Şcoala de Studii Avansate a Academiei Române
Institutul de Matematică ”Simion Stoilow” al Academiei Române

Rezumatul tezei de doctorat

Modele stocastice pentru ecuaţii neliniare

Cătălin-Ioan Vrabie

Conducător de doctorat : Prof. Dr. Lucian Beznea

Bucureşti, 2022

CUPRINS

Cuvinte-cheie. Ecuaţie neliniară de evoluţie, superproces, proces cu ramificare nelocală, proces cu valori măsuri, semigrup de ramificare, funcţională aditivă continuă, proces omorât, funcţie excesivă, funcţie Lyapunov compactă, curent (flow) continuu la dreapta, sistem semi-dinamic, mulţime absorbantă, generator slab, log-potenţial.

INTRODUCERE

Această teză este rezultatul unui program de studii doctorale început în anul 2017 sub afilierea Institutului de Matematică "Simion Stoilow" al Academiei Române. Tema lucrării sunt procesele de ramificare cu valori măsuri şi ecuaţiile neliniare care descriu dinamica lor. Astfel, o caracteristică a tezei este dubla perspectivă, atât cea probabilistă, de a demonstra existenţa unor astfel de procese şi a le studia proprietăţile de regularitate, cât şi cea ce ţine de domeniul ecuaţiilor, de a obţine reprezentări (probabiliste) pentru soluţiile ecuaţiilor nelinare mai sus menţionate.

În prima parte a tezei investigăm procese cu ramificare discretă care apar ca modele pentru evoluţia în timp a sistemelor de particule, în cazul în care descendenţii nu pornesc din aceeaşi poziţie în care particula-părinte a dispărut, aşa-numitele procese cu ramificare nelocală. Principala motivaţie este de a generaliza rezultatele existente în literatură pentru cazul în care măsura de perturbare nu are densitate în raport cu măsura Lebesgue. Această generalizare presupune considerarea unei funcţionale aditive continue abstracte a procesului de bază, asociată măsurii de perturbare prin corespondenţa Revuz. Mai întâi studiem proprietăţile unei clase convenabile de astfel de funcţionale aditive continue, suficient de bogată pentru a permite aplicaţii de interes. Abordarea noastră constă în obţinerea soluţiilor mild ale ecuaţiilor cu derivate parţiale neliniare asociate, soluţii ale căror formulare va implica funcţionala aditivă continuă menţionată anterior. Expunerea noastră se concentrează ulterior pe demonstrarea existenţei unui proces de ramificare, suficient de regulat, având ca funcţie de tranziţie semigrupul obţinut. Strategia demonstraţiei presupune mai întâi construirea unui proces auxiliar bazat pe o liniarizare a ecuaţiei cu derivate parţiale menţionată mai sus. Finalizarea demonstraţiei necesită mai multe metode probabiliste şi analitice de Teoria Potenţialului, cum ar fi extinderea spaţiului de bază şi folosirea capacităţilor. În final, având demonstrată existenţa procesului de ramificare, revenim la partea de ecuaţii a problemei, un alt obiectiv principal, şi obţinem o reprezentare probabilistă a soluţiilor ecuaţiei neliniare iniţiale.

În a doua parte a tezei studiem procesele de ramificare în care mişcarea spaţială este dată de un curent (flow) continuu. Arătăm că dacă mecanismul de ramificare al unui superproces este independent de variabila spaţială, atunci superprocesul se obţine prin introducerea ramificării în evoluţia în timp a curentului continuu la dreapta pe măsuri, indus în mod canonic de curentul continuu la dreapta ca mişcare spaţială. Un rezultat analog este valabil pentru procesele cu ramificare nelocală pe mulţimea configuraţiilor finite ale spaţiului de bază, cu condiţia ca procedura de ramificare să fie compatibilă cu curentul continuu la dreapta considerat. Ca şi în partea anterioară, deducem reprezentări probabiliste ale ecuaţiilor neliniare asociate. Obţinem şi rezultate referitoare la generatorii slabi (extinşi) ai acestor procese.

Teza prezintă aplicaţii pentru ambele părţi şi evidenţiază relevanţa acestora pentru cercetarea actuală din acest domeniu.

Rezultatele originale din această teză sunt incluse în următoarele lucrări

• L. Beznea, O. Lupaşcu-Stamate, C. I. Vrabie, Stochastic solutions to evolution equations of non-local branching processes, *Nonlinear Analysis* **200** (2020), 112021. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112021;

• L. Beznea, C. I. Vrabie, Continuous flows driving branching processes and their nonlinear evolution equations, *Adv. in Nonlinear Anal.* **11** (2022), 921–936, https://doi.org/10.1515/anona-2021-0229.

1. PRELIMINARII

Scopul acestui capitol este de a introduce noţiunile preliminare care vor apărea pe parcursul lucrării. Prezentăm concepte fundamentale cum ar fi funcţii de tranziţie şi rezolvante de nuclee, care sunt omniprezente în această teză, şi definim cadrul nostru de studiu pentru procesele stocastice, procesele drepte, menţionând proprietăţile de regularitate de care suntem interesaţi.

2. ECUAŢII DE EVOLUŢIE ASOCIATE PROCESELOR CU RAMIFICARE NELOCALĂ

Procesele cu ramificare nelocală apar în modelarea evoluţiei în timp a sistemelor de particule, pe care le putem descrie după cum urmează. O particulă situată într-un punct al unei mulţimi E începe să se deplaseze conform unui proces Markov cu spaţiul stărilor E (numit *mişcare de bază*), până la un moment de timp aleator când este distrusă. Particula este înlocuită de un număr finit de noi particule care se deplasează independent, conform aceleiaşi mişcări de bază, până la propriul lor timp terminal când sunt înlocuite de către o nouă generaţie de particule şi procesul continuă în acest mod; cf., de exemplu, [20] şi [12].

Considerăm un proces Markov drept $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ pe E cu timp de viaţă infinit, funcţie de tranziţie $(T_t)_{t\geqslant 0}$, $T_t f(x) = \mathbb{E}^x(f(X_t))$, $f \in \mathcal{B}_+(E)$, $x \in E$, $t \geqslant 0$, şi generator infinitezimal L, pe care îl numim *mişcarea de bază* sau *mişcarea spaţială*; acesta caracterizează mişcarea particulelor între momentele de ramificare.

Fixăm o măsură $\mathcal{U}$-excesivă m pe E, unde am notat cu $\mathcal{U}$ rezolvanta de nuclee asociată lui X.

"Omorârea" particulelor este determinată de o măsură de perturbare netedă μ pe E. Din corespondenţa Revuz (vezi, de exemplu, [4], [17]), procesul omorât este obţinut din X ca proces subordonat prin funcţionala multiplicativă $(e^{-A_t})_{t\geqslant 0}$, unde $A = (A_t)_{t\geqslant 0}$

este o funcţională aditivă continuă a lui X, având măsura Revuz μ (în raport cu măsura m). Definim semigrupul de nuclee submarkoviene $(T_t^\mu)_{t\geqslant 0}$ prin formula Feynman-Kac

$$T_t^\mu f(x) := \mathbb{E}^x(e^{-A_t} f(X_t)) \text{ pentru orice } f \in \mathcal{B}_+(E).$$

Se arată că $(T_t^\mu)_{t\geqslant 0}$ induce un C_0-semigrup pe $L^p(E,m)$, al cărui L^p-generator poate fi identificat cu $L-\mu$, folosind corespondenţa Revuz, într-un sens L^p-slab ca în [9].

În sfârşit, "naşterea" noilor particule este dată de un şir de nuclee markoviene B_k de la $E^{(k)}$ (puterea k simetrică a lui E) la E, pentru fiecare $k \geqslant 1$, $B_k : \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E^{(k)}) \longrightarrow \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$, şi un şir $(b_k)_{k\geqslant 1}$ de funcţii boreliene pozitive pe E astfel încât $\sum_{k\geqslant 1} b_k \leqslant 1$. Interpretarea este următoarea: pentru fiecare $k \geqslant 1$, $b_k(x)$ reprezintă probabilitatea ca o particulă care dispare în punctul $x \in E$ să aibă exact k descendenţi; $B_{k,x}$ (probabilitatea pe $E^{(k)}$ indusă de nucleul markovian B_k în x) este distribuţia celor k descendenţi în $E^{(k)}$.

Putem formula acum un prim scop, acela de a studia procesul de ramificare pe $\widehat{E}$, având generatorul pe E de forma

$$\mathcal{L}u \;=\; Lu - \mu u + \mu(\sum_{k\geqslant 1} b_k B_k \widehat{u}).$$

Un alt obiectiv principal este studiul ecuaţiei parabolice asociate acestui operator neliniar şi obţinerea unei reprezentări probabiliste pentru soluţiile sale.

