = 0$.

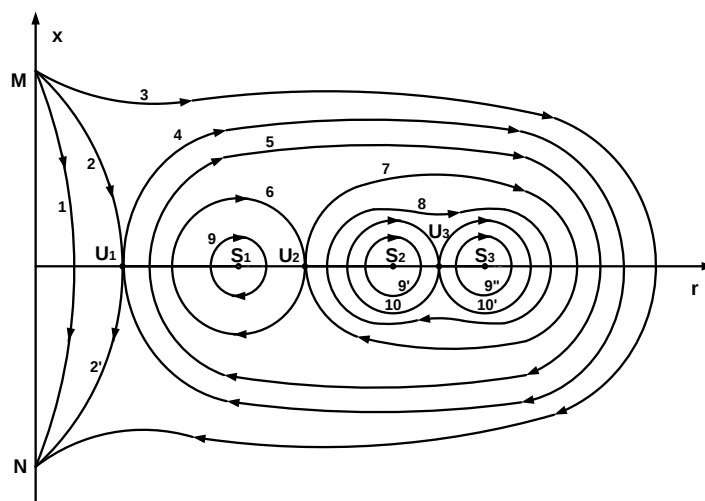
Din expresia M_{col} rezultă că pentru valorile negative ale coeficientului a_7 mulțimea este vidă, adică mișcarea se realizează fără coliziune. În cazul în care a_7 este pozitiv, atunci există coliziune. În ceea ce privește energia, atunci când aceasta este negativă evadarea este imposibilă, iar când energia este pozitivă sau nulă, atunci evadarea este posibilă.

Se va considera cazul cel mai general când derivata $f'(r)$ are 5 schimbări de semn (numărul maxim) pentru cazul energiei negative, deci rezultă conform regulii lui Descartes că pentru cazul colizional $a_7 > 0$ ecuația $f(r) = 0$ are 5 rădăcini pozitive, iar pentru cazul non-colizional $a_7 < 0$ ecuația are 4 rădăcini pozitive. Atunci când energia este pozitivă sau nulă presupunem că derivata $f'(r)$ are 4 schimbări de semn (numărul maxim), deci conform aceleiași reguli a lui Descartes rezultă că ecuația $f(r) = 0$ va avea 5 rădăcini pozitive în cazul $a_7 > 0$ și 4 rădăcini pozitive în cazul $a_7 < 0$.

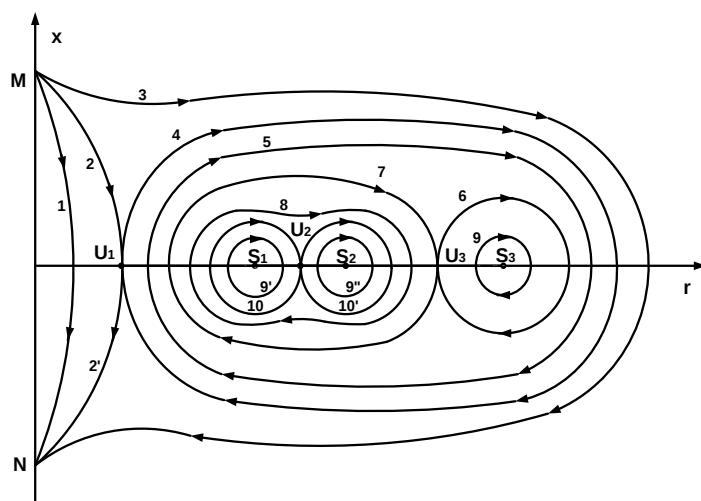
ENERGIA SISTEMULUI NEGATIVĂ

Există o valoare critică a energiei care va determina, alături de semnul coeficienților funcției $f(r)$ configurații diferite pentru portretele de fază.

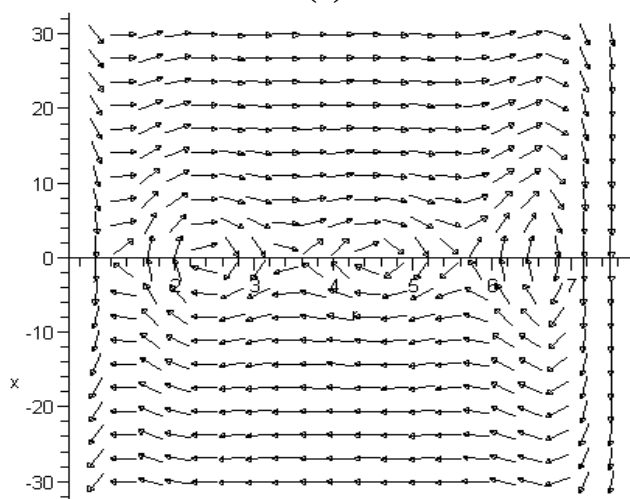
1. $a_7 > 0, h < h_c < 0$



(a)



(b)

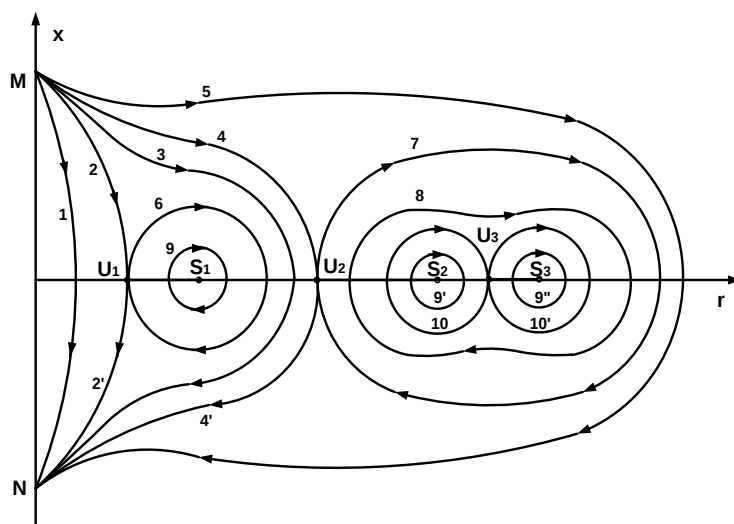


(c)

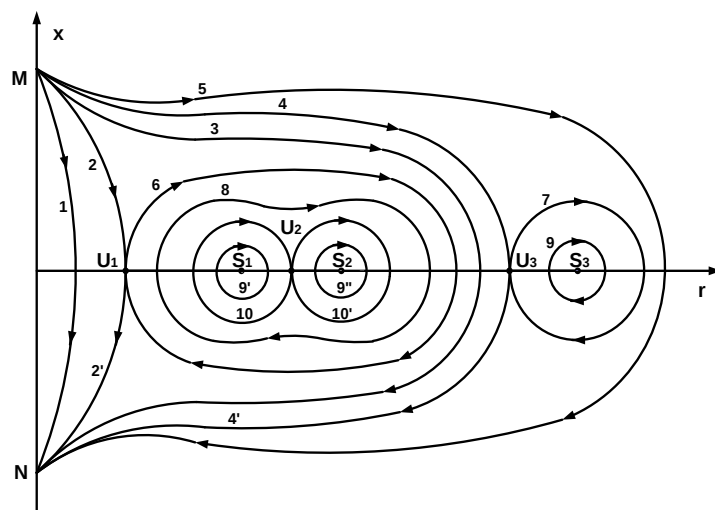
Figura 5.12 Portretul de fază explicit (a, b) și Maple (c) în cazul 1
 S – punct de echilibru stabil (centru), care reprezintă mișcare circulară stabilă;
 U – punct de echilibru instabil (izvor), care reprezintă mișcare circulară instabilă;

(1) și (3) – orbite heterocline, mișcarea în spirală de tipul ejecție - coliziune;
 (2) și (2') – reprezintă mișcarea pe orbite în formă de spirală care pornesc de la coliziune și tind asimptotic la forma circulară instabilă sau invers;
 (4), (6), (7), (10) și (10') – traiectorie homoclină, care în termeni fizici este o orbită în formă de spirală care pornește asimptotic de la un cerc instabil și tinde asimptotic la același cerc instabil;
 (5), (8) și (9), (9'), (9'') – orbite stabile periodice sau cvasiperiodice, cu excentricitate care descrește de la (5) pentru care are valori semnificative, până la (9') și (9''). Nu se poate spune nimic de excentricitatea orbitelor (9);

2. $a_7 > 0$, $h_c < h < 0$



(a)



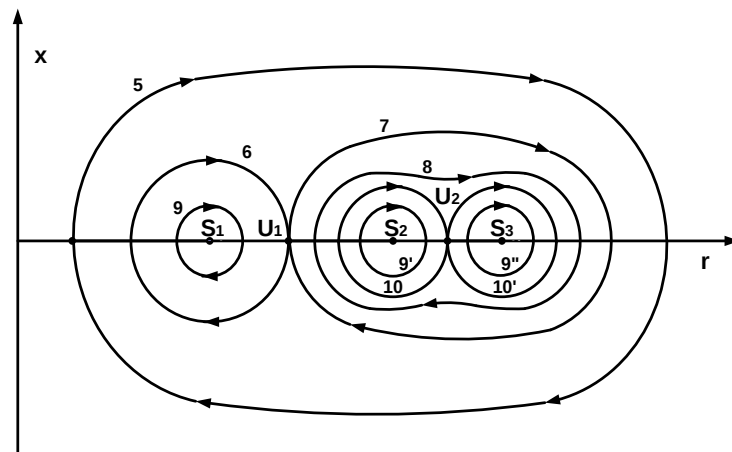
(b)

