Școala de studii avansate a Academiei Române
Institutul de Matematică "Simion Stoilow"

REZUMATUL TEZEI DE DCOTORAT

Metode spectrale și algebrice în studiul varietăților diferențiabile

Conducător științific:
C.S.I. Dr. Sergiu Moroianu

Doctorand:
Rareș Stan

București, 2024

Rezumat

În această teză este dezvoltată o formulă de urmă Selberg pentru operatorul Dirac pe suprafețe hiperbolice complete de volum finit, din care se obțin mai multe rezultate. În primul rând, investigăm spectrul operatorului Dirac pe familii de suprafețe hiperbolice în care un set de geodezice simple și disjuncte se contractă la 0, în ipoteza că structura spin este netrivială de-a lungul fiecărei geodezice contractate. Obținem o versiune a teoremei lui Huber, o expansiune asimptotică non-standard a nucleului căldurii pentru timpi mici și o lege Weyl pentru valorile proprii ale operatorului Dirac *uniformă* în parametrul de degenerare. Primul rezultat principal este convergența funcției zeta Selberg asociată unei structuri spin netriviale.

În al doilea rând, ne concentrăm asupra comportamentului spectrului operatorului Dirac pe o suprafață hiperbolică *tipică* de volum finit. Lucrăm în spațiul de moduli al suprafețelor de gen g cu k cuspuri înzestrat cu măsura Weil-Petersson. În acest spațiu de moduli există o submulțime $\mathcal{A}_{g,k}$ pentru care $\mathbb{P}(\mathcal{A}_{g,k}) \to 1$ atunci când $g \to \infty$, astfel încât pentru fiecare suprafață din $\mathcal{A}_{g,k}$ echipată cu o structură spin netrivială, numărul rescalat al valorilor proprii ale operatorului Dirac între a și b este de ordinul $b - a$. Acest rezultat rafinează legea Weyl clasică deoarece marginea superioară nu depinde de suprafață.

Contents

1 Introducere
- 1.1 Suprafețe Riemann
- 1.2 Suprafețe hiperbolice și structuri spin
  - 1.2.1 Spectrul de lungimi
  - 1.2.2 Structuri spin
  - 1.2.3 Formula de urmă Selberg pentru operatorul Dirac
  - 1.2.4 Procesul de contracție
  - 1.2.5 Numărarea valorilor proprii pe suprafețe aleatoare

2 Introduction
- 2.1 Riemann surfaces
- 2.2 Hyperbolic surfaces and spin structures
  - 2.2.1 Length spectrum
  - 2.2.2 Spin structures
  - 2.2.3 Selberg trace formula for the Dirac operator
  - 2.2.4 Pinching process
  - 2.2.5 Counting eigenvalues on random surfaces

3 Trace formula for Dirac on degenerating surfaces
- 3.1 Abstract
- 3.2 Introduction
  - 3.2.1 Degenerating surfaces
  - 3.2.2 Trace formula for the Dirac operator
  - 3.2.3 Huber's Theorem for the Dirac operator
  - 3.2.4 Heat trace asymptotics and uniform Weyl law
  - 3.2.5 The convergence of the Selberg Zeta function
- 3.3 The Dirac operator
  - 3.3.1 The spinor bundle
  - 3.3.2 The Dirac operator
  - 3.3.3 Spin structures on hyperbolic surfaces
  - 3.3.4 Encoding the spin structure in a class function
  - 3.3.5 Non-trivial spin structures and discrete spectrum
  - 3.3.6 Explicit formulae for the Dirac operator

3.4 Bounding the number of geodesics on a hyperbolic surface
3.5 Trace formula on hyperbolic surfaces
3.5.1 Eigenspinors of Dirac on the hyperbolic plane
3.5.2 A pretrace formula
3.5.3 Proof of Theorem 3.13
3.5.4 The trace formula for a larger class of functions
3.6 The non-compact case as a limit of compact cases
3.7 Applications
3.7.1 Huber's Theorem for the Dirac operator
3.7.2 Heat trace asymptotics
3.7.3 Uniform Weyl law
3.7.4 Selberg Zeta function for non-compact surfaces
3.7.5 The convergence of the Selberg Zeta function under a pinching process