Cazul în care

$$\mathcal{L}u \;=\; Lu - \mu u + \mu(\sum_{k\geqslant 1} b_k u^k)$$

a fost considerat de E.B. Dynkin în [14] şi corespunde situaţiei particulare când $B_{k,x} = \delta_{\mathbf{x}}$ pentru orice $x \in E$ şi $k \geqslant 1$, unde $\mathbf{x} := (x, \ldots, x) \in E^{(k)}$, deci, descendenţii pornesc din locul unde a dispărut particula-părinte. Procesul de ramificare care rezultă se numeşte *proces cu ramificare locală*. În contrast, nu vom avea această restricţie, descendenţii nu trebuie sa pornească din locul unde particula-părinte a dispărut. Ca atare, procesul de ramificare se numeşte *proces cu ramificare nelocală*.

În cazul particular în care A are densitate în raport cu măsura Lebesgue, adică $A_t = \int_0^t c(X_s)\mathrm{d}s$, $t \geqslant 0$, atunci generatorul devine

$$\mathcal{L}u \;=\; Lu - cu + c\sum_{k\geqslant 1} b_k B_k \widehat{u}$$

şi procesul de ramificare asociat a fost construit în [6].

2.1. Procese de ramificare cu valori măsuri

În prima sectiune a acestui capitol introducem noţiunile preliminare legate de procesele de ramificare cu valori măsuri.

Fie E un spaţiu topologic Lusin. Notăm cu $M(E)$ mulţimea tuturor măsurilor pozitive finite pe E. Înzestrăm $M(E)$ cu topologia slabă şi notăm cu $\mathcal{M}(E)$ σ-algebra boreliană pe $M(E)$.

Un al doilea spaţiu de măsuri pe care îl vom considera este mulţimea $\widehat{E} \subseteq M(E)$ a tuturor sumelor finite de măsuri Dirac pe E,

$$\widehat{E} := \left\{ \sum_{i \leqslant i_0} \delta_{x_i} : i_0 \in \mathbb{N}, i_0 \geqslant 1, x_i \in E \text{ pentru orice } 1 \leqslant i \leqslant i_0 \right\} \cup \{\mathbf{0}\},$$

unde $\mathbf{0}$ este măsura nulă pe E. Mulţimea $\widehat{E}$ se identifică cu reuniunea tuturor puterilor simetrice $E^{(k)}$ ale lui E,

$$\widehat{E} = \bigcup_{k \geqslant 0} E^{(k)},$$

unde, prin convenţie, $E^{(0)} := \{\mathbf{0}\}$ (vezi, de exemplu, [18]). Mulţimea $\widehat{E}$ se numeşte *spaţiul configuraţiilor finite ale lui* E şi este înzestrată cu topologia slabă pe măsurile finite pe E şi σ-algebra boreliană corespunzătoare $\mathcal{B}(\widehat{E})$.

În cele ce urmează, $(M, \mathcal{M})$ va desemna $(M(E), \mathcal{M}(E))$ sau $(\widehat{E}, \mathcal{B}(\widehat{E}))$.

Un proces Markov drept se numeşte *proces de ramificare* dacă pentru orice două copii independente ale sale pe M, X şi X', care pornesc din măsurile μ şi μ', $X + X'$ şi procesul care porneşte din $\mu + \mu'$ sunt egale în distribuţie.

Un nucleu mărginit Q pe $(M, \mathcal{M})$ se numeşte *nucleu de ramificare* dacă

$$Q_{\mu+\nu} = Q_\mu * Q_\nu \text{ pentru orice } \mu, \nu \in M,$$

unde reamintim că Q_μ desemnează măsura pe M astfel încât $\int_M h \mathrm{d}Q_\mu = Qh(\mu)$ pentru orice $h \in \mathcal{M}_+$.

Se arată că: *un proces Markov drept cu spaţiul stărilor M este un proces de ramificare dacă şi numai dacă funcţia sa de tranziţie este formată din nuclee de ramificare.*

Pentru o funcţie $f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$ considerăm aplicaţiile $l_f : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ (funcţionala liniară) şi $e_f : M \longrightarrow [0,1]$ (funcţionala exponenţială), definite prin

$$l_f(\mu) := \langle \mu, f \rangle := \int_E f \mathrm{d}\mu, \ \mu \in M, \quad e_f := e^{-l_f}.$$

Pentru orice funcţie cu valori reale, pozitivă, $\mathcal{B}(E)$-măsurabilă φ definim *funcţia multiplicativă* $\widehat{\varphi} : \widehat{E} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ prin

$$\widehat{\varphi}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \prod_k \varphi(x_k), & \text{dacă } \mathbf{x} = (x_k)_{k \geqslant 1} \in \widehat{E}, \mathbf{x} \neq \mathbf{0}, \\ 1, & \text{dacă } \mathbf{x} = \mathbf{0}, \end{cases}$$

cf. [20]; vezi, de asemenea, [8].

2.2. Funcţionale aditive continue admisibile

Conform [19], pagina 33, ipoteza noastră de lucru este că funcţionala aditivă continuă (pe care o vom abrevia CAF) $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$ este *admisibilă*, adică,

$$\lim_{t \searrow 0} \sup_{x \in E} \mathbb{E}^x(A_t) = 0.$$

Considerăm şi următoarea proprietate pentru $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$:

$$e^{-\alpha t} \mathbb{E}^x e^{-A_t} + \beta \, \mathbb{E}^x \int_0^t e^{-(A_u + \alpha u)} \mathrm{d}A_u \leqslant 1 \ \text{ pentru orice } t, x, \tag{2.1}$$

cu $\alpha \geqslant 0$ şi $\beta > 0$.

Lema 2.1. *([7]) Presupunem că există un şir $A^n = (A^n_t)_{t \geqslant 0}$, $n \geqslant 1$, de funcţionale aditive continue astfel încât fiecare A^n satisface* (2.1) *cu constantele α_n şi β_n. Presupunem, de asemenea, că A^n_t converge a.s. la A_t pentru fiecare $t > 0$, $\lim_{n \to \infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{R}$ şi $\lim_{n \to \infty} \beta_n = \beta \in \mathbb{R}_+$, $\beta \neq 0$. Atunci A satisface* (2.1) *cu constantele α şi β.*

Lema 2.2. *([7]) Au loc următoarele afirmaţii.*

(i) Pentru un CAF arbitrar, $A = (A_t)_{t \geqslant 0}$, (2.1) *este satisfăcută pentru orice $\beta \leqslant 1$ şi $\alpha \geqslant 0$.*

(ii) Dacă funcţionala aditivă continuă A este admisibilă atunci pentru orice $\beta > 0$ există $\alpha > 0$ astfel încât (2.1) *are loc.*

(iii) Dacă A are densitatea $c \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$ în raport cu măsura Lebesgue, adică, pentru orice $t > 0$ avem $A_t = \int_0^t c(X_s) \mathrm{d}s$, atunci A este admisibilă. În plus, $(A_t)_{t \geqslant 0}$ satisface (2.1) *pentru orice α şi β astfel încât $\alpha \geqslant \|c\|_\infty (\beta - 1)$.*

2.3. Ecuaţia integrală de evoluţie

În a treia secţiune construim o ecuaţie integrală neliniară de evoluţie care implică procesul de bază X şi funcţionala aditivă continuă A. Un caz particular al acestei ecuaţii ne conduce către soluţiile mild ale ecuaţiei parabolice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H_t\varphi = \mathcal{L} H_t\varphi,\ t \geqslant 0, \tag{2.2}$$

cu condiţia iniţială $H_0\varphi = \varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, unde reamintim că $\mathcal{L}$ este operatorul neliniar pe E, $\mathcal{L}u = Lu - \mu u + \mu(\sum_{k\geqslant 1} b_k B_k \widehat{u})$.

Perechea de şiruri $((B_k)_{k\geqslant 1}, (b_k)_{k\geqslant 1})$ induce un nucleu submarkovian B de la $\widehat{E}$ la E,

$$Bg := \sum_{k\geqslant 1} b_k B_k(g|_{E^{(k)}}) \text{ pentru orice } g \in \mathcal{B}_+(\widehat{E}).$$

Pentru simplitate, vom scrie $B_k g$ în loc de $B_k(g|_{E^{(k)}})$ şi cu această convenţie avem

$$B = \sum_{k\geqslant 1} b_k B_k.$$

Considerăm $m_1 := \|\sum_{k\geqslant 1} k b_k\|_\infty$ şi presupunem că $m_1 < \infty$. Notăm cu $\mathcal{B}_{\mathsf{u}}$ mulţimea tuturor $\varphi \in \mathcal{B}_+(E)$ astfel încât $\varphi \leqslant 1$.

O aplicaţie $H : \mathcal{B}_{\mathsf{u}} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathsf{u}}$ se numeşte *absolut monotonă* dacă există un nucleu submarkovian $\mathbf{H} : b\mathcal{B}_+(\widehat{E}) \longrightarrow b\mathcal{B}_+(E)$ astfel încât $H\varphi = \mathbf{H}\widehat{\varphi}$ pentru orice $\varphi \in \mathcal{B}_{\mathsf{u}}$.