Figura 5.13 Portretul de fază în cazul 1.2

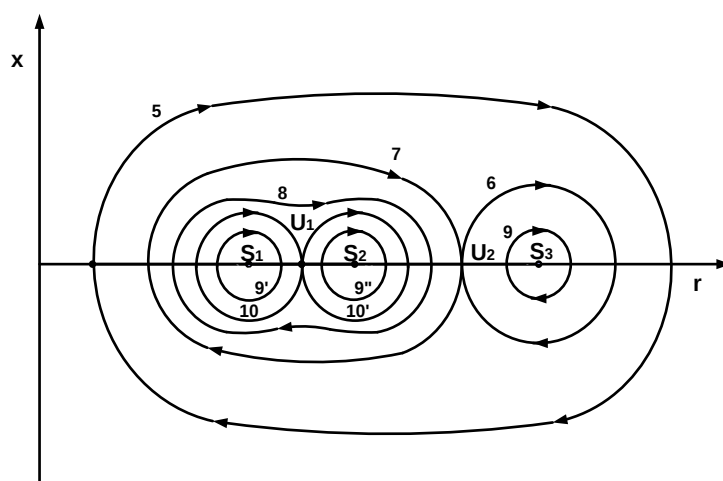
(1), (3) și (5) – orbite heterocline, care reprezintă mișcarea în spirală de tipul ejecție - coliziune;
 (2), (2'), (4) și (4') – reprezintă mișcarea pe orbite în formă de spirală care pornesc de la coliziune și tind asimptotic la forma circulară instabilă sau pornesc de la forma circulară instabilă și tind asimptotic la coliziune;

(6), (7), (10) și (10') - orbite homocline, care în termeni fizici sunt orbite în formă de spirală care pornesc asimptotic de la un cerc instabil și tind asimptotic la același cerc instabil;
 (8), (9), (9') și (9'') - orbite stabile periodice sau cvasi-periodice, cu excentricitate mare în cazul (8) și cu excentricitate mică în cazul (9') și (9'');

3. $a_7 < 0$, $h_c \neq h < 0$



(a)



(b)

Figura 5.14 Portretul de fază în cazul 1.3

Diferența față de portretul în cazul non-colizional este că avem numai 2 puncte de echilibru instabil (U_1 și U_2) și nu se mai întâlnesc traiectoriile (1), (2), (3) și (4). Celelalte orbite au semnificațiile precizate anterior.

4. $h_c = h < 0$

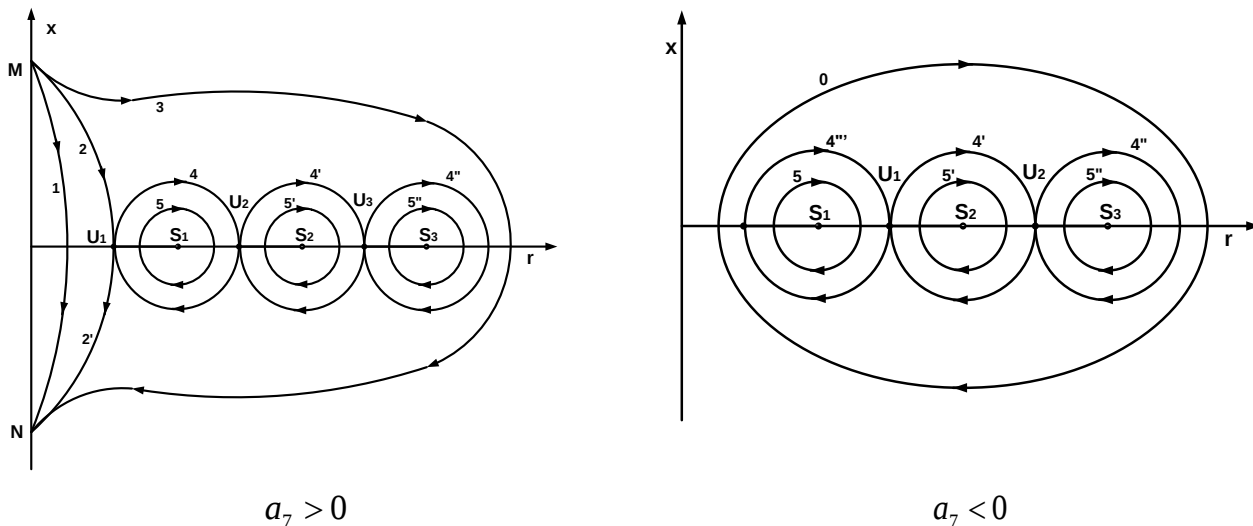


Figura 5.15 Portretul de fază în cazul 1.4

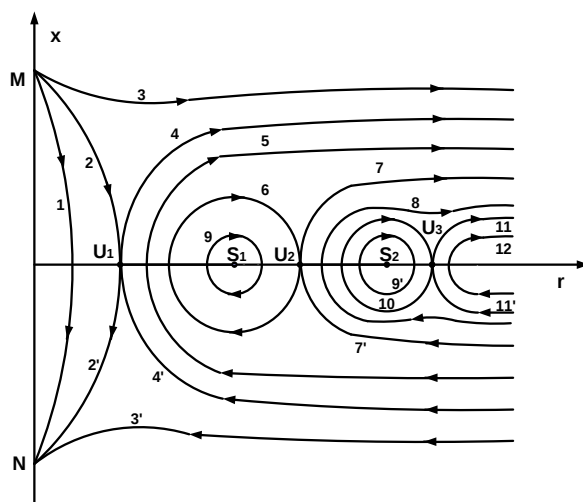
(1) și (3) – orbite heterocline, care reprezintă mișcarea în spirală de tipul ejecție - coliziune;
 (2) și (2') – reprezintă mișcarea pe orbite în formă de spirală care pornesc de la coliziune și tind asimptotic la forma circulară instabilă sau invers;
 (4), (4'), (4'') și (4''') – orbite heterocline (4), (4') și homocline (4''), (4'''), în formă de spirală care pornesc asimptotic de la un cerc instabil și tind asimptotic la același cerc instabil;
 (0), (5), (5') și (5'') – orbite stabile periodice sau cvasi-periodice, orbitele de tipul (0) având o excentricitate mare.

Diferența dintre cele două portrete de fază este că în cazul non-colizional nu se întâlnesc traiectoriile (1), (2) și (3), însă apare o nouă orbită stabilă (0).

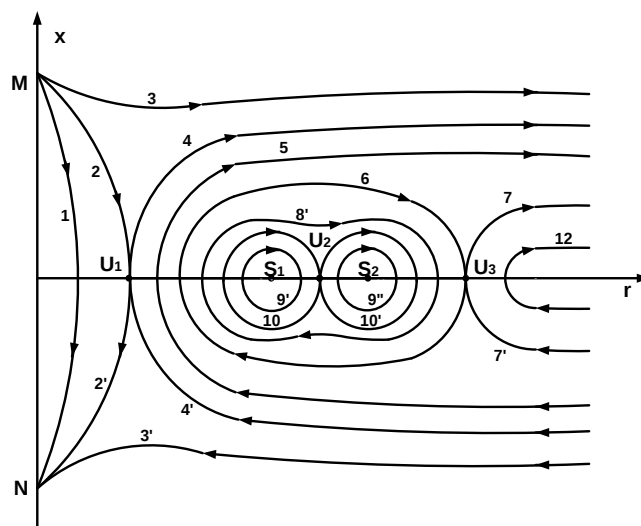
ENERGIA SISTEMULUI POZITIVĂ SAU NULĂ ($h \geq 0$)

Diferența dintre cazul în care energia este pozitivă și cel în care este nulă rezidă numai în faptul că în momentul evadării, la infinit viteza asimptotică este infinită sau respectiv, nulă. În cazul energiei nule sau pozitive sistemul are numai 2 puncte de echilibru stabil (S_1 și S_2).

1. $a_7 > 0, 0 \leq h < h_c$



(a)

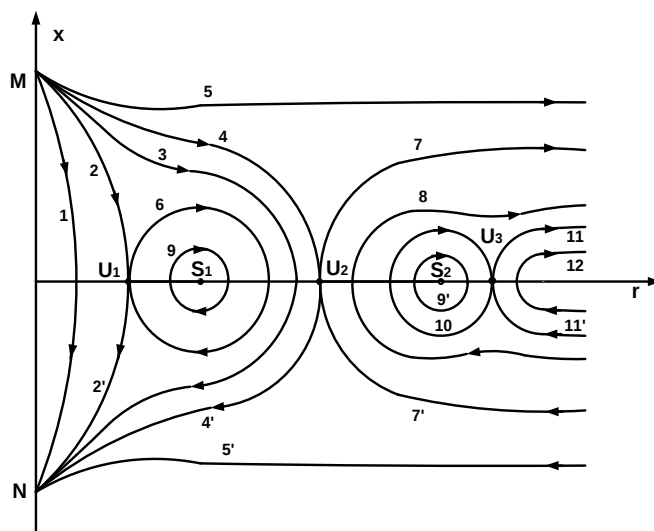


(b)

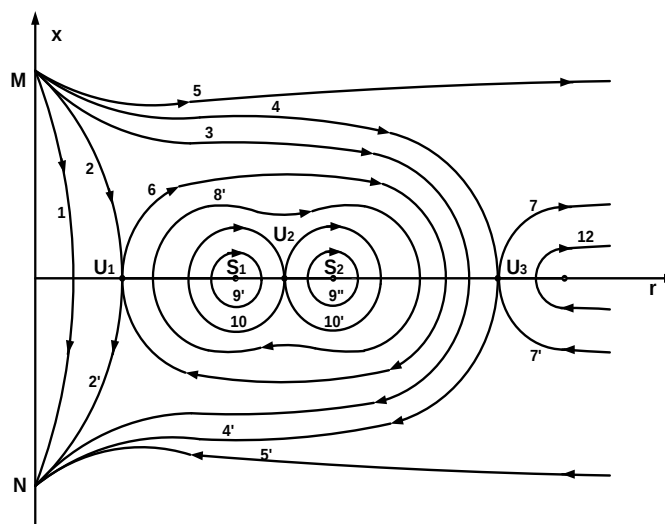
Figura 5.16 Portretul de fază în cazul energiei sistemului pozitivă sau nulă

- (1) – orbite heterocline, care reprezintă mișcarea în spirală de tipul ejecție - coliziune;
 (2) și (2') – reprezintă mișcarea pe orbite în formă de spirală care pornesc de la coliziune și tind asimptotic la forma circulară instabilă sau invers;
 (3) și (3') – orbite în spirală de tipul ejecție – evadare și infinit – coliziune;
 (4), (4'), (7), (7'), (11) și (11') – orbite care pornesc asimptotic de la forma circulară instabilă și tind la orbite în formă de spirală la infinit sau pornesc de la infinit cu forma spiralată și tind asimptotic la forma circulară instabilă;
 (5), (8) și (12) – orbite ne-colizionale în spirală care vin de la infinit și se întorc la infinit;
 (6), (10) și (10') – orbite homocline, în formă de spirală care pornesc asimptotic de la un cerc instabil și tind asimptotic la același cerc instabil;
 (8'), (9), (9') și (9'') – orbite stabile periodice sau cvasiperiodice, cu excentricitate mare în cazul orbitelor de tipul (8') și excentricitate redusă în cazul (9') și (9'').