4 Spectral convergence of the Dirac operator
4.1 Abstract
4.2 Introduction
4.2.1 Setting and motivation
4.2.2 Spectral convergence of the Dirac operator
4.2.3 Upper bounds and pathological surfaces
4.2.4 Applications
4.2.5 Acknowledgements
4.3 Preliminaries
4.3.1 Spin structures and the Dirac operator
4.3.2 The spectrum of Dirac operators
4.3.3 Random hyperbolic surfaces
4.4 Plan of the proof and first estimates
4.4.1 The family of test functions
4.4.2 Plan of the proof
4.4.3 Asymptotic of the integral term
4.4.4 Bond of the cusps contribution
4.5 Bound of the kernel term
4.5.1 Kernel estimate
4.5.2 Bound on the number of hyperbolic elements
4.5.3 Thin-thick decomposition of the fundamental domain
4.5.4 Probabilistic kernel estimate
4.6 Estimates for the number of eigenvalues

Chapter 1

Introducere

În această teză este studiat spectrul operatorului Dirac pe suprafețe hiperbolice de volum finit. Pentru a realiza acest scop, este dezvoltată și folosită o formulă de urmă Selberg pentru operatorul Dirac, urmând ideea originală propusă de A. Selberg [44]. Există trei ingrediente principale necesare, ele vor fi prezentate în restul capitolului. În afară de introducere, această lucrare conține două părți. Fiecare reprezintă un articol ([46] și [36]) pe care autorul l-a elaborat special pentru studiile sale doctorale. Menționăm că varianta din această teză a celui de-al doilea articol este cea trimisă spre publicare. Restul introducerii este o scurtă introducere în geometria hiperbolică. Prezentăm definițiile și noțiunile necesare pentru a înțelege cele două părți ale tezei.

1.1 Suprafețe Riemann

O *suprafață Riemann* este un spațiu topologic Hausdorf, conex, înzestrat cu un atlas olomorf. Aceste suprafețe apar natural ca domenii de funcții olomorfe. Pe parcursul celei de-a doua părți a secolului al XIX-lea, mulți matematicieni renumiți s-au concentrat asupra demonstrării teoremei de uniformizare a suprafețelor Riemann. Teorema afirmă că orice suprafață Riemann simplu-conexă este biolomorfă fie cu planul complex $\mathbb{C}$, fie cu discul unitate $\mathbb{D}$, fie cu sfera Riemann $\hat{\mathbb{C}}$. Teorema este, fără îndoială, cel mai important rezultat în domeniul analizei funcțiilor de o variabilă complexă. În 1907, două demonstrații riguroase au apărut independent, datorită lui P. Koebe [24] și H. Poincaré [39]. Argumente moderne pot fi găsite în diverse cărți [15, 16, 22] precum și în articole scurte [3].

O consecință remarcabilă a acestei teoreme este construcția unei legături între analiza complexă și geometria hiperbolică. Considerăm o suprafață Riemann M și notăm $\tilde{M}$ acoperirea ei universală. Atunci $\tilde{M}$ este biolomorfă cu $\mathbb{C}$, $\mathbb{D}$ sau $\hat{\mathbb{C}}$. Mai mult, știm că $M = \Gamma \setminus \tilde{M}$, unde Γ este grupul fundamental al suprafeței noastre, iar acțiunea indusă este propriu discontinuă, fără puncte fixe.

i) Dacă $\tilde{M} \simeq \hat{\mathbb{C}}$, atunci:

$$\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}}) = \left\{ z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} : a,b,c,d \in \mathbb{C},\ ad-bc \neq 0 \right\}.$$

Grupul $\mathrm{Aut}(\hat{\mathbb{C}})$ mai este cunoscut și sub numele de grupul *transformărilor Möbius*. Deoarece fiecare aplicație $z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$ are cel puțin un punct fix, deducem că Γ poate fi doar grupul trivial. Prin urmare $M \simeq \hat{\mathbb{C}}$.

ii) Dacă $\tilde{M} \simeq \mathbb{C}$, atunci:

$$\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{ z \mapsto az+b : a,b \in \mathbb{C},\ a \neq 0 \}.$$

Aplicația $z \mapsto az+b$ nu are puncte fixe dacă și numai dacă $a = 1$. În plus, Γ este discret, așadar singurele opțiuni posibile sunt:

$$\Gamma = \{\mathrm{Id}\};$$
$$\Gamma = \{ z \mapsto z+nb : n \in \mathbb{Z}, \text{ pentru un } b \text{ fixat din } \mathbb{C} \};$$
$$\Gamma = \left\{ z \mapsto z+nb+mb' : n,m \in \mathbb{Z},, \text{ pentru anumiți } b,b' \in \mathbb{C} \text{ cu } \frac{b}{b'} \notin \mathbb{R} \right\}.$$

Prin factorizarea planului $\mathbb{C}$ prin intermediul celor trei grupuri obținem, pe rând, planul $\mathbb{C}$, un cilindru (care este biolomorf cu $\mathbb{C}^*$), sau o curbă eliptică.

