CURBE ALGEBRICE
TEST 1

1) Fie $C = \{f(x,y) = 0\}$ un germene de curba la origine de multiplicitate 2 (adica $\operatorname{ord} f = 2$). Aratati ca exista coordonate (x,y) in $\mathbb{C}^2$ in care C este data fie de $y^2 = 0$, fie de ecuatia $y^2 + x^k = 0, k \geq 2$. Folositi Teorema de Preparare a lui Weierstrass si faptul urmator: daca $a \in \mathbb{C}\{x\}$ are ordin n, atunci exista $b \in \mathbb{C}\{x\}$ de ordin 1 astfel incat $a = b^n$.

2) Fie $C \subset \mathbb{P}^2$ o curba algebrica data de polinomul minimal F de grad $d \geq 2$. Fie $q = [q_0 : q_1 : q_2]$ un punct arbitrar in $\mathbb{P}^2$ si $D_qF = q_0\frac{\partial F}{\partial x_0} + q_1\frac{\partial F}{\partial x_1} + q_2\frac{\partial F}{\partial x_2}$. Daca gradul lui D_qF este cel putin 1 atunci curba $P_qC := V(D_qF)$ este numita *polara* lui C fata de polul q. Aratati ca urmatoarele sunt adevarate:

(a) P_qC nu depinde de alegerea coordonatelor (liniare) in $\mathbb{P}^2$.
(b) $D_qF \equiv 0$ daca si numai daca C consta din d drepte prin q.
(c) Daca $D_qF \not\equiv 0$ atunci $\deg D_q = d - 1$.
(d) C si P_qC au o componenta irreductibila comuna daca si numai daca C contine o dreapta prin q.
(e) Daca p este un punct singular al lui C atunci $p \in P_qC$.
(f) Intersectia $C \cap P_qC$ consta din punctele de tangenta ale tangentelor la C prin q, impreuna cu singularitatile $\operatorname{Sing} C$ ale lui C.
(g) Exista cel mult $d(d-1)$ drepte tangente la C printr-un punct $q \in \mathbb{P}^2$.
(h) Fie $C = \{x_2^3 + x_0x_1^2 = 0\}$. Determinati pentru toate punctele $q \in \mathbb{P}^2$: componentele ireductibile ale lui P_qC, singularitatile $\operatorname{Sing}(P_qC)$, punctele de intersectie $C \cap P_qC$ si numerele de intersectie $\operatorname{Int}_p(C, P_qC)$ la $p \in C \cap P_qC$.
(i) Presupunem ca C are o tangenta simpla T la p (adica $\operatorname{Int}_p(T, C) = 2$). Daca $q \in T$ este distinct de p, atunci C si P_qC se intersecteaza transvers la p, adica $\operatorname{Int}_p(C, P_qC) = 1$.

3) Fie N_f poligonul Newton al polinomului f cu varfurile $(r_i, s_i), 0 \leq i \leq k$ astfel incat $0 = r_0 < r_1 < \cdots < r_k$ si $s_0 > s_1 > \cdots > s_k = 0$. Exprimati ordinul m al lui f in functie de r_i, s_i. Determinati efectul blowing-up-ului la origine asupra lui N_f listand varfurile noului poligon Newton N_{f_1}.

4) Considerati singularitatile la origine: a) $y^2 = x^{k+1}, k \geq 1$, b) $xy^2 = x^{k-1}, k \geq 4$.

Determinati relatiile de proximitate intre punctele infinit apropiate. Determinati numarul de branse, numerele de intersectie dintre ele, cat si caracteristicile lor Puiseux. Schitati stagiile succesive ale blowup-urilor necesare obtinerii unei rezolutii bune a singularitatii date. Desenati graful dual augmentat.