2. $a_7 > 0$, $0 \leq h_c < h$



(a)



(b)

Figura 5.17 Portretul de fază în cazul energia sistemului este pozitivă și mai mare decât energia critică

- (1) și (3) – orbite heterocline, care reprezintă mișcarea în spirală de tipul ejecție - coliziune;
- (2), (2'), (4) și (4') – reprezintă mișcarea pe orbite în formă de spirală care pornesc de la coliziune și tind asimptotic la forma circulară instabilă sau invers;
- (5) și (5') – orbite în spirală de tipul ejecție – evadare și infinit – coliziune;
- (6), (10) și (10') – orbite homocline, în formă de spirală care pornesc asimptotic de la un cerc instabil și tind asimptotic la același cerc instabil;
- (7) și (11) – orbite care pornesc asimptotic de la forma circulară instabilă și tind la orbite în formă de spirală la infinit sau pornesc de la infinit cu forma spiralată și tind asimptotic la forma circulară instabilă;
- (8) și (12) – orbite ne-colizionale în formă de spirală care vin de la infinit și se întorc la infinit;
- (8'), (9), (9') și (9'') – orbite stabile periodice sau cvasiperiodice, cu excentricitate mare în cazul orbitelor de tipul (8') și excentricitate redusă în cazul (9') și (9'').

3. $h = h_c \geq 0$

Diferența dintre cele două portrete de fază este că în cazul ne-colizional nu se întâlnesc traiectoriile (1), (2) și (3), însă apare o nouă orbită (0).

- (1) – orbite heterocline, care reprezintă mișcarea în spirală de tipul ejecție - coliziune;
- (2) și (2') – reprezintă mișcarea pe orbite în formă de spirală care pornesc de la coliziune și tind asimptotic la forma circulară instabilă sau invers;
- (3) și (3') – orbite în spirală de tipul ejecție – evadare și infinit – coliziune;
- (4), (4') și (4'') – orbite heterocline și homocline (4''), în formă de spirală care pornesc asimptotic de la un cerc instabil și tind asimptotic la un alt cerc instabil;
- (5) și (5') – orbite stabile periodice sau cvasiperiodice;
- (6) și (6') – orbite care pornesc asimptotic de la forma circulară instabilă și tind la orbite în formă de spirală la infinit sau pornesc de la infinit cu forma spiralată și tind asimptotic la forma circulară instabilă;
- (7) și (0) – orbite ne-colizionale în formă de spirală care vin de la infinit și se întorc la infinit.

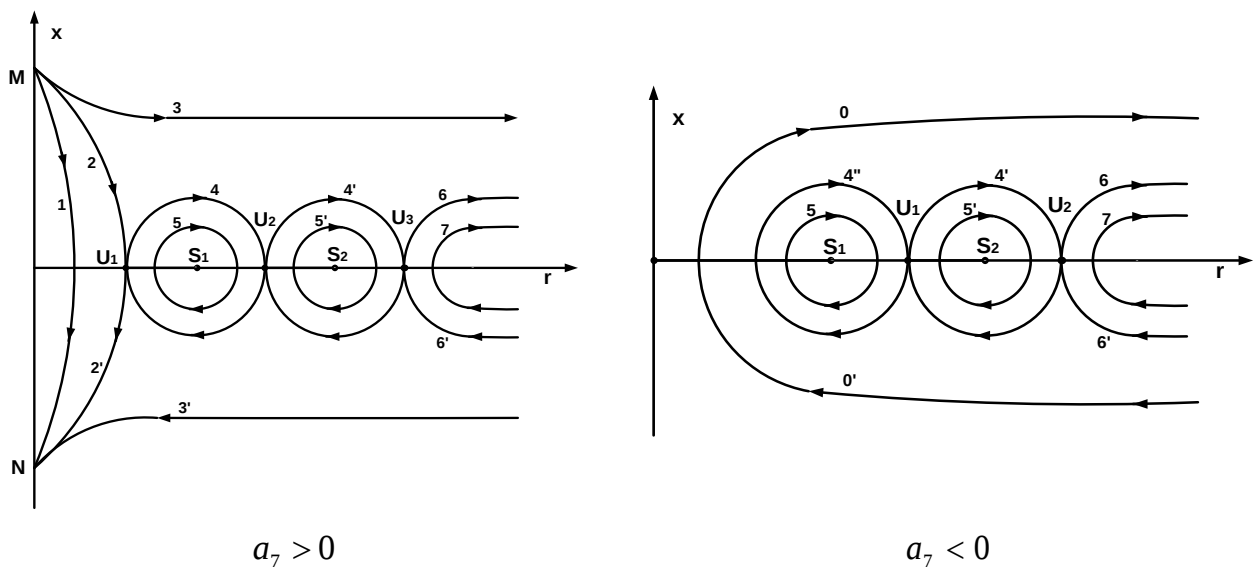


Figura 5.18 Portretul de fază în cazul energiei sistemului este nulă sau pozitivă și egală cu energia critică

4. $a_7 < 0$, $h_c \neq h < 0$

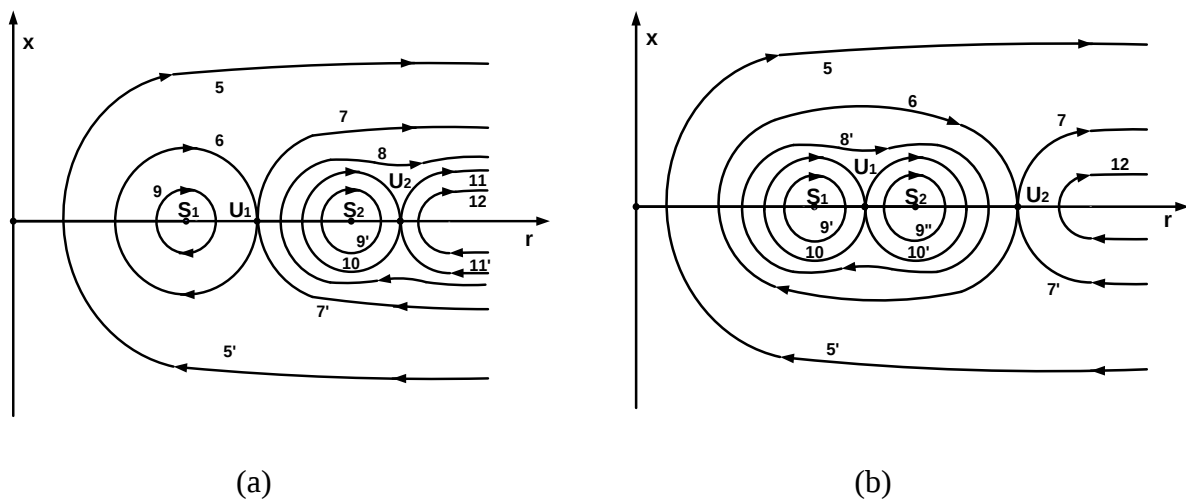


Figura 5.19 Portretul de fază în cazul energiei sistemului este negativă și diferită de energia critică

- (5), (8) și (12) – orbite ne-colizionale în formă de spirală care vin de la infinit și se întorc la infinit;
- (6), (10) și (10') – orbite homocline, în formă de spirală care pornesc asimptotic de la un cerc instabil și tind asimptotic la același cerc instabil;
- (7), (11) și (11') – orbite care pornesc asimptotic de la forma circulară instabilă și tind la orbite în formă de spirală la infinit sau pornesc de la infinit cu forma spiralată și tind asimptotic la forma circulară instabilă;
- (8'), (9), (9') și (9'') – orbite stabile periodice sau cvasiperiodice, cu excentricitate mare în cazul orbitelor de tipul (8') și excentricitate redusă în cazul (9') și (9'').

5.4 ANALIZA CALITATIVĂ A MIȘCĂRII SATELITULUI GPS SUB INFLUENȚA CUMULATĂ A ARMONICELOR ZONALE DE ORDIN SUPERIOR ȘI A ALTOR FACTORI

În această situație ecuațiile mișcării pentru întocmirea portretelor de fază au forma:

$$\begin{aligned} r' &= r\dot{x} \\ x' &= \frac{7}{2}hr^7 - \frac{5}{2}C^2r^5 + \sum_{n=1}^6 (7-n)a_n r^{7-n} \end{aligned} \quad (5.66)$$

cu integrala energiei:

$$x^2 = hr^7 - C^2r^5 + 2\sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n} \quad (5.67)$$

Deosebirea față de cazul 3 unde s-au luat în considerare numai armonicile zonale, constă în faptul că în prezent coeficientul lui r^5 va fi $(2a_2 - C^2)$. Portretele de fază sunt identice cu cazul prezentat anterior.

5.5 APLICAȚIE PRACTICĂ – SATELITUL GPS

Se înlocuiesc în expresia funcției

$$f(r) = hr^7 - C^2r^5 + 2\sum_{n=1}^7 a_n r^{7-n} \quad (5.68)$$

toți coeficienții cu parametrii cunoscuți ai Pământului:

- armonicile zonale de la J_2 la J_6
- polinoamele Legendre pentru latitudine nulă
- constanta gravitațională (μ)
- energia calculată cu formula $h = -\frac{\mu}{a}$
- momentul cinetic din relația $C^2 = \mu a(1-e^2)$
- semiaxa mare a satelitului geostaționar $a = 26559,4$ km.