În mod evident, toate celelalte suprafețe Riemann sunt acoperite de discul unitate $\mathbb{D}$. Acest disc poate fi echipat cu o metrică hiperbolică completă $g = \frac{4(dx^2+dy^2)}{(1-x^2-y^2)^2}$, devenind astfel binecunoscutul *disc Poincaré*. În plus, vom vedea că grupul $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ acționează prin izometrii. Prin urmare, dacă suprafața noastră inițială M este acoperită de $\mathbb{D}$, ea moștenește automat o metrică hiperbolică completă.

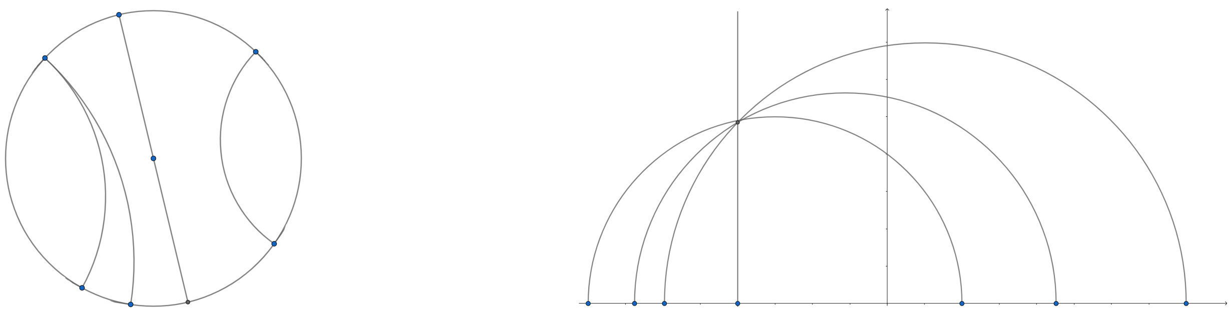
1.2 Suprafețe hiperbolice și structuri spin

În continuare ne restrângem la studiul suprafețelor hiperbolice complete de volum finit. Există două modele clasice ale planului hiperbolic: discul Poincaré menționat anterior și *semiplanul Poincaré*:

$$\mathbb{H} := \left(\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}, g = \frac{dx^2+dy^2}{y^2} \right).$$

Se poate observa ușor că aceste două modele sunt biolomorfe și izometrice, folosind funcția:

$$f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}; \qquad f(z) = \frac{z-i}{z+i},$$



(a) Discul Poincaré $\mathbb{D}$ (b) Semiplanul Poincaré $\mathbb{H}$

Figure 1.1: Geodezice în cele două modele ale geometriei hiperbolice

unde un punct $z = x + iy \in \mathbb{C}$ este identificat cu perechea $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Pe de o parte, geodezicele discului $\mathbb{D}$ sunt fie dreptele care trec prin 0 fie arce de cerc perpendiculare pe $\partial\mathbb{D}$ la ambele capete. Pe de altă parte, geodezicele semiplanului $\mathbb{H}$ sunt fie semidrepte verticale fie semicercuri centrate în puncte cu $y = 0$ (vezi Figura 1.1).

În continuare vom lucra cu semiplanul $\mathbb{H}$. Grupul său de automorfisme conține transformările Möbius care fixează semiplanul superior $y > 0$. Așadar:

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{H}) = \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ z \mapsto \frac{az + b}{cz + d} : a, b, c, d \in \mathbb{R},\ ad - bc > 0 \right\}.$$

Se poate verifica ușor că aceste aplicații sunt și izometrii pentru metrica de pe $\mathbb{H}$. Există trei exemple standard de elemente din acest grup:

i) Dilatare: $z \mapsto \lambda z$, pentru un $\lambda > 0$;

ii) Translație: $z \mapsto z + 1$;

iii) Rotație: $z \mapsto \frac{z\cos\theta + \sin\theta}{-z\sin\theta + \cos\theta}$, pentru un $\theta \in (0, 2\pi)$.