Teorema 2.3. *([7]) Fie $\alpha \geqslant 0$ şi $\beta > 0$ astfel încât (2.1) are loc. Atunci, pentru orice $\varphi \in \mathcal{B}_{\mathsf{u}}$, ecuaţia de evoluţie*

$$h_t(x) = e^{-\alpha t}\mathbb{E}^x(e^{-A_t}\varphi(X_t)) + \beta\mathbb{E}^x \int_0^t e^{-A_u - \alpha u} B\widehat{h_{t-u}}(X_u)\mathrm{d}A_u, \tag{2.3}$$

are o unică soluţie local mărginită $[0,\infty)\times E \ni (t,x) \longmapsto H_t\varphi(x)$ astfel încât $H_t\varphi \in \mathcal{B}_{\mathsf{u}}$ şi au loc următoarele afirmaţii.

(i) Aplicaţia $\varphi \longmapsto H_t\varphi$ este un operator absolut monoton şi există o funcţie pozitivă crescătoare $t \longmapsto C(t)$ astfel încât

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \|H_s(\varphi) - H_s(\psi)\|_\infty \leqslant C(t)\|\varphi - \psi\|_\infty \ \text{ pentru orice } \ \varphi, \psi \in \mathcal{B}_{\mathsf{u}}.$$

În particular, pentru orice $t \geqslant 0$, aplicaţia $\varphi \longmapsto H_t\varphi$ este Lipschitz.

(ii) Familia $(H_t)_{t\geqslant 0}$ *este un semigrup submarkovian de operatori neliniari pe* $\mathcal{B}_{\mathsf{u}}$*. Mai mult, dacă* $\sum_{k\geqslant 1} b_k = 1$ *şi* α*,* β *satisfac* (2.1) *cu egalitate, atunci* $H_t 1 = 1$ *pentru orice* $t \geqslant 0$*.*

(iii) Dacă funcţia $t \longmapsto \mathbb{E}^x(e^{-A_t}\varphi(X_t))$ *este continuă la dreapta pentru orice* $x \in E$*, atunci* $t \longmapsto H_t\varphi(x)$ *este de asemenea continuă la dreapta pe* $[0,\infty)$*.*

(iv) Dacă $T_t\varphi$ *converge la* φ *(adică* $\mathbb{E}^{\cdot}\varphi(X_t) \longrightarrow \varphi$ *) uniform când* $t \searrow 0$*, atunci* $H_t\varphi$ *converge de asemenea uniform la* φ *când* $t \searrow 0$*.*

În plus, este necesară următoarea lemă, adaptată din monografia [19], Propoziţia 2.12, care conduce la un instrument principal în demonstraţia Teoremei 2.3, ca un substitut pentru lema lui Gronwall şi pentru demonstrarea proprietăţii de semigrup de la punctul (ii).

Lema 2.4. *([7]) Fie* $r > 0$ *şi* $\varphi \in \mathcal{B}_{\mathsf{u}}$*. Atunci funcţia* $(t,x) \longmapsto h_t(x)$ *este o soluţie pentru* (2.3) *pentru orice* $t \geqslant 0$ *dacă şi numai dacă verifică ecuaţia* (2.3) *pentru* $0 \leqslant t \leqslant r$ *şi* $(t,x) \longmapsto h_{t+r}(x)$ *este soluţie a ecuaţiei*

$$h_{t+r}(x) \;=\; e^{-\alpha t}\mathbb{E}^x(e^{-A_t}h_r(X_t)) \;+\; \beta\mathbb{E}^x\int_0^t e^{-A_u-\alpha u}B\widehat{h_{t+r-u}}(X_u)\mathrm{d}A_u,\; t \geqslant 0. \quad (2.4)$$

De acum înainte vom nota cu $(H_t)_{t\geqslant 0}$ *semigrupul neliniar dat de ecuaţia (2.3) când* $\alpha = 0$ *şi* $\beta = 1$*.*

Corolarul 2.5. *([7]) Pentru* $t \geqslant 0$ *considerăm nucleul de ramificare* $\widehat{\mathbf{H}}_t$ *pe* $\widehat{E}$ *astfel încât* $H_t\varphi = \widehat{\mathbf{H}}_t\widehat{\varphi}|_E$ *pentru orice* $\varphi \in \mathcal{B}_{\mathsf{u}}$*. Au loc următoarele afirmaţii.*

(i) $(\widehat{\mathbf{H}}_t)_{t\geqslant 0}$ *este un semigrup submarkovian de nuclee de ramificare pe* $(\widehat{E}, \mathcal{B}(\widehat{E}))$*.*

(ii) Pentru orice $t \geqslant 0$ *şi* $f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$ *definim* $V_t f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$ *prin* $V_t f := -\ln H_t(e^{-f})$*. Atunci* $(V_t)_{t\geqslant 0}$ *este un semigrup neliniar pe* $\mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$ *(numit* semigrupul cumulant*) şi*

$$\widehat{\mathbf{H}}_t\widehat{\varphi} = \widehat{e^{-V_t f}},$$

unde $\varphi := e^{-f}$*.*

2.4. Construcţia procesului auxiliar

În a patra şi ultima secţiune a acestui capitol construim un proces Markov drept auxiliar pe E, pornind de la o versiune liniarizată a ecuaţiei integrale de evoluţie din secţiunea precedentă.

Teorema 2.6. *([7]) Fie $\alpha \geqslant 0$ şi $\beta > 0$ astfel încât* (2.1) *are loc şi K un nucleu submarkovian pe E. Atunci, pentru orice $f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$, ecuaţia liniară de evoluţie*

$$r_t(x) = e^{-\alpha t} T_t^\mu f(x) + \beta \mathbb{E}^x \int_0^t e^{-A_u - \alpha u} K r_{t-u}(X_u) \mathrm{d}A_u, \ t \geqslant 0, \tag{2.5}$$

are o unică soluţie $Q_t f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$, funcţia $[0,\infty) \times E \ni (t,x) \longmapsto Q_t f(x)$ este măsurabilă, şi au loc următoarele afirmaţii.

(i) Familia $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ este un semigrup de nuclee submarkoviene pe $(E, \mathcal{B}(E))$ şi este funcţia de tranziţie a unui proces Borel drept cu spaţiul stărilor E.

(ii) Funcţia $t \longmapsto Q_t f(x)$ este continuă la dreapta pe $[0,\infty)$ pentru orice $x \in E$ dacă şi numai dacă funcţia de tranziţie $t \longmapsto T_t^\mu f(x)$ are aceeaşi proprietate.

(iii) Rezolvanta de nuclee $\mathcal{U}^o = (U_q^o)_{q>0}$ pe $(E, \mathcal{B}(E))$ indusă de $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ satisface

$$U_q^o \ = \ U_{\alpha+q}^\mu + J_q K U_q^o \ = \ U_{\alpha+q}^\mu + G_q U_{\alpha+q}^\mu,$$

unde $\mathcal{U}^\mu = (U_q^\mu)_{q>0}$ este rezolvanta de nuclee indusă de $(T_t^\mu)_{t \geqslant 0}$ şi J_q, G_q sunt nucleele mărginite pe E definite prin

$$J_q f(x) := \beta \mathbb{E}^x \int_0^\infty e^{-A_u - \alpha u} e^{-qu} f(X_u) \mathrm{d}A_u \ \text{ şi } \ G_q := \sum_{k=0}^\infty (J_q K)^k.$$

În plus, avem că $\mathcal{E}(\mathcal{U}_q^o) \subset \mathcal{E}(\mathcal{U}_{\alpha+q}^\mu)$, $G_q(\mathcal{E}(\mathcal{U}_{\alpha+q}^\mu)) \subset \mathcal{E}(\mathcal{U}_q^o)$ şi $[\mathrm{b}\mathcal{E}(\mathcal{U}_q^o)] = [\mathrm{b}\mathcal{E}(\mathcal{U}_q^\mu)]$.

Propoziţia 2.7. *([7]) Există un nucleu submarkovian K pe $(E, \mathcal{B}(E))$ şi un semigrup $(Q_t)_{t \geqslant 0}$ care rezolvă ecuaţia (2.5) astfel încât*

$$e^{-\alpha t} \widehat{\mathbf{H}}_t(l_f) = l_{Q_t f} \ \text{ pentru orice } f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E) \text{ şi } t > 0,$$

unde $\alpha \geqslant 0$ este astfel încât (2.1) este satisfăcută pentru $\beta = m_1$.

3. CONSTRUCŢIA PROCESELOR CU RAMIFICARE NELOCALĂ

3.1. Rezultatul principal de existenţă

În prima secţiune a acestui capitol, demonstrăm un rezultat de existenţă pentru un proces de ramificare suficient de regulat, având $(\widehat{\mathbf{H}}_t)_{t \geqslant 0}$ ca funcţie de tranziţie.