În urma rezolvării ecuației $f(r) = 0$ rezultă soluțiile $r_1 = 26329,11$ și $r_2 = 26788,02$, iar în urma rezolvării ecuației $f'(r) = 0$ rezultă soluția $r'_1 = 26563,5$, care este exact semiaxa mare a satelitului geostaționar. Se realizează graficele funcțiilor $x(r) = \pm\sqrt{f(r)}$ și apoi se determină portretul de fază cu ajutorul programului Maple 14.

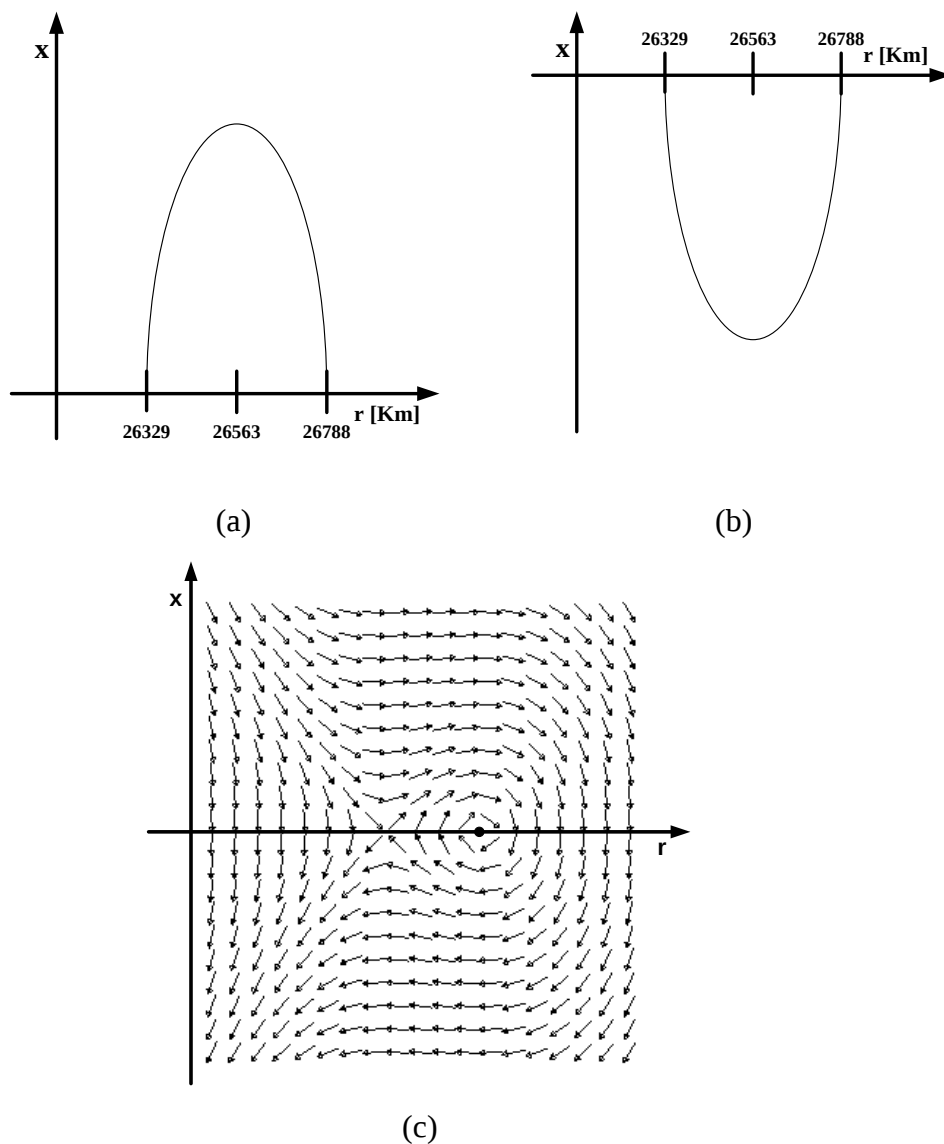


Figura 5.20 (a), (b) - Graficele funcției $x(r)$; (c) - Portretul de fază în Maple

În continuare se prezintă portretul de fază explicit. Poziția satelitului GPS este marcată prin punctul (S), care semnifică mișcare circulară stabilă la distanța r de corpul central.

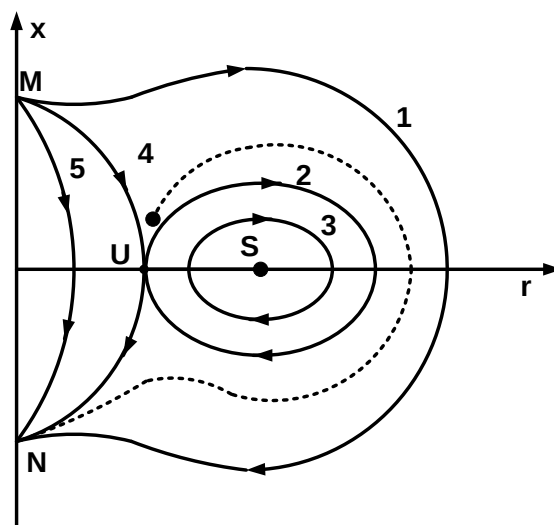


Figura 5.21 Portretul de fază explicit al mișcării satelitului GPS

Orbita satelitului GPS este stabilă atâta timp cât r se situează între valorile $r_1 = 26329,11$ și $r_2 = 26788,02$. Dacă în mișcarea sa pe orbită satelitul GPS depășește la dreapta valoarea lui r_2 sau la stânga valoarea lui r_1 , rezultă deplasarea fizică în spirală pe o orbită care tinde asimptotic la coliziune. Linia punctată reprezintă traiectoria fictivă a unui satelit geostaționar care părăsește orbita sa și se deplasează pe o orbită eliptică, cu excentricitate crescătoare și tinde asimptotic la coliziune.

5.6 CONCLUZII ALE ANALIZEI CALITATIVE

Capitolul prezintă o abordare nouă a teoriei sistemelor dinamice, în general și a mecanicii cerești, în special, prin intermediu metodei calitative al cărui inițiator este Poincare. S-a considerat mișcarea unei particule (satelit, cometă) în jurul corpului central în diferite tipuri de câmp: Schwarzschild, Manev, sub influența armonicelor zonale până la gradul 6.

Din cele prezentate se remarcă utilitatea transformărilor McGehee, care au rolul de a elimina singularitățile și a regulariza ecuațiile de mișcare. Prin intermediul transformărilor s-a făcut să explodeze varietatea coliziunii și a înlocuit-o cu o varietate limită, alipită spațiului fazelor. Transformările McGehee permit astfel studiul mișcării în apropierea coliziunii.

Din acest capitol se observă că pot avea loc coliziuni și pentru cazul $C \neq 0$. Prin urmare, atunci când $r \rightarrow 0$ rezultă $\theta' \rightarrow \infty$, adică particula execută o mișcare în spirală de un număr infinit de ori în jurul centrului, până la coliziune sau după ejecție, ceea ce reprezintă efectul găurii negre (Diacu et al., 1995).

În cazul în care energia sistemului este negativă ($h < 0$) particula nu poate evada. Iar în cazul în care coeficientul maxim ($a_7 < 0$) este negativ, mișcarea se execută fără coliziune.

Din situațiile prezentate se întâlnesc următoarele tipuri de orbite:

- mărginite și colizionale, care pornesc de la ejecție, ating o distanță maximă sau un echilibru instabil și vin la coliziune;
- mărginite și ne-colizionale, care pot fi:
 - circulare stabile sau instabile
 - periodice (inclusiv librații radiale) și cvasi-periodice
 - homocline, care pornesc de la un echilibru instabil și revin la acesta
 - heterocline, care unesc două puncte de echilibru instabil
- nemărginite și colizionale, de tipul ejecție – evadare și infinit – coliziune;
- nemărginite și ne-colizionale, care vin de la infinit, ating o distanță minimă sau un punct de echilibru instabil și revin la infinit.

CAPITOLUL VI. CONCLUZII

În încheiere se face o trecere în revistă a noțiunilor și analizelor efectuate în prezenta lucrare, scoțând în evidență rezultatele semnificative și originale.

În ordinea capitolelor, urmează prezentarea succintă a părților importante din fiecare secțiune a acestei lucrări și concluzii rezultate.

Cap. I. Descrierea sistemului satelitar NAVSTAR/GPS, identificarea aplicațiilor tehnologiei GPS, descrierea sistemelor de referință și scările de timp necesare studiului forțelor perturbatoare care acționează asupra sateliților GPS.

Cap. II. Analiza cantitativă a mișcării sateliților GPS sub influența perturbațiilor de tip gravitațional și negravitațional.

Cap. III. Analiza cantitativă a perturbațiilor de tip negravitațional: presiunea radiației solare directe, presiunea de radiație solară indirectă, emisia termică anizotropă, emisia antenei și modelele empirice ale presiunii radiației solare.

Cap. IV Analiza mișcării perturbate a sateliților NAVSTAR/GPS pe baza metodei numerice utilizând algoritmul de integrare Runge-Kutta de ordinul 4. Avantajele acestui algoritm de integrare sunt stabilitatea și ușurința modelării ecuațiilor mișcării perturbate a satelitelui GPS. Algoritm este lent, timpul de calcul mărindu-se considerabil pentru perioade mari de timp, acesta fiind principalul dezavantaj al algoritmului. Programul de calcul este realizat de autor în limbajul de programare C++, într-o manieră simplă, dar care să ofere informațiile necesare analizei mișcării sateliților GPS.

4.4 Plecând de la condițiile inițiale (poziție și viteză) pentru satelitul GPS de studiu, pentru data de 10.02.2011 ora 00.00 UT s-au prezentat graficele de variație a componentelor accelerațiilor date de perturbațiile gravitaționale J_2, J_3, J_4, J_5, J_6 , atracția gravitațională a Soarelui și a Lunii, efectele relativiste și efectul Poynting-Robertson pentru o perioadă orbitală, precum și graficele de variație a accelerațiilor totale ale acestor perturbații gravitaționale pentru o perioadă de 50 de ore. Sunt determinate valorile mediate ale accelerațiilor totale, unitatea de măsură fiind în Km/s^2 .