De fapt, o teoremă clasică ne spune că, până la o conjugare, fiecare element din $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$ diferit de indentitate este fie o dilatare (și se numește element *hiperbolic*), fie o translație (și se numește element *parabolic*), fie o rotație. Urma este invariantă la conjugare, așadar putem determina dacă un element este conjugat cu o dilatare, o translație sau o rotație verificând dacă valoarea absolută a urmei sale este mai mare decât 2, exact 2 sau mai mică decât 2, respectiv. Deoarece rotațiile au cel puțin un punct fix, grupul fundamental Γ al suprafeței noastre poate conține doar elemente hiperbolice și parabolice. Mai mult, dacă M este compactă, atunci Γ poate conține doar elemente hiperbolice.

1.2.1 Spectrul de lungimi

După cum am menționat anterior, dacă M este acoperită de $\mathbb{D}$, atunci ea are o metrică hiperbolică completă. Pentru această metrică, există un număr infinit de geodezice închise pe suprafața noastră. Într-adevăr, fiecare element hiperbolic fixează o geodezică δ în $\mathbb{H}$, deoarece este conjugat cu o dilatare. Proiecția lui δ pe M este o geodezică închisă. Observăm că există o corespondență bijectivă între clasele de conjugare hiperbolice din Γ și geodezicele închise orientate de pe M.

Spunem că un element $\gamma \in \Gamma$ este *primitiv* dacă nu poate fi scris ca $\gamma = \mu^n$, cu $n \geq 2$. În plus, spunem că o geodezică închisă η este *primitivă* dacă γ este primitiv, unde $[\gamma]$ este clasa de conjugare asociată cu η, prin corespondența bijectivă invocată mai sus.

Prin *spectrul de lungimi* înțelegem șirul lungimilor geodezicelor închise și orientate de pe M. Deoarece luăm în considerare geodezicele orientate, fiecare lungime apare de un număr par de ori. Aceast șir este primul ingredient important necesar pentru formula de urmă Selberg. Un obiect matematic foarte important legat de spectrul de lungimi este funcția zeta Selberg:

$$Z_\varepsilon(s, (M, g)) = \prod_{[\gamma]} \prod_{m=0}^{\infty} \left(1 - \varepsilon(\gamma) e^{-l(\gamma)(s+m)}\right),$$

unde ε este o funcție cu valori în ± 1 (care depinde de structura de spin) definită în secțiunea următoare, lungimile geodezicelor sunt luate în raport cu metrica hiperbolică g și produsul se ia după toate clasele de conjugare ale elementelor hiperbolice și primitive $\gamma \in \Gamma$.

1.2.2 Structuri spin

Să ne întoarcem, pentru moment, la grupul $\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Fiecare matrice inversabilă induce o izometrie pe $\mathbb{H}$ în felul următor:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \longrightarrow \left(z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}\right).$$

Observăm că o matrice A și λA pentru $\lambda \in \mathbb{R}^*$ vor induce aceeași izometrie, prin urmare:

$$\mathrm{PSL}_2(\mathbb{R}) \simeq \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})/\{\pm 1\},$$

unde $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ este grupul de matrice inversabile cu determinant 1. Așadar, avem o proiecție naturală $\pi : \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathrm{PSL}_2(\mathbb{R})$. Dacă notăm $\tilde{\Gamma}$ preimaginea lui Γ prin π, obținem șirul scurt exact:

$$1 \longrightarrow \{\pm 1\} \longrightarrow \tilde{\Gamma} \longrightarrow \Gamma \longrightarrow 1.$$

Mai multe detalii pot fi găsite în secțiunea 3.3, dar pentru moment, definim o structură spin ca un morfism $\chi : \tilde{\Gamma} \longrightarrow \{\pm 1\}$, pentru care $\iota \circ \chi = \mathrm{id}_{\{\pm 1\}}$, unde $\iota : \{\pm 1\} \longrightarrow \tilde{\Gamma}$ este incluziunea naturală.

Considerăm un element $\gamma \in \Gamma$ și notăm $\tilde{\gamma}$ preimaginea sa în $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ cu urmă pozitivă. Definim *funcția de clasă* ε prin relația $\varepsilon(\gamma) = \chi(\tilde{\gamma})$ (mai multe detalii în secțiunea 3.3.4). Observăm că ε este o funcție de clasă deoarece urma este invariantă la conjugare. Spunem că o structură spin este *netrivială* dacă $\varepsilon(\gamma) = -1$ pentru fiecare element parabolic $\gamma \in \Gamma$. Această funcție ε este al doilea ingredient important pentru formula de urmă.