Din teorema lui Kolmogorov, o funcţie de tranziţie împreună cu o distribuţie iniţială determină în mod unic un proces Markov. Totuşi, pentru diferite aplicaţii, simpla existenţă a unui proces Markov nu este suficientă şi suntem interesaţi de proprietăţi suplimentare de regularitate a traiectoriilor procesului.

Demonstraţia urmează abordarea Secţiunii 4 din [6], o metodă dezvoltată în [10] (vezi, de asemenea, [5], Anexa A) pentru demonstrarea existenţei unui proces Markov drept în context infinit dimensional, pornind de la o rezolvantă de nuclee sau de la o funcţie de tranziţie, în cazul nostru $(\widehat{\mathbf{H}}_t)_{t\geqslant 0}$ pe $\widehat{E}$.

Fie $\mathcal{A} = \overline{[\mathrm{b}\mathcal{E}(\mathcal{U}_q^\mu)]}$, unde închiderea este în norma uniformă. Avem nevoie de următoarea ipoteză suplimentară, care este o condiţie similară cu cea folosită în [6]:
$(*)$ Există o submulţime numărabilă $\mathcal{F}_o$ a lui $\mathrm{b}\mathcal{E}(\mathcal{U}_q^o)$ care este aditivă, $0 \in \mathcal{F}_o$, şi separă măsurile finite pe E şi o latice vectorială separabilă $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ astfel încât $\{e^{-u} : u \in \mathcal{F}_o\} \subseteq \mathcal{C}$ şi $V_t(\mathcal{F}_o) \subseteq \overline{\mathcal{C}}$, unde V_t este semigrupul cumulant (neliniar) introdus în Corolarul 2.5.

Teorema 3.1. *([7]) Dacă procesul de bază X este standard şi condiţia $(*)$ are loc, atunci există un proces de ramificare càdlàg cu spaţiul stărilor $\widehat{E}$ care are $(\widehat{\mathbf{H}}_t)_{t\geqslant 0}$ din Corolarul 2.5 ca funcţie de tranziţie. Dacă în plus, $B1 = 1$, atunci acest proces este standard.*

3.2. Reprezentarea probabilistă a soluţiilor ecuaţiei neliniare

Corolarul 3.2. *([7]) Fie $\widehat{X}$ procesul de ramificare cu spaţiul stărilor $\widehat{E}$ şi funcţia de tranziţie $(\widehat{\mathbf{H}}_t)_{t\geqslant 0}$, dat de Teorema 3.1. Au loc următoarele afirmaţii.*

(i) Dacă $\varphi \in \mathcal{B}_+(E)$, $\varphi \leqslant 1$, atunci soluţia $(H_t\varphi)_{t\geqslant 0}$ a ecuaţiei (2.2) are reprezentarea

$$H_t\varphi(x) = \widehat{\mathbb{E}}^{\delta_x}\widehat{\varphi}(\widehat{X}_t),\ x \in E,\ t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

(ii) Fie $X' = (X'_t)_{t\geqslant 0}$ procesul drept cu spaţiul stărilor E şi funcţia de tranziţie $(Q_t)_{t\geqslant 0}$, dat de Teorema 2.6 şi Propoziţia 2.7. Fie λ o măsură σ-finită şi h o funcţie Borel, pozitivă şi mărginită, pe E. Atunci pentru orice $t \geqslant 0$

$$e^{-\alpha t}\widehat{\mathbb{E}}^\lambda\langle h, \widehat{X}_t\rangle = \mathbb{E}^\lambda h(X'_t), \tag{3.2}$$

unde $\mathbb{E}^\lambda := \int_E \mathbb{E}^x \lambda(\mathrm{d}x)$ şi în membrul stâng λ este privită ca o măsură pe $\widehat{E} \supset E$; dacă $\mu \in \widehat{E}$ atunci $\langle h, \mu\rangle := \int h\mathrm{d}\mu$.

3.3. Aplicaţie. Mişcarea browniană reflectată ca mişcare spaţială

În ultima secţiune a acestui capitol aplicăm rezultatele obţinute luând mişcarea browniană reflectată pe închiderea unui domeniu euclidian mărginit neted pe post de mişcare spaţială şi rata de omorâre dată de timpul local pe frontieră.

Corolarul 3.3. *([7]) Considerăm problema Neumann pe un domeniu euclidian mărginit neted D şi fie σ măsura de suprafaţă pe frontiera ∂D a lui D. Atunci soluţia ecuaţiei neliniare de evoluţie pe $\overline{D}$,*

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} H_t\varphi = \Delta H_t\varphi - \sigma H_t\varphi + \sigma(\sum_{k\geqslant 1} b_k B_k \widehat{H_t\varphi}),\ t \geqslant 0, \\ H_0\varphi = \varphi, \end{cases}$$

are reprezentarea probabilistă (3.1),

$$H_t\varphi(x) = \widehat{\mathbb{E}}^{\delta_x} \widehat{\varphi}(\widehat{X}_t),\ \ x \in E,\ \ t \geqslant 0,$$

unde $\widehat{X}$ este procesul de ramificare pe mulţimea tuturor configuraţiilor finite pe închiderea lui D, având mişcarea browniană reflectată X pe $\overline{D}$ ca mişcare de bază şi măsura de perturbare σ. În plus, formula (3.2) *are loc.*

În acest fel, enunţul Teoremei 4.4 din [1] are loc pentru orice procedură de ramificare dată de un şir de nuclee markoviene $(B_k)_{k\geqslant 1}$ (reamintim că B_k determină distribuţia celor k descendenţi), deci putem avea ramificare nelocală, altfel zis descendenţii nu sunt forţaţi sa pornească din locul unde a dispărut particula-părinte. Teorema 4.4 este un rezultat principal folosit în [1] pentru a reprezenta vorticitatea ecuaţiei Navier-Stokes 2d într-un domeniu planar mărginit printr-un model stocastic.

4. PROCESE DE RAMIFICARE DETERMINATE DE FLOW-URI CONTINUE

În acest capitol punem în evidenţă o clasă de procese de ramificare care sunt determinate de un flow continuu la dreapta Φ pe E, în sensul că un astfel de proces de ramificare cu valori măsuri $\widehat{X}$ admite o reprezentare în termeni de un al doilea proces de ramificare $\widehat{X^0}$ şi flow-ul pe măsuri indus de Φ,

$$\widehat{X}_t = \Phi_t(\widehat{X^0_t}) \text{ pentru orice } t \geqslant 0.$$

Se arată că procesul $\widehat{X^0}$ are acelaşi mecanism de ramificare ca $\widehat{X}$, dar $\widehat{X^0}$ nu are mişcare spaţială şi va fi denumit *proces de pură ramificare*. Această reprezentare are loc în cazul unui superproces în care mecanismul de ramificare este independent de variabila spaţială.

Reamintim că un superproces $\widehat{X}$ furnizează o soluţie stocastică pentru ecuaţia neliniară de evoluţie scrisă formal ca

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_t = D v_t + \Psi(v_t),\ t \geqslant 0,$$

cu condiţia iniţială $v_0 = f$, unde D este generatorul mişcării spaţiale şi Ψ este mecanismul de ramificare. Ecuaţia neliniară de evoluţie asociată procesului de pură ramificare $\widehat{X^0}$ se obţine ca şi caz particular al ecuaţiei de mai sus în care nu există termen corespunzător mişcării spaţiale în membrul drept, adică $D \equiv 0$. De fapt, vom considera varianta integrală a ecuaţiei sau, echivalent, vom lucra cu *soluţiile mild* ale acesteia.

Ca o consecinţă a reprezentării de mai sus a lui $\widehat{X}$ în termenii procesului de pură ramificare $\widehat{X^0}$ (în particular, cu D generatorul flow-ului continuu la dreapta Φ pe E) obţinem o soluţie v_t, $t \geqslant 0$, a ecuaţiei neliniare de evoluţie care admite următoarele reprezentări probabiliste:

$$v_t(x) = -\ln \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_x} e_{f\circ\Phi_t}(\widehat{X^0_t}) = -\ln \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_{\Phi_t(x)}} e_f(\widehat{X^0_t}),\ x \in E,\ t \geqslant 0.$$

În terminologia din [13], pagina 133, v_t se scrie ca "log-potenţialul lui $\widehat{X^0_t}$ şi Φ_t".