4.5 Se observă faptul că perturbațiile de natură gravitațională au influența cea mai mare, dintre acestea evidențiindu-se armonica zonală J_2 a cărui ordin de mărime este de $2 \times 10^{-7} \text{ Km/s}^2$.

Dintre perturbațiile de natură negravitațională, presiunea radiației solare directe are efectul cel mai mare având ordinul de mărime de $4,4 \times 10^{-10} \text{ Km/s}^2$ pe când cel dat de efectul Poynting-Robertson este de $6,9 \times 10^{-15} \text{ Km/s}^2$.

4.6 Sunt determinate efectele produse de perturbațiile de tip negravitațional asupra elementelor orbitale kepleriene.

4.6.1 Ca urmare a acțiunii presiunii radiației solare directe asupra unui satelit GPS au reieșit următoarele efecte:

- Semi-axa mare prezintă o perturbație scurt-periodică cu o perioadă de 6 ore suprapusă peste o perturbație seculară. Pentru o perioadă orbitală, semi-axa mare suferă o variație de 4 metri.

- Excentricitatea prezintă o perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 6 ore având ordinul de mărime $4,8 \cdot 10^{-8} \text{ Km}$.

- Înclinarea prezintă același tip de perturbație ca și semi-axa mare, o perturbație scurt-periodică suprapusă peste o perturbație seculară. Perturbația scurt-periodică are perioada de 6 ore și ordinul de mărime $3 \cdot 10^{-6}$ grade.

- Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație scurt-periodică cu o perioadă de 6 ore și o amplitudine de $1,7 \cdot 10^{-6}$ grade, suprapusă peste o perturbație seculară.

4.6.2 Pe baza modelelor de radiație a Pământului, radiație reflectată și emisă, s-au realizat graficele iradianței Pământului pentru diferite valori ale albedoului și în funcție de unghiul ψ - unghiul satelit-Pământ-Soare. Pe baza datelor privind reflectivitatea și emisivitatea Pământului furnizate de CERES pentru perioada februarie – iunie 2011 am realizat graficele de variație ale acestora și determinat valorile medii. Folosind metoda celor mai mici pătrate am determinat coeficienții reflectivității și emisivității pentru perioada februarie – iunie 2011 pentru cazul când aceștia se scriu ca dezvoltări armonice în funcție de latitudine. S-au determinat graficele de variație ale componentelor radiale și tangențiale ale accelerațiilor datorate radiației reflectate și emise de Pământ, asupra sateliților GPS (satelitul P07 în particular), cazul în care sateliții sunt modelați sub forma „cutie cu aripi”. Pentru cazul în care satelitul GPS este considerat ca având forma de „sferă” s-au determinat graficele de variație ale elementelor keplerine pentru 50 și 500 de ore rezultând următoarele efecte:

- Semi-axa mare prezintă două tipuri de perturbații, una scurt-periodică și una lung-periodică. Perturbația scurt-periodică este de perioadă egală cu perioada orbitală (12 ore) și o variație de 1 Km, iar perturbația lung-periodică are perioada de 240 de ore.

- Excentricitatea prezintă o perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioadă de 6 ore având ordinul de mărime $1,5 \cdot 10^{-8}$ Km.

- Înclinarea prezintă două tipuri de perturbații, una scurt-periodică și una seculară. Perturbația scurt-periodică este de perioadă egală cu perioada orbitală (12 ore) și o variație de $7 \cdot 10^{-6}$ grade.

- Anomalia medie suferă o perturbație scurt-periodică având perioada de 6 ore suprapusă peste o perturbație seculară.

- Argumentul perigeului suferă perturbații mixt-periodice:

o perturbație scurt-periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $1 \cdot 10^{-2}$ grade

o perturbație scurt-periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $3 \cdot 10^{-2}$ grade

o perturbație seculară

- Longitudinea nodului ascendent suferă perturbații mixt-periodice:

o perturbație scurt-periodică având perioada de 6 ore și o amplitudine de $4 \cdot 10^{-3}$ grade

o perturbație seculară

4.6.3 Ca urmare a emisiei termice anizotrope asupra unui satelit GPS au reieșit următoarele efecte:

- Semi-axa mare și înclinarea nu suferă perturbații.

- Excentricitatea suferă o perturbație scurt-periodică de perioadă egală cu perioada orbitală și de amplitudine $8 \cdot 10^{-10}$.

- Anomalia medie suferă perturbații scurt-periodice cu perioada de 6 ore suprapuse peste o perturbație seculară.

- Argumentul perigeului suferă perturbații scurt-periodice având perioada de 6 ore suprapuse peste perturbații seculare.

- Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație lung-periodică având amplitudinea de $2 \cdot 10^{-11}$ grade.

4.6.4 Ca urmare a emisiei antenelor de navigație asupra unui satelit GPS au reieșit următoarele efecte:

- Semi-axa mare și înclinarea nu suferă perturbații.

- Excentricitatea prezintă o perturbație scurt-periodică cu o perioadă egală cu perioada orbitală și o amplitudine de $8 \cdot 10^{-10}$.

- Argumentul perigeului suferă perturbații scurt-periodice având perioada de 6 ore.

- Longitudinea nodului ascendent suferă o perturbație lung periodică având amplitudinea de $1 \cdot 10^{-8}$ grade.

4.6.5 Pe baza studiilor realizate de Adhya 2005 privind eclipsele sateliților GPS, am realizat un model matematic pentru determinarea perioadei de timp în care satelitul GPS intră în zona de penumbră sau umbră a Pământului. Am luat în considerare cazurile când satelitul GPS este perturbat de presiunea radiației solare directă sau de J_2 și am determinat soluțiile modelului matematic creat. Pentru toate situațiile când sistemul a avut soluții reale a reieșit că satelitul nu a intrat pentru nici un moment în zona de umbră sau de penumbră a Pământului.

La modelarea teoretică a regiunii de penumbră prin care trece un satelit din constelația GPS, a reieșit că la o viteză a satelitului de aproximativ 3.86 Km/s, traversarea acestei zone se realizează într-un interval de 15.3 minute.

4.6.6 Ca urmare a efectului Poynting-Robertson asupra unui satelit GPS au reieșit următoarele efecte:

- Semiaxa mare suferă perturbații lung periodice cu amplitudinea maximă de 1 cm.
- Excentricitatea prezintă o perturbație seculară suprapusă peste o perturbație scurt-periodică cu perioada egală cu perioada orbitală având ordinul de mărime $1,5 \cdot 10^{-11}$.
- Înclinarea este foarte stabilă, aceasta având perturbații scurt periodice de perioadă 4 ore și ordinul de mărime de $1 \cdot 10^{-8}$ grade.
- Celelalte elemente orbitale suferă perturbații scurt periodice de perioadă 6 ore și de amplitudine $8 \cdot 10^{-7}$ grade.

Cap. V Prezintă o abordare nouă a teoriei sistemelor dinamice, în general și a mecanicii cerești, în special, prin intermediu metodei calitative al cărui inițiator este Poincare. S-a considerat mișcarea unei particule (satelit) în jurul corpului central în diferite tipuri de câmp: Schwarzschild, Manev și sub influența armonicelor zonale până la gradul 6. S-a analizat mișcarea satelitului GPS pe orice tip de orbită și pentru diferite valori ale energiei sistemului.

5.2 Se remarcă utilitatea transformărilor McGehee, care au rolul de a elimina singularitățile și de a regulariza ecuațiile de mișcare. Prin intermediul transformărilor s-a făcut să explodeze varietatea coliziunii și s-a înlocuit o varietate limită, alipită spațiului fazelor. Transformările McGehee acționează ca o lupă cu o putere infinită de mărire asupra singularității coliziunii și permite astfel studiul mișcării în apropierea coliziunii.

5.3 S-a efectuat o aplicație practică în cazul satelitului GPS. Orbita satelitului GPS este stabilă atâta timp cât r se situează între valorile $r_1 = 26329,11$ și $r_2 = 26788,02$. Dacă în mișcarea sa pe orbită satelitul GPS depășește la dreapta valoarea lui r_2 sau la stânga valoarea lui r_1 , rezultă deplasarea fizică în spirală pe o orbită care tinde asimptotic la coliziune. Astfel rezultatele calitative sunt confirmate de rezultatele numerice.

ANEXE

7.1 CONDIȚII INIȚIALE ALE SATELIȚILOR GPS

Sunt prezentate condițiile inițiale (poziția și viteza) ale sateliților așa cum au fost utilizate în softul de integrare. Unitățile de măsură sunt cele din Sistemul Internațional: [Km] și [Km/s].