Al treilea și ultimul ingredient este spectrul lui D, operatorul Dirac, un operator diferențial de ordin 1 pe un fibrat vectorial, construit folosind structura spin (vezi secțiunea 3.3.2). În $\mathbb{R}^n$, pătratul operatorului Dirac este exact laplacianul care acționează asupra spinorilor. În curbură arbitrară, formula Lichnerowicz ne spune că diferența dintre pătratul operatorului Dirac și laplacianul de conexiune este exact un sfert din curbura scalară. Din teoria operatorilor pseudodiferențiali, știm că pe suprafețele compacte spectrul operatorului Dirac este discret. Bär [6] a arătat că, sub anumite condiții tehnice asupra structurii spin, spectrul este discret și pe suprafețele hiperbolice de volum finite.

1.2.3 Formula de urmă Selberg pentru operatorul Dirac

Suntem acum în poziția de a enunța formula de urmă. Demonstrația completă poate fi găsită în Capitolul 3. Fie $\{r_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ șirul ordonat crescător al valorilor proprii ale operatorului $|\,\mathrm{D}\,|$. Fie u o funcție *admisibilă* (vezi Definiția 3.22). Dacă $M = \Gamma \setminus \mathbb{H}$ este o suprafață hiperbolică completă cu k cuspuri, înzestrată cu o structură de spin netrivială, avem:

$$\sum_{j=0}^{\infty} u(r_j) = \frac{\mathrm{Area}(M)}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} r u(r) \coth(\pi r) dr + \sum_{[\mu]} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{l(\mu)\varepsilon^n(\mu)\check{u}(nl(\mu))}{\sinh\left(\frac{nl(\mu)}{2}\right)} - 2k\log(2)\check{u}(0),$$

Aici, $[\mu]$ parcurge toate clasele de conjugare ale elementelor primitive, hiperbolice în Γ, iar $\check{u}$ reprezintă transformata Fourier inversă a lui u. Într-o anumită măsură, se poate spune că aceasta formulă reprezintă o punte între mecanica clasică și mecanica cuantică. Ea leagă traiectoriile închise ale particulelor clasice (adică geodezice închise) de stările periodice ale particulelor cuantice (adică valorile proprii și funcțiile proprii ale lui D). În această teză, formula de mai sus reprezintă fundația pe care multiple aplicații vor fi construite. În comparație cu formula de urmă clasică dezvoltată de Selberg [44], aici apare funcția coth în loc de tanh.

1.2.4 Procesul de contracție

Un *proces de contracție* se obține atunci când lungimea unei geodezice simple închise de pe M se contractă către 0. Riguros, facem acest lucru considerând o familie de metrici hiperbolice complete pe suprafața noastră, așa cum este explicat în Definiția 3.1. În mod intuitiv, procesul poate fi observat în Figura 1.2. La limită, geodezica η dispare, iar suprafața nu mai este compactă. Menționăm că, datorită formulei Gauss-Bonnet, aria suprafeței rămâne constantă pe parcursul acestui proces.

Un prim rezultat în această direcție apare în Capitolul 3 și afirmă că partea dreaptă a formulei de urmă se comportă bine atunci când lungimea geodezicei se contractă către 0 (Teorema 3.24). De aici, obținem o lege Weyl (Teorema 3.4) *uniformă* în parametrul de contracție:

$$\lim_{\lambda\to\infty}\frac{N_{\mathrm{D}_t^2}(0,\lambda)}{\lambda}=\frac{\mathrm{Area}(M)}{2\pi};\qquad\qquad \textit{uniform pentru } t\in[0,1].$$

Acest lucru implică imediat că:

$$N_{D_t}(-r,r)=r^2\frac{\mathrm{Area}(M)}{2\pi}+o(r^2),$$

uniform în $t\in[0,1]$ (parametrul de contracție), unde $N_{D_t}(-r,r)$ reprezintă funcția de numărare a valorilor proprii ale operatorului D_t între $-r$ și r. Rezultatul de mai sus îmbunătățește semnificativ estimările cunoscute anterior [6, Teorema 2].