Dacă $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{L}^0$ sunt generatorii slabi extinşi ai superproceselor $\widehat{X}$, respectiv $\widehat{X^0}$ pe $M(E)$, atunci avem

$$\mathcal{L} = \widehat{D} + \mathcal{L}^0,$$

unde $\widehat{D}$ este generatorul flow-ului continuu pe $M(E)$ indus de Φ. În acest fel, reprezentarea pe care o stabilim poate fi interpretată ca o consecinţă a privirii lui $\mathcal{L}$ ca o modificare a lui $\mathcal{L}^0$ cu un operator de ordinul întâi $\widehat{D}$, care este un substitut pentru un operator de "drift" acţionând într-un cadru infinit dimensional. Aceasta este o exemplificare a unei strategii mai generale dezvoltate în [3].

Se arată că rezultate analoage au loc pentru procesele cu ramificare nelocală, în ipoteza că flow-ul şi distribuţiile de ramificare sunt compatibile.

Acest capitol se bazează pe rezultatele obţinute în [11].

4.1. Preliminarii despre procese de ramificare cu valori măsuri

În prima secţiune, reamintim construcţia generală a proceselor de ramificare, atât în cazul superproceselor, cât şi în cazul proceselor cu ramificare nelocală.

Superprocese. Fie $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ un proces Markov drept fixat cu spaţiul stărilor E şi timp de viaţă infinit. Fie $(T_t)_{t\geqslant 0}$ funcţia sa de tranziţie, $\mathcal{U}$ rezolvanta sa şi D generatorul său. Fixăm, de asemenea, un *mecanism de ramificare*, adică o funcţie $\Psi : E \times [0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ de forma

$$\Psi(x,\lambda) = -b(x)\lambda - c(x)\lambda^2 + \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda s} - \lambda s) N(x, \mathrm{d}s),$$

unde $c \geqslant 0$ şi b sunt funcţii $\mathcal{B}(E)$-măsurabile mărginite şi $N : \mathcal{B}_+((0,\infty)) \longrightarrow \mathcal{B}_+(E)$ este un nucleu astfel încât $N(u \wedge u^2) \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$. (X,Ψ)-*superprocesul* este construit după cum urmează, cf. [16], [19], şi [2].

Ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_t = D v_t + \Psi(v_t), \quad t \geqslant 0, \quad v_0 = f \tag{4.1}$$

are o unică soluţie mild, mai precis, pentru fiecare $f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$, ecuaţia integrală de evoluţie

$$v_t(x) = T_t f(x) + \int_0^t T_s(x, \Psi(\cdot, v_{t-s}))\mathrm{d}s, \quad t \geqslant 0, \quad x \in E, \tag{4.2}$$

are o unică soluţie măsurabilă $(t,x) \longmapsto V_t f(x)$ astfel încât $\sup_{0\leqslant s\leqslant t} ||V_s f||_\infty < \infty$ pentru orice $t > 0$ şi $[0,\infty) \ni t \longmapsto V_t f(x)$ este continuă la dreapta pentru orice $x \in E$, în ipoteza că $t \longmapsto T_t f(x)$ are această proprietate. Aplicaţiile $f \longmapsto V_t f$ formează un semigrup neliniar de operatori pe $\mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$.

Pentru fiecare $t \geqslant 0$ există un unic nucleu markovian $\widehat{T}_t$ pe $(M(E), \mathcal{M}(E))$ astfel încât

$$\widehat{T}_t(e_f) = e_{V_t f}, \quad f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E). \tag{4.3}$$

Deoarece familia $(V_t)_{t\geqslant 0}$ este un semigrup (neliniar) pe $\mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$, rezultă că $\widehat{\mathbb{T}} = (\widehat{T}_t)_{t\geqslant 0}$ este o funcţie de tranziţie pe $(M(E), \mathcal{M}(E))$. Conform Teoremei 4.9 din [2], sub o condiţie de regularitate de tip Feller, există un proces Borel drept $\widehat{X}$, cu spaţiul stărilor

$M(E)$, având funcţia de tranziţie $\widehat{\mathbb{T}}$, numit (X, Ψ)-*superproces*.

Procese cu ramificare nelocală. Lucrăm în contextul din [6]. Fie $X = (\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, X_t, \theta_t, \mathbb{P}^x)$ un proces Markov drept fixat cu spaţiul stărilor E şi funcţia de tranziţie $(T_t)_{t\geqslant 0}$. Ca în cazul superproceselor, presupunem că X are timp de viaţă infinit. Fie $(b_k)_{k\geqslant 1}$ un şir de funcţii din $b\mathcal{B}_+(E)$ astfel încât $\sum_{k\geqslant 1} b_k \leqslant 1$, fie $m_1 := \| \sum_{k\geqslant 1} k b_k \|_\infty$ şi presupunem că $1 < m_1 < \infty$.

Fixăm, de asemenea, o constantă c astfel încât $0 < c \leqslant \frac{m_1}{m_1 - 1}$. Pentru fiecare $k \geqslant 1$, fie B_k un nucleu markovian de la $E^{(k)}$ la E.

Dacă $\varphi \in \mathcal{B}_+(E)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, atunci conform Propoziţiei 4.1 din [6] (vezi, de asemenea, Teorema 2.3 din Capitolul 2), ecuaţia integrală de evoluţie

$$h_t = e^{-ct} T_t \varphi + c \int_0^t e^{-c(t-s)} T_{t-s} \sum_{k\geqslant 1} b_k B_k(h_s^{(k)}) \mathrm{d}s, \ t \geqslant 0, \tag{4.4}$$

are o unică soluţie $t \longmapsto H_t \varphi$, măsurabilă în $(t, x) \in \mathbb{R}_+ \times E$, astfel încât $0 \leqslant H_t \varphi \leqslant 1$. Pentru o funcţie $h \in b\mathcal{B}_+(E)$ am notat cu $h^{(k)}$, $k \geqslant 1$, funcţia pe $E^{(k)}$ definită prin $h^{(k)}(\mathbf{x}) := h(x_1) \cdots h(x_k)$ pentru orice $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in E^{(k)}$.

Ecuaţia integrală de evoluţie (4.4), asociată unui proces cu ramificare nelocală pe $\widehat{E}$, este formal echivalentă cu ecuaţia

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} h_t = (L - c) h_t + c \sum_{k\geqslant 1} b_k B_k(h_t^{(k)}), \ t \geqslant 0, \tag{4.5}$$

cu condiţia iniţială $h_0 = \varphi$, unde L este generatorul mişcării spaţiale X; vezi, de exemplu, Remarca 4.2 (ii) din [6].

Se arată că semigrupul neliniar $(H_t)_{t\geqslant 0}$ induce un semigrup de nuclee de ramificare $(\widehat{\mathbf{H}}_t)_{t\geqslant 0}$ pe $\widehat{E}$ astfel încât $\widehat{\mathbf{H}}_t \widehat{\varphi} = \widehat{H_t \varphi}$ pentru orice $\varphi \in b\mathcal{B}_+(E)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$. Conform Teoremei 4.10 din [6], sub ipoteze suplimentare, există un proces Markov drept de ramificare $\widehat{X}$ cu spaţiul stărilor $\widehat{E}$ (depinzând de mişcarea spaţială X, $(b_k)_{k\geqslant 1}$, şirul de nuclee $(B_k)_{k\geqslant 1}$ şi c) având funcţia de tranziţie $(\widehat{\mathbf{H}}_t)_{t\geqslant 0}$.

4.2. Un rezultat asupra rezolvării ecuaţiilor neliniare de evoluţie

În a doua secţiune, prezentăm un rezultat aplicabil pentru ambele spaţii de măsuri ($M(E)$ şi $\widehat{E}$).

Lema 4.1. *([11]) Fie $J : E \longrightarrow E$ o aplicaţie $\mathcal{B}(E)/\mathcal{B}(E)$-măsurabilă şi notăm cu $\mathcal{K}(J)$ mulţimea tuturor operatorilor $(W, \mathcal{D}(W))$ pe $\mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$, $W : \mathcal{D}(W) \longrightarrow \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$, astfel încât pentru orice $f \in \mathrm{b}\mathcal{D}_+(W)$ avem $f \circ J \in \mathcal{D}(W)$ şi $W(f \circ J) = Wf \circ J$. Convenţie: Dacă domeniul $\mathcal{D}(W)$ al lui W nu este indicat, înseamnă că $\mathcal{D}(W) = \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$.*

Au loc următoarele afirmaţii.

(i) Mulţimea $\mathcal{K}(J)$ are următoarele proprietăţi.