$x_{ai} = 2425.8676$; $vx_{ai} = 3.8327$;
 $y_{ai} = -15215.1157$; $vy_{ai} = 0.4529$;
 $z_{ai} = 21743.2188$; $vz_{ai} = -0.1055$;

$\theta = 1.0027379093 \cdot UT1 + v_o + \Delta\Psi \cos \varepsilon$

$UT1 = UTC - dUT1$, ($dUT1 = 0.162626$)

$v_o = 24110^s \cdot 54841 + 8640184^s \cdot 812866 \cdot T + 0^s \cdot 093104 \cdot T^2 - 6^s \cdot 2 \cdot 10^{-6} \cdot T^3 = 580910482.2$

$T = \frac{JD - 2455602,5}{36525} = \frac{2455602,5}{36525} = 67,23073237$

$\Delta\Psi \cos \varepsilon = -62.61453881$

$\theta = 1.0027379093 \cdot (UT - 0.162626) + 580910482.2 - 62.61453881$

Valorile argumentelor pentru precesie conform Buletinului IERS, luna februarie 2012:

$x_p = 0.03428$

$y_p = 0.20863$

Pentru Soare:

$d_0 = 4057$;

Valorile pentru raportul A/M:

0,01513 m²/Kg

0,01667 m²/Kg

0,01606 m²/Kg

CODUL SURSĂ C++ PERTURBAȚIE PRESIUNE RADIATIE SOLARĂ DIRECTĂ

```
#include <stdio.h>
```

```
#include <math.h>
```

```
double ciclu = 0;
```

```
double ut = 0;
```

```
int counter=0;
```

```
double xa0; double ya0; double za0;
```

```
double vxa0; double vya0; double vza0;
```

```
double axai; double ayai; double azai;
```

```
double p=1000.0;
```

```
double vxai =3.8327;
```

```
double vyai =0.4529;
```

```
double vzai =-0.1055;
```

```
double xai =2425.8676;
```

```
double yai =-15215.1157;
```

```
double zai =21743.2188;
```

```
double d0=4057;
```

```
double d;
```

```
double au=149597870.691;
```

```
double xs=0;
```

```

double ys=0;
double zs=0;
double rs=0;
double obl=0;

double mu =398600.5
double mt=132712440000.0;
double Pi=3.1415926535897932384626433832795;
double ra;
double va;

double dfcose=Pi*(-62.61453881/648000.0);
double g0=580910482.2;
double xp=Pi*(0.03428/648000.0);
double yp=Pi*(0.20863/648000.0);
double vl=299792.458;
double kr=1.44;
double ArieMasa=0.01513;

double Dvxa = 0;   double Dvya = 0;   double Dvza = 0;
double Dvxa1 = 0;  double Dvya1 = 0;   double Dvza1 = 0;
double Dvxa2 = 0;  double Dvya2 = 0;   double Dvza2 = 0;
double Dvxa3 = 0;  double Dvya3 = 0;   double Dvza3 = 0;
double Dvxa4 = 0;  double Dvya4 = 0;   double Dvza4 = 0;

double Dxa = 0;    double Dya = 0;    double Dza = 0;
double Dxa1 = 0;   double Dya1 = 0;    double Dza1 = 0;
double Dxa2 = 0;   double Dya2 = 0;    double Dza2 = 0;
double Dxa3 = 0;   double Dya3 = 0;    double Dza3 = 0;
double Dxa4 = 0;   double Dya4 = 0;    double Dza4 = 0;

double cx=0;       double ax=0;       double E=0;
double cy=0;       double e=0;        double M=0;
double cz=0;       double in=0;       double u=0;
double c=0;        double omr=0;
double h=0;        double omc=0;

double Mu = 0;     double ypu = 0;
double eu = 0;     double rpu = 0;
double iu = 0;     double vau = 0;
double wu = 0;     double Eur = 0;
double Ou = 0;     double xpu = 0;
double xeu=0;
double yeu=0;
double zeu=0;
double Lu=0;

void unu();
void GPS(double xai, double yai, double zai);
void Soare3c();

int main()

```

```

{
    FILE *fpx,*fpy,*fpz,*fpr, *fpvx, *fpvy, *fpvz, *fpv, *fpa, *fpe, *fpi, *fpomr, *fpomc,
    *fpM, *fpaxai, *fpayai, *fpazai, *fpxs, *fpys, *fpzs, *fprs;

    fpx = fopen("x.txt","w");
    fpy = fopen("y.txt","w");
    fpz = fopen("z.txt","w");
    fpr = fopen("r.txt","w");
    fpvx = fopen("vx.txt","w");
    fpvy = fopen("vy.txt","w");
    fpvz = fopen("vz.txt","w");
    fpv = fopen("v.txt","w");
    fpa = fopen("a.txt","w");
    fpe = fopen("e.txt","w");
    fpi = fopen("i.txt","w");
    fpomr = fopen("omr.txt","w");
    fpomc = fopen("omc.txt","w");
    fpM = fopen("M.txt","w");
    fpaxai = fopen("axai.txt","w");
    fpayai = fopen("ayai.txt","w");
    fpazai = fopen("azai.txt","w");
    fpxs = fopen("xs.txt","w");
    fpys = fopen("ys.txt","w");
    fpzs = fopen("zs.txt","w");
    fprs = fopen("rs.txt","w");

    while(ciclu<=1800000000)
    while (ut<=1800000000)
    {
        d=d0+ciclu/(p*86400);
        ciclu = ciclu + 1;
        ut = ut+1;
        Soare3c();
        // r k GPS

        xa0 = xai;
        ya0 = yai;
        za0 = zai;
        vxa0 = vxai;
        vya0 = vyai;
        vza0 = vzai;

        GPS(xai, yai, zai);
        //pas1
        Dxa1 = vxai / p;
        xai = xai + Dxa1 / 2;
        Dya1 = vyai / p;
        yai = yai + Dya1 / 2;
        Dza1 = vzai / p;
        zai = zai + Dza1 / 2;
        Dvxa1 = axai / p;
        vxai = vxai + Dvxa1 / 2;
    }
}

```

```

Dvya1 = ayai / p;
vyai = vyai + Dvya1 / 2;
Dvza1 = azai / p;
vzai = vzai + Dvza1 / 2;

```

```

GPS(xai, yai, zai);
//pas2
Dxa2 = vxai / p;
xai = xai + Dxa2 / 2;
Dya2 = vyai / p;
yai = yai + Dya2 / 2;
Dza2 = vzai / p;
zai = zai + Dza2 / 2;
Dvxa2 = axai / p;
vxai = vxai + Dvxa2 / 2;
Dvya2 = ayai / p;
vyai = vyai + Dvya2 / 2;
Dvza2 = azai / p;
vzai = vzai + Dvza2 / 2;

```

```

GPS(xai, yai, zai);
//pas3
Dxa3 = vxai / p;
xai = xai + Dxa3;
Dya3 = vyai / p;
yai = yai + Dya3;
Dza3 = vzai / p;
zai = zai + Dza3;
Dvxa3 = axai / p;
vxai = vxai + Dvxa3;
Dvya3 = ayai / p;
vyai = vyai + Dvya3;
Dvza3 = azai / p;
vzai = vzai + Dvza3;

```

```

GPS(xai, yai, zai);
//pas4
Dxa4 = vxai / p;
Dya4 = vyai / p;
Dza4 = vzai / p;
Dvxa4 = axai / p;
Dvya4 = ayai / p;
Dvza4 = azai / p;

```

```

Dxa = (Dxa1 + 2 * (Dxa2 + Dxa3) + Dxa4) / (6);
Dya = (Dya1 + 2 * (Dya2 + Dya3) + Dya4) / (6);
Dza = (Dza1 + 2 * (Dza2 + Dza3) + Dza4) / (6);

```

```

Dvxa = (Dvxa1 + 2 * (Dvxa2 + Dvxa3) + Dvxa4) / (6);
Dvya = (Dvya1 + 2 * (Dvya2 + Dvya3) + Dvya4) / (6);
Dvza = (Dvza1 + 2 * (Dvza2 + Dvza3) + Dvza4) / (6);

```

```
double teta=Pi*(1.0027379093*(ut-0.162626)+g0)/43200+dfcose;
double teta=Pi*(1.0027379093*TIMP+g0)/43200+dfcose;
```

```
xai=(xa0 + Dxa)*cos(teta)+(ya0 + Dya)*sin(teta)+(za0 + Dza)*(cos(teta)*xp-sin(teta)*yp);
yai=-(xa0 + Dxa)*sin(teta)+(ya0 + Dya)*cos(teta)-(za0 + Dza)*(sin(teta)*xp+cos(teta)*yp);
zai=-(xa0 + Dxa)*xp+(ya0 + Dya)*yp+(za0 + Dza);
```

```
vxai=(vxa0 + Dvxa)*cos(teta)+(vya0 + Dvya)*sin(teta)+(vza0 + Dvza)*(cos(teta)*xp-
sin(teta)*yp);
vyai=-(vxa0 + Dvxa)*sin(teta)+(vya0 + Dvya)*cos(teta)-(vza0 +
Dvza)*(sin(teta)*xp+cos(teta)*yp);
vzai=-(vxa0 + Dvxa)*xp+(vya0 + Dvya)*yp+(vza0 + Dvza
```

```
va = sqrt(vxai * vxai + vyai * vyai + vzai * vzai);
ra = sqrt(xai * xai + yai * yai + zai * zai);
```

```
cx=yai*vzai-zai*vyai;
cy=zai*vxai-xai*vzai;
cz=-xai*vyai+yai*vxai;
c=sqrt(cx*cx+cy*cy+cz*cz);
h=va*va-2*(mu)/ra;
ax=-(mu)/h;
e=sqrt(1+h*c*c/((mu)*(mu)));
in=(180/Pi)*(acos(-cz/c)); // in grade
omr=(180/Pi)*atan(-cx/cy); // in grade
```

```
do
{
    if (omr<0)
    {
        omr=omr+360;
    }
    else if (omr>=360)
        omr=omr-360;
    }
    while ((omr<0)|| (omr>=360));
```

```
u=(180/Pi)*acos((xai*cos(omr*Pi/180)+yai*sin(omr*Pi/180))/ra);
omc=u-(180/Pi)*acos((c/ra-(mu)/c)/sqrt(h+(mu)*(mu)/(c*c)));
```

```
do
{
    if (omc<0)
    {
        omc=omc+360;
    }
    else if (omc>=360)
        omc=omc-360;
    }
    while ((omc<0)|| (omc>=360));
    E=acos((ax-ra)/(ax*e));
    M=(180/Pi)*(E-e*sin(E));
```

```

if (++counter%3600000 == 0)
{

fprintf(fpx,"%9.9e\n",xai);
fprintf(fpy,"%9.9e\n",yai);
fprintf(fpz,"%9.9e\n",zai);
fprintf(fpr,"%9.9e\n",ra);
fprintf(fpvx,"%9.9e\n",vxai);
fprintf(fpvy,"%9.9e\n",vyai);
fprintf(fpvz,"%9.9e\n",vzai);
fprintf(fpv,"%9.9e\n",va);
fprintf(fpa,"%9.9e\n",ax);
fprintf(fpe,"%9.9e\n",e);
fprintf(fpi,"%9.9e\n",in);
fprintf(fpomr,"%9.9e\n",omr);
fprintf(fpomc,"%9.9e\n",omc);
fprintf(fpM,"%9.9e\n",M);
fprintf(fpaxai,"%9.9e\n",axai);
fprintf(fpayai,"%9.9e\n",ayai);
fprintf(fpazai,"%9.9e\n",azai);
fprintf(fpxs,"%9.9e\n",xs);
fprintf(fpys,"%9.9e\n",ys);
fprintf(fpzs,"%9.9e\n",zs);
fprintf(fprs,"%9.9e\n",rs);
printf("%9.0f\n",ciclu);
}
}

fclose(fpx);
fclose(fpy);
fclose(fpz);
fclose(fpr);
fclose(fpvx);
fclose(fpvy);
fclose(fpvz);
fclose(fpv);
fclose(fpa);
fclose(fpe);
fclose(fpi);
fclose(fpomr);
fclose(fpomc);
fclose(fpM);
fclose(fpaxai);
fclose(fpayai);
fclose(fpazai);
fclose(fpxs);
fclose(fpys);
fclose(fpzs);
fclose(fprs);
}