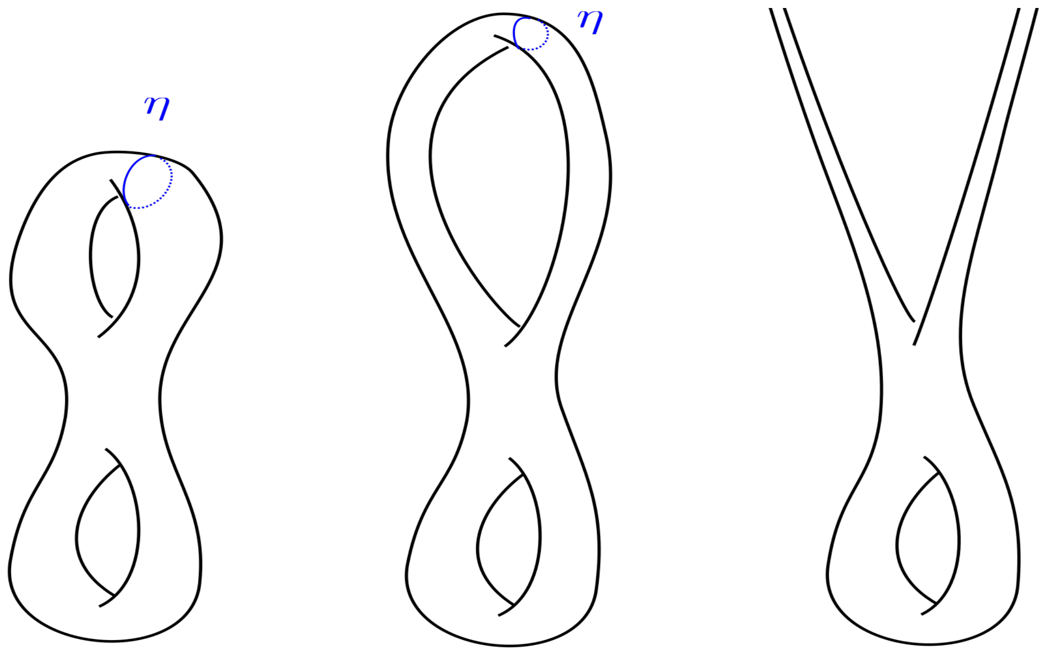


Figure 1.2: Procesul de contracție

Teorema principală a următorului capitol este convergența funcției zeta Selberg definită mai sus în timpul unui proces de contracție (Teorema 3.5):

$$\lim_{t\to 0} Z_\varepsilon(s,(M,g_t))\exp\left(-\sum_{j=1}^{\kappa}\frac{\pi^2}{6l_t(\eta_j)}\right)=Z_\varepsilon(s,(M,g_0))2^{\kappa(1-2s)},$$

uniform pe compacții din $\mathbb{C}$, unde g_t reprezintă metrica hiperbolică de pe M la momentul $t\in[0,1]$.

1.2.5 Numărarea valorilor proprii pe suprafețe aleatoare

În Capitolul 4 sunt studiate proprietățile spectrale ale operatorului Dirac pe o suprafață hiperbolică *tipică* de volum finit. Deoarece rezultate similare sunt deja cunoscute în cazul operatorului Laplace, vom începe prin a le explica succint. În [35], Monk a studiat distribuția valorilor proprii ale operatorului Laplace pe o suprafață hiperbolică compactă aleatoare. Ea a lucrat cu volumul Weil-Petersson, care induce o măsură de probabilitate pe $\mathcal{M}_g$, spațiul de moduli al suprafețelor de gen g. Rezultatul principal arată că pentru o suprafață hiperbolică tipică X și $0 \leq a \leq b$ avem:

$$\frac{N_X^{\Delta}(a,b)}{\mathrm{Area}(X)} = \mathcal{O}\left(b - a + \sqrt{\frac{b+1}{\log g}}\right),$$

unde $N_X^{\Delta}(a,b)$ este *funcția de numărare* a valorilor proprii ale operatorului Δ între a și b pe suprafața hiperbolică X. În [25], Le Masson și Sahlsten extind acest rezultat la suprafețe hiperbolice de volum finit, în ipoteza că numărul de cuspuri $k = k(g)$ să fie de ordinul $\mathcal{O}(g^{\kappa})$, pentru $0 < \kappa < 1/2$. În aceeași ipoteză privind numărul de cuspuri, obținem (Teorema 4.1):

$$\frac{N_X^{\mathrm{D}^2}(a,b)}{\mathrm{Area}(X)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{4\pi}\int_a^b \coth(\pi\sqrt{r})dr + \frac{\sqrt{b}+1}{\sqrt{\log g}}\right).$$

Acest rezultat este obținut în colaborare cu Laura Monk. Similar cu abordarea din [35], demonstrația constă în aplicarea formulei de urmă Selberg pentru o anumită familie de funcții.