(p1) Dacă $(W, \mathcal{D}(W))$ este un operator pe $\mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$ astfel încât există un şir $(W_n)_n$ în $\mathcal{K}(J)$ cu $\mathcal{D}(W_n) = \mathcal{D}(W)$ pentru orice n, care converge punctual la W (adică $\lim_n W_n f(x) = Wf(x)$ pentru orice $f \in \mathcal{D}(W)$ şi $x \in E$), atunci W aparţine lui $\mathcal{K}(J)$;

(p2) Dacă $(W, \mathcal{D}(W))$ şi $(V, \mathcal{D}(V))$ sunt doi operatori pe $\mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$ astfel încât $W(\mathcal{D}(W)) \subset \mathcal{D}(V)$ şi $V, W \in \mathcal{K}(J)$, atunci $V \circ W \in \mathcal{K}(J)$;

(p3) Fie $(\mathbf{K}, \mathcal{D}(\mathbf{K}))$ un operator pe $\mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$ astfel încât $\mathbf{K} \in \mathcal{K}(J)$. Dacă $Wf = \int_0^t \mathbf{K}(W_s f)\nu(\mathrm{d}s)$, unde ν este o măsură finită pe $[0, t]$ şi $W_s \in \mathcal{K}(J)$, $\mathcal{D}(W_s) = \mathcal{D}(\mathbf{K})$, $W_s(\mathcal{D}(W_s)) \subset \mathcal{D}(\mathbf{K})$ pentru orice s, atunci şi W aparţine lui $\mathcal{K}(J)$.

(ii) Presupunem că $(\mathbf{K}, \mathcal{D}(\mathbf{K}))$ este Lipschitz în raport cu norma uniformă şi $\mathbf{K}(0) = 0$. Fie $a > 0, t_o > 0$ şi considerăm ecuaţia integrală

$$w_t = e^{-at} f + \int_0^t e^{-a(t-s)} \mathbf{K}(w_s) \mathrm{d}s, \ 0 \leqslant t \leqslant t_o, \tag{4.6}$$

unde $f \in \mathcal{D}(\mathbf{K})$.

$(ii.1)$ Ecuaţia (4.6) are o unică soluţie $[0, t_o] \ni t \longmapsto W_t f \in \mathcal{D}(\mathbf{K})$ astfel încât funcţia $(t, x) \longmapsto W_t f(x)$ este măsurabilă, dacă una dintre următoarele două condiţii are loc:

(I) $\mathcal{D}(\mathbf{K}) = \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$;

(II) $\mathcal{D}(\mathbf{K}) = \{f \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E) : f \leqslant 1\}$ şi $\mathbf{K}f \leqslant a$ pentru orice $f \in \mathcal{D}(\mathbf{K})$.

$(ii.2)$ Presupunem că $\mathbf{K}$ păstrează convergenţa punctuală, adică, dacă $(f_n)_n \subset \mathcal{D}(\mathbf{K})$ converge punctual la $f \in \mathcal{D}(\mathbf{K})$, atunci $\mathbf{K}(f_n) \longrightarrow \mathbf{K}(f)$ punctual pe E. Atunci funcţia $[0, t_o) \ni t \longmapsto W_t f(x)$ este diferenţiabilă pentru orice $x \in E$ şi $u_t := W_t f$ este unica soluţie a ecuaţiei neliniare de evoluţie

$$\frac{\mathrm{d}u_t}{\mathrm{d}t} = -au_t + \mathbf{K}(u_t), \ 0 \leqslant t < t_o, \tag{4.7}$$

cu condiţia iniţială $u_o = f$.

(iii) Dacă, în plus, presupunem că $\mathbf{K} \in \mathcal{K}(J)$, atunci $W_t \in \mathcal{K}(J)$ pentru orice $t \in [0, t_o]$.

4.3. Procese de pură ramificare

În a treia secţiune, studiem procesele de pură ramificare şi ecuaţiile lor de evoluţie neliniare, atât in contextul superproceselor cât şi al proceselor cu ramificare nelocală.

Superprocese de pură ramificare. Procesele de pură ramificare apar prin considerarea, în construcţia din Secţiunea 4.1, a proceselor de ramificare care nu au mişcare spaţială. Fie $X^0 = (X_t^0)_{t\geqslant 0}$ procesul Markov trivial pe E, pentru care $\mathbb{P}^x(X_t^0 = x) = 1$ pentru orice $t \geqslant 0$ şi $x \in E$. (X^0, Ψ)-superprocesul se numeşte de *pură ramificare*.

Corolarul 4.2. *([11]) Fie Ψ un mecanism de ramificare. Au loc următoarele afirmaţii.*

(i) Considerăm (X^0, Ψ)-superprocesul de pură ramificare, procesul Markov drept $\widehat{X^0} = (\widehat{X_t^0}, \widehat{\mathbb{P}^0}^{\mu})$ cu spaţiul stărilor $M(E)$, şi fie $u \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+(E)$. Fie

$$V_t^0 u(x) := -\ln \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_x} e_u(\widehat{X_t^0}),\ t \geqslant 0, x \in E,$$

atunci $w_t := V_t^0 u$, $t \geqslant 0$, rezolvă următoarea ecuaţie neliniară de evoluţie:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} w_t = \Psi(\cdot, w_t),\ t \geqslant 0, \tag{4.8}$$

cu condiţia iniţială $w_0 = u$.

(ii) Fie $(\mathcal{L}^0, \mathcal{D}(\mathcal{L}^0))$ generatorul slab extins al (X^0, Ψ)-superprocesului de pură ramificare pe $M(E)$. Fie $u \in \mathrm{b}\mathcal{B}_+^0$, atunci $F := e_u$ aparţine lui $\mathcal{D}(\mathcal{L}^0)$, $\mathcal{L}^0 F = -F \cdot l_{\Psi(\cdot,u)}$ şi, pentru $\mu \in M(E)$, avem

$$\mathcal{L}^0 F(\mu) = \int_E c(x) F''(\mu, x)\mu(\mathrm{d}x) - \int_E b(x) F'(\mu, x)\mu(\mathrm{d}x) + \tag{4.9}$$
$$\int_E \int_0^\infty [F(\mu + s\delta_x) - F(\mu) - sF'(\mu, x)] N(x, \mathrm{d}s)\mu(\mathrm{d}x).$$

Procese de pură ramificare nelocală. Similar cu cazul superproceselor, considerăm acum *procesul de pură ramificare nelocală $\widehat{X^0}$ pe $\widehat{E}$*, pentru care procesul de bază este procesul Markov trivial X^0. În acest caz, ecuaţia (4.4) devine

$$h_t = e^{-ct}\varphi + c\int_0^t e^{-c(t-s)} \sum_{k\geqslant 1} b_k B_k(h_s^{(k)})\mathrm{d}s,\ t \geqslant 0. \tag{4.10}$$

Fie $(H_t^0\varphi)_{t\geqslant 0}$ soluţia ecuaţiei (4.10), atunci funcţia de tranziţie a lui $\widehat{X^0}$ este $(\widehat{\mathbf{H}_t^0})_{t\geqslant 0}$.

Propoziţia 4.3. *Considerăm soluţia ecuaţiei (4.10) ca o familie de operatori $(H_t^0)_{t\geqslant 0}$,*

$H_t^0 : \mathcal{B}_{\mathsf{u}} \longrightarrow \mathcal{B}_{\mathsf{u}}$. *Atunci* $(H_t^0)_{t\geqslant 0}$ *este un* C_0*-semigrup (neliniar) pe* $\mathcal{B}_{\mathsf{u}}$*, privit ca o mulţime închisă a spaţiului Banach* $\mathrm{b}\mathcal{B}(E)$ *înzestrat cu norma uniformă.*

Propoziţia 4.4. *([11]) Fie* $M \in \mathcal{B}(E)$ *şi presupunem că*

$$b_k(x)B_{k,x}(\widehat{M} \cap E^{(k)}) = 0 \text{ pentru orice } k \geqslant 1 \text{ şi } x \in E \setminus M, \tag{4.11}$$

adică, măsura pe $E^{(k)}$ *indusă de nucleul* $b_k B_k$ *în* x *este suportată pe* $E^{(k)} \setminus \widehat{M}$*. Atunci* $\widehat{E} \setminus \widehat{M}$ *este o mulţime fin închisă absorbantă a lui* $\widehat{E}$ *în raport cu procesul de pură ramificare* $\widehat{X^0}$*. Restricţia procesului de pură ramificare* $\widehat{X^0}$ *la* $\widehat{M}$ *rămâne un proces de pură ramificare, este indus de procesul Markov trivial pe* M *şi de restricţiile lui* B_k*,* $k \geqslant 1$*, la* M*.*

4.4. Superprocese determinate de flow-uri continue

În a patra secţiune, tratăm superprocesele determinate de flow-uri continue la dreapta. Primul rezultat principal este Teorema 4.6. Este precedat de o descriere a generatorului slab extins al unui superproces (Propoziţia 4.5), care completează rezultatele din [15], [19], [16] şi [2]. Rezultate legate de ecuaţia neliniară de evoluţie asociată şi formula de tip log-potenţial sunt prezentate la punctul (*iii*) al Teoremei 4.6.

Fie $(L, \mathcal{D}(L))$ generatorul slab extins al mişcării spaţiale X pe E şi fie $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ generatorul slab extins al (X, Ψ)-superprocesului pe $M(E)$.