```

```

void GPS(double xai, double yai, double zai)
{
    ra=sqrt(xai*xai+yai*yai+zai*zai);
    axai=-(mu)*xai/(ra*ra*ra)+(-0.1002905016/10000000000.0)*(xs-xai)/(rs);
    ayai=-(mu)*yai/(ra*ra*ra)+(-0.1002905016/10000000000.0)*(ys-yai)/(rs);
    azai=-(mu)*zai/(ra*ra*ra)+(-0.1002905016/10000000000.0)*(zs-zai)/(rs);
}

void Soare3c()
{
    eu=0.016709-0.000000001151*d;
    wu=282.9404+0.0000470935*d;
    Mu=356.047+0.9856002585*d;
    obl=23.4393-0.0000003563*d;
    Eur=Mu+(180/Pi)*eu*sin(Mu*Pi/180)*(1+eu*cos(Mu*Pi/180));
    xpu=au*(cos(Eur*Pi/180)-eu);
    ypu=au*(sin(Eur*Pi/180)*sqrt(1-eu*eu));
    rpu=sqrt(xpu*xpu+ypu*ypu);
    vau=(180/Pi)*atan2(ypu,xpu);
    Lu=vau+wu;
    //noile coordonate ecliptice
    xeu=rpu*cos(Lu*(Pi/180));
    yeu=rpu*sin(Lu*(Pi/180));
    zeu=0.0;
    //coordonate ecuatoriale
    xs=xeu;
    ys=yeu*cos(obl*(Pi/180))-zeu*sin(obl*(Pi/180));
    zs=yeu*sin(obl*(Pi/180))+zeu*cos(obl*(Pi/180));
    rs=sqrt(xs*xs+ys*ys+zs*zs);
}

```

CODUL SURSĂ C++ PERTURBAȚIE PRESIUNE RADIAȚIE SOLARĂ INDIRECTĂ RADIAȚIA PĂMÂNTULUI

Diferența față de cel al presiunii de radiație direct constă în modul de calculare al componentelor accelerațiilor

```

void GPS(double xai, double yai, double zai)
{
    ra=sqrt(xai*xai+yai*yai+zai*zai);
    axai=-(mu)*xai/(ra*ra*ra)-(AriePeMasa*Flux*Csfera)/(vl*1000000);
    ayai=-(mu)*yai/(ra*ra*ra)-(AriePeMasa*Flux*Csfera)/(vl*1000000);
    azai=-(mu)*zai/(ra*ra*ra)-(AriePeMasa*Flux*Csfera)/(vl*1000000);
}

```

CODUL SURSĂ C++ PERTURBAȚIE PRODUSĂ DE EMISIA TERMICĂ ANIZOTROPĂ

```
void GPS(double xai, double yai, double zai)
{
    ra=sqrt(xai*xai+yai*yai+zai*zai);
    axai=-(mu)*xai/(ra*ra*ra)-(ARIEsupraMASA*1367*5*0.44*0.5)/(vl*280*1000000);
    ayai=-(mu)*yai/(ra*ra*ra)-(ARIEsupraMASA*1367*5*0.44*0.5)/(vl*280*1000000);
    azai=-(mu)*zai/(ra*ra*ra)-(ARIEsupraMASA*1367*5*0.44*0.5)/(vl*280*1000000);
}
```

CODUL SURSĂ C++ PERTURBAȚIE PRODUSĂ DE EMISIA ANTENELOR

```
void GPS(double xai, double yai, double zai)
{
    ra=sqrt(xai*xai+yai*yai+zai*zai);
    axai=-(mu)*xai/(ra*ra*ra)+(P)/(Masa*vl*1000000);
    ayai=-(mu)*yai/(ra*ra*ra)+(P)/(Masa*vl*1000000);
    azai=-(mu)*zai/(ra*ra*ra)+(P)/(Masa*vl*1000000);
}
```

CODUL SURSĂ C++ PERTURBAȚIE PRODUSĂ DE EFECTUL POYNTING-ROBERTSON

```
void GPS(double xai, double yai, double zai)
{
    ra=sqrt(xai*xai+yai*yai+zai*zai);
    axai= -(mu)*xai/(ra*ra*ra)-(rsat*rsat*lumin/(4*vl*vl*msat))*sqrt(G*Msoare/((xs-xai)*(xs-xai)*(xs-xai)*(xs-xai)*(xs-xai)*(xs-xai)));
    ayai= -(mu)*yai/(ra*ra*ra)-(rsat*rsat*lumin/(4*vl*vl*msat))*sqrt(G*Msoare/((ys-yai)*(ys-yai)*(ys-yai)*(ys-yai)*(ys-yai)*(ys-yai)));
    azai= -(mu)*zai/(ra*ra*ra)-(rsat*rsat*lumin/(4*vl*vl*msat))*sqrt(G*Msoare/((zs-zai)*(zs-zai)*(zs-zai)*(zs-zai)*(zs-zai)*(zs-zai)));
    atot= sqrt(axai*axai+ayai*ayai+azai*azai);
}
```

BIBLIOGRAFIE

1. Aksnes, K., „*Short-period and long-period perturbations of a spherical satellite due to direct solar radiation*”, Celestial Mech. 1976
2. Anselmo, L. et al., „*Orbital perturbations due to radiation pressure for a spacecraft of complex shape*” Celestial Mech. 1983
3. Anselmo, L. et al., „*Modelling of orbital perturbations due to radiation pressure for high Earth satellites in ESA Spacecraft Flight Dynamic*”, ESA SP-160, 1981
4. Arnold, V. I., „*Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Equations*”, Berlin: Springer 1983
5. Arnold V., Kozlov V., Neishtadt A., „*Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*”, Springer, Germania, 2006
6. Barlier, F. et al., „*Non-gravitational perturbations on the semimajor axis of LAGEOS*”, Ann. Geophys., 1986
7. Bar-Sever Y. and Kuang D., „*New Empirically Derived Solar Radiation Pressure Model for Global Positioning System Satellites*”, IPN Progress Report 42-159, 2004
8. Barrar, R., „*Some remarks on the motion of a satellite of an oblate planet*”, The Astronomical Journal, vol.66, 1961
9. Barrie W.J., „*Discovering the solar system*”, Marea Britanie, 2007
10. Batrakov, I.V., „*Dynamics of Sattelites*”, IUTAM Symposium, Paris 1962, Springer-Verlag, Berlin, 1963
11. Bertotti, B., Farinella, P., „*Physics of the Earth and the Solar System*”, Kluwer Academic Publishers, 1990
12. Beutler G., „*Methods of celestial mechanics*”, vol. 1 și 2, Springer, Germania, 2005
13. Born, G., „*Motion of a Satellite under the influence of an oblate Earth*”, 2001
14. Broucke, R.A., „*Numerical integration of periodic orbits in the main problem of artificial satellites*”, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1994
15. Brouwer, D., „*Solution of the problem of artificial satellite theory without drag*”, the Astronomical Journal, vol.64, 1959
16. Brouwer, D., Clemence, G.M., „*Methods of Celestial Mechanics*”, Academic Press, New York and London, 1961
17. Burns, A.J., „*Elementary Derivation of the Perturbation Equations of Celestial Mechanics*”, American Journal of Physics, 1976
18. Capitaine, N., „*Systèmes de références spatio-temporelles*”, Romanian Astronomical Journal, București, 2002
19. Christoiu A., Murray C. D., „*A second order Laplace-Lagrange theory applied to the uranian satellite system*”, 1997
20. Claessens, S.J., Featherstone, W.E., „*Computation of geopotential coefficients from gravity anomalies on the ellipsoid*”, Western Australian Centre for Geodesy, 2004
21. Collins G., „*The foundations of Celestial Mechanics*”, SUA, 2004
22. Cojocaru, S., „*Sistemul global de poziționare GPS/GLONASS – prezent și viitor*”, Zilele Academiei Clujene, Cluj-Napoca 1996
23. Cojocaru, S., „*Contribuții la studiul erorilor orbitale ale sateliților GPS pe seama potențialului gravitațional terestru*”, Teză de doctorat, Institutul Astronomic, București, 1997
24. Cojocaru, S., „*Elemente de dinamica sateliților GPS*”, Editura Academiei Navale „Mircea cel Bătrân”, Constanța, 1999
25. Cojocaru, S., „*Tratat de navigație maritimă – Metodele moderne ale navigație maritime*”, Editura Ars Academica, București, 2008