Bibliography

[1] P. Albin, F. Rochon, D. Sher, *Resolvent, heat kernel and torsion under degeneration to fibered cusps*, Mem. Amer. Math. Soc. **269** (2021), no. 1314.

[2] N. Anantharaman, L. Monk, *Functions in Random Hyperbolic Geometry and Application to Spectral Gaps*, `http://arXiv:2304.02678`.

[3] Cipriana Anghel, R. Stan, *Uniformization of Riemann surfaces revisited*, Ann Glob Anal Geom **62**, 603–615 (2022).

[4] Cipriana Anghel, *Resolvents of cusp-surgery fully elliptic differential operators*, In preparation.

[5] B. Ammann, C. Bär, *The Dirac operator on manifolds and collapsing circle bundles*, Ann. Glob. Anal. Geom. **16** (1998), no. 3, 229–234.

[6] C. Bär, *The Dirac operator on hyperbolic manifolds of finite volume*, J. Differential Geom. **54** (2000), no. 3, 439–488.

[7] C. Bär, *The Dirac operator on space forms of positive curvature*, J. Math. Soc. Japan **48** (1996), 69–83.

[8] J. Bolte, H. M. Stiepan, *The Selberg trace formula for Dirac operators*, J. Math. Phys. **47** (2006), no. 11.

[9] J. Bolte, F. Steiner, *Determinants of Laplace-like operators on Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. **130** (1990), no. 3, 581–597.

[10] J. P. Bourguignon, O. Hijazi, J. L. Milhorat, A. Moroianu, S. Moroianu, *A Spinorial Approach to Riemannian and Conformal Geometry*, EMS Monographs in Mathematics. European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015.

[11] P. Buser, *Geometry and Spectra of Compact Riemann Surfaces*, Reprint of the 1992 edition. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston, Ltd., Boston, MA, 2010.

[12] B. Colbois, G. Courtois, *Les valeurs propres inférieures á 1/4 des surfaces de Riemann de petit rayon d'injectivité*, Comment. Math. Helv. **64**, 349–362, 1989.

[13] B. Colbois, G. Courtois, *Convergence de variétés et convergence du spectre du laplacien*, Ann. Sci. Ec. Norm. Sup. **24**, 507–518, 1991.

[14] E. D'Hoker, D. H. Phong, *On determinants of Laplacians on Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. **104** (1986), no. 4, 537–545.

[15] H.M. Farkas, I. Kra, *Riemann Surfaces*, Springer (1980).

[16] O. Forster, *Lectures on Riemann Surfaces*, Springer (1999).

[17] N. Ginoux, *The Dirac Spectrum*, Springer, 2009.

[18] Y. Gong, *Spectral Distribution of Twisted Laplacian on Typical Hyperbolic Surfaces of High Genus*, `http://arXiv:2306.16121`.

[19] W. Hide, *Spectral Gap for Weil Petersson Random Surfaces with Cusps*, Inter. Math. Research Notices, rnac293 (2022).

[20] W. Hide, J. Thomas, *Short Geodesics and Small Eigenvalues on Random Hyperbolic Punctured Spheres*, `http://arXiv:2209.15568`.

[21] W. Hoffmann, *An invariant trace formula for the universal covering group of* $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})$, Ann Glob Anal Geom 12 (1994), 19—63.

[22] J.H. Hubbard, *Teichmüller theory and Applications to Geometry, Topology and Dynamics, vol.* 1, Matrix Editions, Ithaca NY (2006).

[23] V. Y. Ivrii, *The second term of the spectral asymptotics for a Laplace-Beltrami operator on manifolds with boundary*, Funktsional. Anal. i Prilozhen. **14** (1980), no. 2, 25–34.

[24] P. Koebe, *Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven*, Nachr. Ges. Wiss. Göttingen (1907), 191–210 and 633–649.

[25] E. Le Masson, T. Sahlsten, *Quantum Ergodicity for Eisentstein series on hyperbolic surfaces*, `http://arxiv.org/abs/2006.14935`.

[26] Lizhen Ji, *Spectral degeneration of hyperbolic Riemann surfaces*, J. Differential Geom. **38** (1993), no. 2, 263–313.

[27] M. Lipnowski, A. Wright, *Towards Optimal Spectral Gaps in Large Genus*, `http://arXiv:2103.07496`.