Fie $(\widehat{D}, \mathcal{D}(\widehat{D}))$ generatorul slab extins al flow-ului continuu la dreapta $\widehat{\Phi}$ pe $M(E)$ indus de procesul Markov drept X, $\widehat{\Phi}_t(\mu) := X_t(\mathbb{P}^\mu)$, $\mu \in M(E)$, adică, generatorul slab extins al funcţiei de tranziţie $\mathbb{Q}^0 = (Q_t^0)_{t\geqslant 0}$, $Q_t^0 F(\mu) := F(\mu \circ T_t)$ pentru orice $F \in \mathrm{b}\mathcal{M}_+(E)$, $\mu \in M(E)$ şi $t \geqslant 0$.

Propoziţia 4.5. *([11])* (*i*) *Fie* $u \in \mathrm{b}\mathcal{D}_o^c(L)$ *astfel încât* Lu *este o funcţie mărginită. Atunci* l_u *aparţine domeniului* $\mathcal{D}(\mathcal{L})$ *al generatorului slab extins* $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ *al lui* $\widehat{X}$ *şi*

$$\mathcal{L}(l_u) = l_{Lu-bu}.$$

(*ii*) *Fie* $n \geqslant 1$*,* $u_1, \ldots, u_n \in \mathrm{b}\mathcal{D}(L)$ *astfel încât toate* Lu_i *sunt funcţii mărginite şi* $\psi \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$*. Considerăm funcţia* F *pe* $M(E)$*, definită prin* $F(\mu) := \psi(\langle \mu, u_1 \rangle, \ldots, \langle \mu, u_n \rangle)$*,* $\mu \in M(E)$*. Atunci* F *aparţine lui* $\mathcal{D}(\widehat{D})$*,* $F'(\mu, \cdot) \in \mathcal{D}(L)$ *şi avem*

$$\widehat{D}F(\mu) := \int_E LF'(\mu, x)\mu(\mathrm{d}x) \quad \text{pentru orice } \mu \in M(E), \tag{4.12}$$

unde reamintim că derivata variaţională *a unei funcţii* $F : M(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ *este* $F'(\mu, x) := \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{1}{\varepsilon}(F(\mu + \varepsilon\delta_x) - F(\mu)),\ \ \mu \in M(E),\ x \in E.$

Teorema 4.6. *([11]) Considerăm un mecanism de ramificare* Ψ *care este independent de variabila spaţială, adică, cu* b *şi* c *funcţii constante şi* $N(x, \mathrm{d}s) = N(\mathrm{d}s)$ *pentru orice* $x \in E$*. Presupunem că mişcarea spaţială* $X = (X_t)_{t \geqslant 0}$ *este procesul determinist asociat flow-ului continuu la dreapta* $\Phi = (\Phi_t)_{t \geqslant 0}$ *pe* E *şi presupunem că aplicaţia* $[0, \infty) \times E \ni (t, x) \longmapsto \Phi_t(x)$ *este continuă.*

Fie $\widehat{X} = (\widehat{X}_t)_{t \geqslant 0}$*,* (X, Ψ)*-superprocesul indus de mişcarea spaţială* X *şi mecanismul de ramificare* Ψ *şi fie* $\widehat{X^0} = (\widehat{X^0_t})_{t \geqslant 0}$*,* (X^0, Ψ)*-superprocesul de pură ramificare. Au loc următoarele afirmaţii.*

(i) (X, Ψ)*-superprocesul* $\widehat{X} = (\widehat{X}_t, \widehat{\mathbb{P}}^\mu)$ *are următoarea reprezentare, în funcţie de procesul de pură ramificare* $\widehat{X^0} = (\widehat{X^0_t}, \widehat{\mathbb{P}^0}^\mu)$ *şi flow-ul continuu* Φ *pe* $M(E)$*,*

$$\widehat{X}_t = \Phi_t(\widehat{X^0_t}) \text{ pentru } t \geqslant 0, \tag{4.13}$$

unde egalitatea este în distribuţie şi avem, de asemenea

$$\widehat{\mathbb{P}}^\mu(\widehat{X}_t \in \Gamma) = \widehat{\mathbb{P}^0}^{\Phi_t(\mu)}(\widehat{X^0_t} \in \Gamma) \text{ pentru orice } \mu \in M(E) \text{ şi } \Gamma \in \mathcal{M}(E). \tag{4.14}$$

(ii) Fie $(D, \mathcal{D}(D))$ *(respectiv* $(\widehat{D}, \mathcal{D}(\widehat{D}))$*,* $(\mathcal{L}, \mathcal{D}(\mathcal{L}))$ *şi* $(\mathcal{L}^0, \mathcal{D}(\mathcal{L}^0))$*) generatorul slab extins al mişcării spaţiale* X *(respectiv al flow-ului* Φ *pe* $M(E)$*,* $\widehat{X}$ *şi* $\widehat{X^0}$*). Fie* $\mathcal{D}_o := U_\alpha V_\beta(\mathrm{b}C(M(E)))$*,* $\alpha, \beta > 0$*, unde* $(U_\alpha)_{\alpha > 0}$ *(respectiv* $(V_\alpha)_{\alpha > 0}$*) este rezolvanta lui* $\widehat{X^0}$ *(respectiv rezolvanta flow-ului* Φ *pe* $M(E)$*). Atunci* $\mathcal{D}_o \subset \mathcal{D}^c_o(\mathcal{L}) \cap \mathcal{D}_o(\widehat{D}) \cap \mathcal{D}(\mathcal{L}^0)$ *şi*

$$\mathcal{L} = \widehat{D} + \mathcal{L}^0 \text{ pe } \mathcal{D}_o.$$

(iii) Ecuaţia (4.1),

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} v_t = D v_t + \Psi(v_t),\ t \geqslant 0,\ \ v_0 = f,$$

are o soluţie mild v_t*,* $t \geqslant 0$*, dată de următoarea formulă de tip log-potenţial*

$$v_t(x) = -\ln \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_x} e_{f \circ \Phi_t}(\widehat{X^0_t}) = -\ln \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_{\Phi_t(x)}} e_f(\widehat{X^0_t}),\ \ x \in E,\ \ t \geqslant 0. \tag{4.15}$$

Mai precis, v_t *este soluţia ecuaţiei integrale neliniare de evoluţie* (4.2).

4.5. Procese cu ramificare nelocală determinate de flow-uri continue

Procesele cu ramificare nelocală pe spaţii de configuraţii, determinate de flow-uri continue la dreapta, sunt investigate în a cincea secţiune. Teorema 4.7 este al doilea rezultat principal al acestui capitol. Rezultate similare cu formula de tip log-potenţial, dar valide pe $\widehat{E}$, sunt colectate în această secţiune.

În contextul proceselor cu ramificare nelocală descrise în Secţiunea 4.1, presupunem că funcţiile $b_k \in b\mathcal{B}_+(E)$, $k \geqslant 1$, sunt constante. Fie c o constantă astfel încât $0 < c \leqslant \frac{m_1}{m_1 - 1}$ şi fie B_k un nucleu markovian de la $E^{(k)}$ la E, pentru fiecare $k \geqslant 1$.

Pentru fiecare $k \geqslant 1$, fie $(\mathbf{B}_k, \mathcal{D}(\mathbf{B}_k))$ operatorul pe $b\mathcal{B}_+(E)$ definit prin $\mathbf{B}_k\varphi := B_k(\varphi^{(k)})$, cu $\mathcal{D}(\mathbf{B}_k) := \{\varphi \in \mathcal{B}_+(E) : \varphi \leqslant 1\}$.

Teorema 4.7. *([11]) Fie $\widehat{X} = (\widehat{X}_t)_{t\geqslant 0}$ procesul cu ramificare nelocală pe $\widehat{E}$, depinzând de o mişcare spaţială dată de un flow continuu la dreapta $\Phi = (\Phi_t)_{t\geqslant 0}$ pe E, $(b_k)_{k\geqslant 1}$, şirul de nuclee $(B_k)_{k\geqslant 1}$ şi c. Presupunem că aplicaţia $[0,\infty) \times E \ni (t,x) \longmapsto \Phi_t(x)$ este continuă şi*

$$\mathbf{B}_k \in \mathcal{K}(\Phi_t) \text{ pentru } t \geqslant 0 \text{ şi } k \geqslant 1. \tag{4.16}$$

Atunci au loc următoarele afirmaţii.

(i) Procesul de ramificare $\widehat{X} = (\widehat{X_t}, \widehat{\mathbb{P}}^\mu)$ are reprezentarea (4.13) pe $\widehat{E}$, în funcţie de procesul de pură ramificare $\widehat{X^0} = (\widehat{X^0_t}, \widehat{\mathbb{P}^0}^\mu)$ şi de flow-ul continuu Φ. Mai mult, (4.14) are loc pentru orice $\mu \in \widehat{E}$ şi $\Gamma \in \mathcal{B}(\widehat{E})$.