26. Cojocaru S., Dragușan A., Lupu S., "*Upon a possible common geostationary and GPS constellation: a dynamical investigation*", Recent Insights into our Universe Workshop, 28-29 Oct 2009, Bucuresti,
27. Dinescu, A., "*Introducere în geodezia geometrică spațială*", Ed.Tehnică, București 1980
28. Drăgușan A., Contribuții la teoria mișcării sateliților ecuatoriali, Teză de doctorat, Institutul Astronomic, București 2008
29. Drăgușan, A., Lupu, S., „*Methods for representing the gravitational potential*”, Romanian Astronomical Journal, vol.16 Supplement, p.127, 2005
30. Drăgușan, A., Lupu, S., „*EPIRB Distress Signal Via Satellite*”, Romanian Astronomical Journal, 2006
31. Drăgușan, A., Lupu, S., Cojocaru S., „*Astronomical Principles of Satellite Positioning*”, Exploring the solar system and the Universe, American Institute of Physics, 2008
32. Escobal, P. R., „*Methods of orbit determination*”, New York, 1965
33. Eriksson, P., „*Orbital and attitude perturbation on a small satellite*”, 2002
34. Expertier, P., „*Geopotential from space techniques*”, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy, 1994
35. Farinella, P. Et al., „*Dynamics of an artificial satellite in an Earth-fixed reference frame: effect of polar motions in Reference Coordinate Systems for Earth Dynamics*”, ed. E M Gasposchkin and B Kolaczek (Dordrecht: Reidel) 1981
36. Garfinkel, B., „*The Orbit of a Satellite of an Oblate Planet*”, The Astronomical Journal, vol.64, 1959
37. Geyling F., Wersternan R., „*Introduction to orbital mechanics*”, Canada, 1971
38. Gube, M., „*Planetary albedo estimates from Meteosat data*”, ESA Journal 1982
39. Heiskanen and Moritz, „*Physical Geodesy*”, Technical University of Graz, 1967
40. Hofmann-Wellenhof, B. et al., „*GPS - Theory and Practice*”, New York 1993.
41. Huang, S.S., „*Some Dynamical properties of natural and artificial satellites*”, The Astronomical Journal, 1961
42. Iacob, C., „*Mecanica teoretică*”, Ed. Didactică și Pedagogică, București 1980
43. Jamet O., Thomas E., „*A linear algorithm for computing the spherical harmonic coefficients of the gravitational potential from a constant density polyhedron*”, Institut Geographique National, Laboratoire de Recherche en Geodesie, 2004
44. Kaula, W.M., „*Development of the lunar and solar disturbing functions for a close satellite*”, The Astronomical Journal, 1962
45. Kaula, W.M., „*Theory of satellite geodesy*”, Blaisdell Publ.Co., Waltham 1966
46. Kovalevsky, J., „*Introduction to the celestial mechanics*”, Olanda, 1967
47. Kovalevsky, J., Mueller, Kolaczek, „*Reference Frames in Astronomy and Astrophysics*”, Kluwer Academics, 1989.
48. Kozai, Y., „*Numerical Results from Orbits*”, Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report 101, 1962
49. Kozai, Y., „*Revised zonal harmonics in the geopotential*”, SAO Special Report, 1969
50. Lala, P., Sechnal, L., „*The Earth Shadowing Effects in the Short - Periodic Perturbations of the Satellite Orbits*”, BAC, 1969
51. Levallois, J.J., Kovalevsky, J., „*Geodesie Generale*”, Tome IV, Paris 1971
52. Lupu S., Zaharescu E., *Effects of direct and indirect solar radiation pressure in orbital parameters of GPS satellites*, Analele Univ. Ovidius Constanța, Seria Matematică, ISSN 1224-1784, Vol. 22(2), 2014, 141-150, DOI: 10.2478/auom-2014-0039
53. Lupu E.C., Lupu S., Adina Petcu, *EB lifetime distributions as alternative to the EP lifetime distributions*, Analele Univ. Ovidius Constanța, Seria Matematică, ISSN 1224-1784, Vol. 22(3), 2014, 115-125, DOI: 10.2478/auom-2014-0053

54. Lupu S. „*Elemente de dinamica sistemului global de poziționare NAVSTAR - GPS*”, Ed. Academiei Navale “Mircea cel Bătrân”, Constanța 2011
55. Lupu S. - *The evaluation of gravitational perturbation acceleration actions on GPS satellites*, Constanta Maritime University’s Annals, Volume 18 - 2012, Ed. Nautica, ISSN 1582 – 3601
56. Lupu S. - *The effects caused by non-gravitational perturbations: the anisotropic thermal emission and antennas emission on GPS satellites*, Constanta Maritime University’s Annals, Volume 18 - 2012, Ed. Nautica, ISSN 1582 – 3601
57. Lupu S., Pocora A., Lupu E.C. – *Modelling the eclipse region for GPS satellites*, “Mircea cel Batran” Naval Academy Scientific Bulletin, Volume XV – 2012 – Issue 1 Published by “Mircea cel Batran” Naval Academy Press, Constanta, ISSN 1454-864X
58. Lupu S., Lupu E.C., Crețu G. – *Some remarks on GPS satellites orbites*, “Mircea cel Batran” Naval Academy Scientific Bulletin, Volume XIV – 2011 – Issue 2 Published by “Mircea cel Batran” Naval Academy Press, Constanta, ISSN 1454-864X
59. Manakov, Yu. M., „*Perturbing effect of terrestrial thermal radiation pressure on an artificial Earth satellite Geodesy*”, Mapping and Photogrammetry 1977
60. Mathuna D., „*Integrable systems in celestial mechanics*”, Springer, SUA, 2008
61. McFadden L.A., Weissman P.R., Johnson T.V., „*Encyclopedia of the Solar System*”, Academic Press, 2007
62. Milani, A., and all, „*Non-gravitational perturbations and satellite geodesy*”, Dipartimento di Matematica, Università di Pisa, Adam Hilger, Bristol, 1987
63. Milone E., Wilson W., „*Solar system astrophysics*”, Springer, New York, 2008
64. Mioc, V., Radu, E., „*Aerodynamic Drag Perturbations in Artificial Satellite Nodal Period*”, Astron.Nachr., 5, p.327-334, 1991
65. Mioc, V., Radu, E., „*A complete first-order approximation for the motion in a noncentral attraction field*”, Rev. d’Analyse Num.et de Theorie de l’Approx., 1993
66. Mioc, V., Stoica, C., „*The Schwarzschild problem in astrophysics*”, 1997
67. Mioc, V., „*Teza de doctorat*”, Universitatea Babeș Bolyai, Cluj-Napoca 1980
68. Moore P., „*The data book of astronomy*”, Institute of Physics, SUA, 2000
69. Mueller, I., „*Spherical and Practical Astronomy*”, Frederick Ungar Publ. Co., New York 1969
70. Munyamba, N. „*Derivation of a Solar Radiation Pressure Model of the latest GLONASS Spacecraft*”, 2010
71. Murray C., *Solar system dynamics*, 1999
72. Nakiboglu, S.M., Krakiwski, E.J., Schwary. K.P., Buffet, B., Wanless, B., „*a multi-station, multi-pass approach to Global Positioning System improvement and precise positioning*”, Geodesy Survey of Canada, Rep. 85-003, Ottawa 1985
73. Pal, A., Ureche, V., „*Astronomie*”, Ed.Didactică și Pedagogică, București 1983
74. Rodrigues-Solano, C. Master Thesis: „*Impact of albedo modelling on GPS orbits*”, 2009
75. Rodrigues-Solano, C. Et al. „*Estimating on-orbit optical properties for GNSS satellites*”, Bremen 2010
76. Seeber, G., „*Satellite Geodesy - Foundations, Methods and Applications*”, Berlin, 1993
77. Sehnal, L., „*Effects of the terrestrial infrared radiation pressure on the motion of an artificial satellite*”, Celestial Mech. 1981
78. Sehnal, L., „*The Theory of Orbits in the Solar System and in Stellar Systems*”, IAU Symposium, Thessaloniki, Academic Press 1964
79. Syma A., Thesis: „*Thermal Re-Radiation Modelling for the Precise Prediction and Determination of Spacecraft Orbits*”, 2005
80. Smith, D. E., „*Earth-reflected radiation pressure in Dynamics of Satellites*”, ed. B Morando (Berlin: Springer) 1970

81. Su, H., "Precise orbit determination of global navigation satellite system of second generation", Germania, 2000
82. Tataru N., Lupu S. „The optimization of the calculus of the distances on the electronic charts", Buletinul Institutului Politehnic Iași, Tomul LII (LVI), Fasc. 5, 2006
83. Tscherning, C.C., Sanso, M., „Prediction of spherical harmonic coefficients using Least-Squares Collocation", Copenhagen, Danemarca, 2000
84. Vascoviak, S.N., 'Funcția Teni b Zadace o Vlianii Svetogo Davlenia na Dviscenie', V.M.U., Ser. fiz.-astr., 5, p.584, 1974.
85. Zierbart M., Thesis: "Hight Precision Analitical Solar Radiation Pressure Modelling for GNSS Spacecraft", 2001
86. Xu G., „GPS Theory, Algorithms and applications", Springer, Germania, 2007
87. Xu G., „Orbits", Springer, Germania, 2008
88. Wolf, R., "Satellite orbit and ephemeris determination using inter satellite link", Germania, 2000
89. <ftp://tycho.usno.navy.mil/pub/gps/>
90. <http://www.bsu.edu>
91. http://ceres-tool.larc.nasa.gov/org_tool/srbavg
92. <http://www.esa.int>
93. <http://www.hyperphysics.phy-astr.gsu.edu>
94. <http://www.icgem.gfz-postdam.de>
95. <http://www.iers.org>
96. <http://igs.org/igscb/product/1780/>
97. [http:// www.imcce.fr/en/ephemerides/formulaire](http://www.imcce.fr/en/ephemerides/formulaire)
98. <http://www.nasa.gov>
99. <http://www.scienceworld.wolfram.com>
100. <http://www.spaceandtech.com>
101. *** *IERS Annual Report 2001*", International Earth Rotation Service, Verlag des Bundesamts für Kartographie und Geodäsie, Frankfurt am Main 2002
102. GRANT - „Studiul erorilor orbitale ale sateliților de poziționare GPS" poz. 80 din Planul Sectorial de Cercetare Dezvoltare al Ministerului Apărării Naționale pe anul 2009