[28] J. Marklof, *Selberg's Trace Formula: An Introduction.* Hyperbolic geometry and applications in quantum chaos and cosmology, 83–119, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 397, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2012.

[29] R. Mazzeo, R. B. Melrose, *Analytic surgery and the eta invariant*, Geom. Funct. Anal. **5** (1995), no. 1, 14–75.

[30] R. Mazzeo, R. B. Melrose, *Pseudodifferential operators on manifolds with fibred boundaries*, Asian J. Math. **2** (1998), no. 4, 833–866.

[31] P. McDonald, *The Laplacian on spaces with cone-like singularities*, MIT Thesis, 1990.

[32] S. Minakshisundaram, A. Pleijel, *Some properties of the eigenfunctions of the Laplace operator on Riemannian manifolds*, Canad. J. Math. **1** (1949), 242–256.

[33] M. Mirzakhani, *Growth of Weil–Petersson Volumes and Random Hyperbolic Surfaces of Large Genus*, J. Diff Geom, **94** (2013), no. 2, 267–300.

[34] L. Monk, *Geometry and Spectrum of Typical Hyperbolic Surfaces*, PhD thesis, Université de Strasbourg, 2021.

[35] L. Monk, *Benjamini-Schramm convergence and spectrum of random hyperbolic surfaces of high genus*, Analysis & PDE **15** (2022), no. 3, 727–752.

[36] L. Monk, R. Stan, *Spectral convergence of the Dirac operator on typical hyperbolic surfaces of high genus* , `https://arXiv:2307.01074`

[37] S. Moroianu, *Weyl laws on open manifolds*, Math. Ann. **340** (2008), no. 1, 1–21.

[38] J. P. Otal, E. Rosas *Pour Toute Surface Hyperbolique de Genre g,* $\lambda_{2g-2} > \frac{1}{4}$, Duke Math. Journal, **150** (2009), no.1 101–115.

[39] H. Poincaré, *Sur l'uniformisation des fonctions analytiques*, Acta Math. **31** (1907), 1–64.

[40] F. Pfäffle, *Eigenvalues of Dirac operators for hyperbolic degenerations*, Manuscr. Math. **116** (2005), no. 1, 1–29.

[41] B. Randol, *On the asymptotic distribution of closed geodesics on compact Riemann surfaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **233** (1977), 241–247.

[42] P. Sarnak, *Determinants of Laplacians*, Comm. Math. Phys. **110** (1987), no. 1, 113–120.

[43] M. Schulze, *On the resolvent of the Laplacian on functions for degenerating surfaces of finite geometry*, J. Funct. Anal. **236** (2006), no. 1, 120–160.

[44] A. Selberg, *Harmonic analysis and discontinuous groups in weakly symmetric Riemannian spaces with applications to Dirichlet series*, J. Indian Math. Soc. (N.S.) **20** (1956), 47–87.

[45] Y. Shen, Y. Wu *Arbitrarily small spectral gaps for random hyperbolic surfaces with many cusps*, `http://arxiv.org/abs/2203.15681`.

[46] R. Stan, *The Selberg trace formula for spin Dirac operators on degenerating hyperbolic surfaces*, `https://arxiv.org/abs/2212.11793`.

[47] G. Warner, *Selberg's trace formula for nonuniform lattices: the R-rank one case*, Studies in algebra and number theory, Adv. Math. Suppl. Stud., Academic Press, 1–142, New York-London, 1979.

[48] A. Weil, *On the Moduli of Riemann Surfaces*, Duke Math. Journal, Springer-Verlag, Berlin, 1958, 379–389.

[49] A. Weil, *A Tour through Mirzakhani's Work on Moduli Spaces of Riemann Surfaces*, Amer. Math. Soc. Bulletin. New Series **57**, no. 3 (2020), 359–408.

[50] S. A. Wolpert, *Asymptotics of the spectrum and the Selberg zeta function on the space of Riemann surfaces*, Comm. Math. Phys. **112** (1987), no. 2, 283–315.

[51] Y. Wu, Y. Xue, *Prime Geodesic Theorem and Closed Geodesics for Large Genus*, `http://arXiv:2209.10415`.

[52] Y. Wu, Y. Xue, *Random Hyperbolic Surfaces of Large Genus Have First Eigenvalues Greater than 3/16-*ϵ, Geom. and Func. Analysis **32**, no. 2 (2022), 340–410.