(ii) Ecuaţia (4.5), cu L generatorul flow-ului continuu la dreapta Φ, are o unică soluţie mild, mai precis, unica soluţie h_t, $t \geqslant 0$, a ecuaţiei (4.4), dată de

$$h_t(x) = \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_x} \prod_{k=1}^{N(t)} \varphi(\Phi_t(x_t^k)) = \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_{\Phi_t(x)}} \prod_{k=1}^{N(t)} \varphi(x_t^k), \ x \in E, \tag{4.17}$$

cu notaţia $\widehat{X^0_t} = (x_t^1, \ldots, x_t^{N(t)}) \in E^{(N(t))}$, unde $N(t)$ este numărul de particule la momentul de timp t.

4.6. Aplicaţie. O ecuaţie neliniară de evoluţie pe măsuri

Ultima secţiune este o aplicaţie a rezultatelor obţinute în acest capitol şi constă în rezolvarea unei ecuaţii parabolice neliniare pe măsuri. Fie E un spaţiu topologic Lusin şi fie $(b_k)_{k\geqslant 1}$ un şir de numere pozitive astfel încât $\sum_{k\geqslant 1} b_k \leqslant 1$ şi $1 < \sum_{k\geqslant 1} k b_k < \infty$.

Fie $(L, \mathcal{D}(L))$ generatorul slab extins al unei mişcări spaţiale X pe E şi fie $\mathbb{T} = (T_t)_{t\geqslant 0}$ funcţia sa de tranziţie.

Considerăm următoarea ecuaţie neliniară de evoluţie pe măsuri

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t = LF_t' - cF_t + c\sum_{k\geqslant 1} b_k F_t^k \ \text{ pe } M(E),\ t \geqslant 0, \tag{4.18}$$

cu condiţia iniţială $F_0 = F$, unde $c > 0$ şi pentru o funcţie $F : M(\mathbb{R}^d) \longrightarrow [0,1]$ am notat cu F' derivata sa variaţională şi $LF'(\mu) := \int_E LF'(\mu, x)\mu(\mathrm{d}x)$.

Fie $\widehat{\Phi} = (\widehat{\Phi}_t)_{t\geqslant 0}$ flow-ul continuu la dreapta pe $M(E)$ indus de procesul Markov drept X.

În continuare, vom considera următoarea condiţie:

$$\text{aplicaţia } [0,\infty) \times M(E) \ni (t,\mu) \longmapsto \mu \circ T_t \in M(E) \text{ este continuă.} \tag{4.19}$$

Se arată că dacă E este local compact cu bază numărabilă şi X este Feller atunci (4.19) are loc.

Corolarul 4.8. *([11]) Dacă luăm $E = \mathbb{R}^d$, atunci ecuaţia*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_t = \Delta F_t' - cF_t + c\sum_{k\geqslant 1} b_k F_t^k \ \text{ pe } M(\mathbb{R}^d),\ t \geqslant 0, \tag{4.20}$$

are o soluţie mild F_t, $t \geqslant 0$, cu $F_0 = F \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^d)$, $F \leqslant 1$, unic determinată de procesul de pură ramificare $\widehat{Y^0}$ pe $\widehat{M(\mathbb{R}^d)}$, mişcarea browniană d-dimensională $(B_t)_{t\geqslant 0}$ şi constanta c,

$$F_t(\mu) = \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_\mu} \prod_{k=1}^{N(t)} F(B_t(\mathbb{P}^{y_t^k})) = \widehat{\mathbb{E}^0}^{\delta_{B_t(\mathbb{P}^\mu)}} \prod_{k=1}^{N(t)} F(y_t^k),\ \ \mu \in M(\mathbb{R}^d), \tag{4.21}$$

unde $\widehat{Y_t^0} = (y_t^1, \ldots, y_t^{N(t)})$ şi $N(t)$ este numărul de particule în $M(\mathbb{R}^d)$ la momentul de timp t.

Mai general, dacă ne întoarcem la cazul unui spaţiu de bază general E şi presupunem că (4.19) *are loc, atunci ecuaţia* (4.18) *are o soluţie mild unic determinată de procesul de pură ramificare $\widehat{Y^0}$ pe $\widehat{M(E)}$, mişcarea spaţială X şi constanta c, mai precis, pentru orice $F \in \mathcal{M}_+(E)$, $F \leqslant 1$, ecuaţia neliniară de evoluţie*

$$F_t = e^{-ct} F \circ \widehat{\Phi}_t + c\int_0^t e^{-c(t-s)} \sum_{k\geqslant 1} b_k F_s^k \mathrm{d}s \ \text{ pe } M(E),\ \ t \geqslant 0,$$

are o unică soluţie $t \longmapsto F_t$*, măsurabilă în* $(t,\mu) \in \mathbb{R}_+ \times M(E)$*, astfel încât* $0 \leqslant F_t \leqslant 1$ *şi* (4.21) *are loc cu* X_t *în locul lui* B_t *şi* $M(E)$ *în locul lui* $M(\mathbb{R}^d)$*.*

ANEXĂ

Prezentăm noţiunile suplimentare necesare parcurgerii tezei; descriem diferitele variante de generatori pentru procesele Markov; introducem funcţionalele multiplicative şi aditive, precum şi corespondenţa Revuz, un concept esenţial pentru Capitolele 2 şi 3; prezentăm noţiunile preliminare legate de flow-uri continue la dreapta, folosite în Capitolul 4.

BIBLIOGRAFIE

[1] S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois, Branching process associated with $2d$-Navier Stokes equation, *Rev. Mat. Iberoam.* **17** (2001), 331–373.

[2] L. Beznea, Potential-theoretical methods in the construction of measure-valued Markov branching processes, *J. Eur. Math. Soc.* **13** (2011), 685–707.

[3] L. Beznea, M. Bezzarga, I. Cîmpean, *Markovian flows driving a Markov process and multiplicative* L^p*-semigroups*, 2022 (preprint).

[4] L. Beznea, N. Boboc, Feynman-Kac formula for left continuous additive functionals and extended Kato class measures, *Potential Analysis* **30** (2009), 139–164.

[5] L. Beznea, I. Cîmpean, M. Röckner, A natural extension of Markov processes and applications to singular SDEs. *Ann. l'Institut Henri Poincaré, Probabilités et Statistiques* **56** (2020), 2480–2506.

[6] L. Beznea, O. Lupaşcu, Measure valued discrete Markov branching processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **368** (2016), 5153–5176.

[7] L. Beznea, O. Lupaşcu-Stamate, **C. I. Vrabie**, Stochastic solutions to evolution equations of non-local branching processes, *Nonlinear Analysis* **200** (2020), 112021. https://doi.org/10.1016/j.na.2020.112021

[8] L. Beznea, A.-G. Oprina, Nonlinear PDEs and measure-valued branching type processes, *J. Math. Anal. Appl.* **384** (2011), 16–32.

[9] L. Beznea, A.-G. Oprina, Bounded and L^p-weak solutions for nonlinear equations of measure-valued branching processes, *Nonlinear Analysis* **107** (2014), 34–46.

[10] L. Beznea, M. Röckner, From resolvents to càdlàg processes through compact excessive functions and applications to singular SDE on Hilbert spaces, *Bull. Sci. Math.* **135** (2011), 844–870.

[11] L. Beznea, **C. I. Vrabie**, Continuous flows driving branching processes and their nonlinear evolution equations, *Adv. in Nonlinear Anal.* **11** (2022), 921–936, https://doi.org/10.1515/anona-2021-0229.

[12] D. A. Dawson, L. G. Gorostiza, Z. H. Li, Nonlocal branching superprocesses and some related models, *Acta Appl. Math.* **74** (2002), 93–112.

[13] E. B. Dynkin, *Diffusions, Superdiffusions and Partial Differential Equations*, Amer. Math. Soc., Colloquium Publications, Vol. **50**, 2002.

[14] E. B. Dynkin, *Branching particle systems and superprocesses*, The Annals of Probability **19** (1991) 1157–1194.

[15] N. El Karoui, S. Roelly, Propriétés de martingales, explosion et représentation de Lévy-Khintchine d'une classe de processus de branchement à valeurs mesures, *Stoch. Process. Appl.* **38** (1991), 239–266.

[16] P.J. Fitzsimmons, Construction and regularity of measure-valued Markov branching processes, *Israel J. Math.* **64** (1988), 337–361.

[17] R. K. Getoor, Measure perturbations of Markovian semigroups, *Potential Analysis* **11** (1999), 101–133.

[18] N. Ikeda, M. Nagasawa, S. Watanabe, Branching Markov processes I, *Math. Kyoto Univ.* **8** (1968), 233–278.

[19] Z. H. Li, *Measure-Valued Branching Markov Processes*, Probability and its Applications, Springer, 2011.

[20] M.L. Silverstein, Markov processes with creation of particles, Z. Wahrsch. Verw. Gebiete **9** (1968), 235–257.