

# De la spectrul operatorilor Laplace-Beltrami la topologie și invers via matematica oscilatorului armonic.

Dan Burghilea - Ohio State Univ.

Scopul acestui curs este prezentarea detaliată a materialului conținut în articolul semi-expositoriu **Witten deformation and the spectral package of a Riemannian manifold**, apărut în volumul memorial pentru Cabiria Andreian Cazacu, Math. Reports 23(73) 1-2 (2021) 9-30, care ar urma să fie dezvoltat într-o expunere monografică cu potențialul ajutor al audienței.

## Despre subiect.

Prin "pachet(ul) spectral" al unei varietăți Riemanniene compacte înțeleg colecția de valori proprii și vectori (forme diferențiale) proprii ale operatorilor Laplace-Beltrami, colecție infinită și deci inaccesibilă calculatorului, care teoretic determină varietatea Riemanniană.

Rezultate matematice profunde pe această linie, cu analogii în mai multe domenii de matematică și cu interpretări/aplicații în fizică, ca Teorema Hodge-deRham sau Teorema Ray-Singer, ce interpretează analitic invarianti topologici importanți ai varietății, sunt fundamentale în geometrie, dar adesea greu de utilizat (și apreciat) datorită infinității acestui pachet.

În prezenta unei funcții Morse, bazat pe matematica oscilatorului armonic, pachetul spectral poate fi descompus ca o reuniune de sub-colecții finite, indexate cu  $(0, 1, 2, \dots)$ , cu sub-colecția indexată cu 0 numită "virtually small spectral package".

"Virtually small spectral package" recuperează toți invariantii topologici interpretați analitic de teoremele sus amintite și probabil mult mai mult. "Virtually small spectral package" completează substanțial, atât conceptual cât și calculatoriu, teoremele sus menționate, oferind rezultate noi și simultan o sursă de probleme interesante. Detectarea sub-colecției "virtually small spectral package" este de interes practic și încă, riguros vorbind, neclarificată.

Notez că valorile proprii din sub-colecția "virtually small spectral package" nu sunt în mod necesar cele mai mici valori proprii și depind, ca ordine în șirul valorilor proprii și ca număr, de funcția Morse utilizată.

Cursul are două părți. Partea I, colecționează rezultate din diverse domenii (geometrie Riemanniană, topologie, eliptic PDE), rezultate oarecum de cultură matematică generală acoperite în principiu de primii 3 ani de educație matematică universitară, dar probabil nu în formularea necesară prezentei expunerii. Partea II prezintă rezultatele noi pe linia de mai sus. Un matematician sezonat poate urmări Partea II fără a necesita Partea I. Partea I poate fi utilă completării culturii matematice chiar și în lipsa interesului pentru rezultatele matematice din Partea II.

Texte conținând materialul expus (atât background cât și rezultate) vor fi indicate sau oferite dacă sunt neaccesibile "on line".

## **PARTEA I (background)**

**Lectia 1:** Topologie algebrica - Complexe celulare - Coomologie

1. Combinatorica unui complex celular,
2. CW complex, CW complex asociat unei varietati cu camp de vectori conservativ ,
3. Complexul geometric asociat unei varietati Riemanniene si o functie Morse,
4. Numere relevante.

**Lectia 2 :** Algebra lineara finit dimesionala

1. Spatii vectoriale euclidiene, volumul unei aplicatii lineare intre spatii Euclidiene de dimensiune finita, determinant modificat,
2. "Cochain complex" de spatii euclidiene de dimensiune finita, Laplacieni si descompunere Hodge.
3. Endomorfisme auto-adjuncte; detectare de intervale disjuncte de spectru, theoremata Rellich-Kato.

**Lectia 3:** "Calculus" pe o varietate Riemanniana inchisa

1. Operatori Laplace-Beltrami, teorie Hodge- deRham,
2. Pachetul spectral al unei varietati Riemanniene inchise.

**Lectia 4:** Oscilatorul armonic unu si multi-dimensional, valori proprii si vectori (functii) proprii.

**PARTEA II** De la pachetul spectral (geometrie) la complexul geometric (topologie) si invers via "Witten deformation"

**Lectia 1:** "Witten deformation", operatori "Witten Laplace-Beltrami "

**Lectia 2:** Proprietati spectrale ale operatorilor "Witten Laplace-Beltrami " si teorie Rellich-Kato " aplicata la operatorii Witten Laplace-Beltrami  $\Delta_r(t)$

**Lectia 3:** "Clustering"

1. Descompunerea pachetului spectral indus de o functie Morse via oscilatorii armonici asociati cu o functie Morse,
2. Descompunerea in componente ortogonale finit dimensionale a complexului de Rham indus de o functie Morse.

**Lectia 4:** "Virtually small spectral package" al unei varietati Riemanniene.

1. Teorema deRham - Hodge revazuta si Teorema Ray-Singer-Ceeger-Muller revazuta.
2. Aplicatii, Probleme, Conjecturi, Intrebări.

Contact e-mail : d.burghelea@gmail.com (sau telefonic).

Prima întâlnire va avea loc în ziua de 3 Octombrie 2022, ora 15.00, sala 309, pentru discuții clarificatoare și/sau organizatorice.