Academia Română

Institutul de Matematică “Simion Stoilow”

TEZĂ DE DOCTORAT

-REZUMAT-

Distribuţii p-adice, funcţii Krasner analitice şi aplicaţii

Coordonator ştiinţific: C.S. I Dr. Marian Vâjâitu

Doctorand: Cosmin Constantin Niţu

Bucureşti, 2017

Rezumat

Conceptul de număr p-adic a fost introdus de Hensel în 1897, dar se regăseşte, fără a fi denumit explicit, în anumite lucrări anterioare ale lui Kummer. Motivaţia principală a introducerii lor a fost utilizarea unor tehnici de analiză (în special de teoria seriilor) în teoria numerelor. Două numere p-adice sunt cu atât mai apropiate, cu cât diferenţa lor este divizibilă cu o putere mai mare a numărului prim p. Astfel, ele pot păstra informaţii privind congruenţele modulo p^n, $n \in \mathbb{N}$, şi pot avea aplicaţii importante în teoria numerelor.

Fie p un număr prim. Norma p-adică (sau modulul p-adic) se defineşte pentru $x \in \mathbb{Q}$ astfel

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, \ x \neq 0 \\ 0 \ , \ x = 0 \end{cases} ,$$

unde $v_p(x)$ reprezintă exponentul numărului prim p în descompunerea lui x.

În 1930, Ostrowski a demonstrat că orice normă pe corpul numerelor raţionale $\mathbb{Q}$ este echivalentă fie cu modulul uzual, fie cu modulul p-adic pentru un anumit număr prim p. Completând topologic mulţimea $\mathbb{Q}$ în raport cu modulul obişnuit obţinem $\mathbb{R}$, iar în raport cu modululul p-adic obţinem corpul numerelor p-adice $\mathbb{Q}_p$.

Între corpurile $\mathbb{R}$ şi $\mathbb{Q}_p$ sunt multe similarităţi (ambele sunt completări ale lui $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}$ este densă în fiecare din ele, sunt spaţii local compacte, nu sunt algebric închise, putem utiliza tehnici de analiză care prezintă multe asemănări etc.), dar şi multe deosebiri ($\mathbb{R}$ este corp ordonat, relaţia de ordine fiind compatibilă cu operaţiile algebrice "+" şi "·", $\mathbb{R}$ este arhimedian, iar $\mathbb{Q}_p$ este nearhimedian, $\mathbb{R}$ este conex, pe când $\mathbb{Q}_p$ este total disconex, în $\mathbb{Q}_p$ nu putem defini clar noţiunea de interval sau cea de curbă, etc.).

Spre deosebire de cazul real, în cel p-adic mulţimea $\overline{\mathbb{Q}}_p$ (închiderea algebrică a lui $\mathbb{Q}_p$) nu este spaţiu metric complet. De aceea, se construieşte închiderea topologică a lui $\overline{\mathbb{Q}}_p$ în raport cu modulul p-adic, care se notează cu $\mathbb{C}_p$ şi este corp algebric închis şi complet. Acesta se numeşte corpul Tate şi joacă un rol asemănator lui $\mathbb{C}$ din analiza clasică.

Tehnicile de analiză complexă amintite mai sus vizau dezvoltarea locală a unei funcţii analitice în serie de puteri. Astfel a început studiul teoriei funcţiilor peste corpuri p-adice, însă marele impediment consta în faptul că aceste corpuri Tate sunt total disconexe, făcând dificilă şi delicată definirea funcţiei analitice în sens global. Prima încercare a venit în 1930 odată cu teza lui Schöbe, însă cel care a avut succes a fost Krasner în anii '50, inspirat de teorema lui Runge din analiza clasică privind aproximarea unei funcţii analitice prin funcţii raţionale, utilizând o metodă simplificată a lui Weierstrass de continuare analitică. Ulterior, în 1961, studiul analizei p-adice a triumfat prin lucrările lui Tate care a folosit ideile lui Gröthendieck, dând o structură topologică rigidă spaţiilor analitice peste corpuri p-adice.

Lucrarea este structurată în patru capitole.

În primul capitol sunt introduse numerele p-adice şi se studiază anumite proprietăţi ale acestora (analitice, algebrice, topologice).

În al doilea capitol sunt introduse distribuţiile şi măsurile p-adice. De asemenea, este prezentată noţiunea de integrală Riemann în raport cu o distribuţie. Tot aici este analizată o importantă categorie de distribuţii: distribuţiile Lipschitz tari.

2.1 Distribuţii şi măsuri p-adice

Fie $(\mathcal{X}_n, \varphi_n)_{n\geq 1}$ un sistem proiectiv cu proprietatea că $\mathcal{X}_n,\ n \geqslant 1$, sunt mulţimi finite, $\varphi_n : \mathcal{X}_{n+1} \longrightarrow \mathcal{X}_n$ sunt funcţii surjective şi $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{X}_n$.

Definiţia 1. *([21], Definiţia 1 din [28], pag. 10)*

*Fie A un grup abelian (aditiv). Se numeşte **distribuţie** pe $\mathcal{X}$ cu valori în A un şir de funcţii $\mu = (\mu_n)_{n\geqslant 1}$, $\mu_n : \mathcal{X}_n \longrightarrow A$ care verifică relaţia de compatibilitate:*

$$\mu_n(x) = \sum_{y\in\varphi_n^{-1}(x)} \mu_{n+1}(y),\ \textit{pentru orice } n \geqslant 1 \textit{ şi } x \in \mathcal{X}_n. \tag{1}$$

Fie $\Omega(\mathcal{X})$ mulţimea deschişilor compacţi din $\mathcal{X}$. Orice $D \in \Omega(\mathcal{X})$ se poate scrie ca o reuniune finită de bile disjuncte $D = \bigcup\limits_{i=1}^{m} B_i$. Extindem μ pe $\mathcal{X}$ prin aditivitate: $\mu(D) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(B_i)$. μ este finit aditivă, adică pentru orice $D_i \in \Omega(\mathcal{X}),\ i = \overline{1,n}$, disjuncte două câte două, dacă $D = \bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i$, atunci $\mu(D) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(D_i)$. Invers, presupunând că am definit $\mu : \Omega(\mathcal{X}) \longrightarrow A$, finit aditivă şi notând $\mu_n(x) = \mu(B)$, atunci $\mu = (\mu_n)_{n\geq 1}$ reprezintă o distribuţie pe $\mathcal{X}$. Putem defini, mai general, noţiunea de distribuţie pe o mulţime compactă $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}_p$ şi în absenţa limitei proiective, prin condiţia de finit aditivitate. **Norma** unei distribuţii μ se defineşte astfel: $\|\mu\| = \sup\limits_{D\in\Omega(\mathcal{X})} \|\mu(D)\|$. Dacă $\|\mu\| < \infty$ spunem că μ este o **măsură** pe $\mathcal{X}$.

Distribuţia Haar peste orbita unui element din $\mathbb{C}_p$ ([28], pag. 13)

Fie un $\mathbb{Q}_p \subset K \subset \mathbb{C}_p$ un corp complet şi $G = Gal(\overline{\mathbb{Q}}_p/\mathbb{Q}_p)$ **grupul Galois absolut** înzestrat cu topologia Krull, care este canonic izomorf cu $Gal_{cont}(\mathbb{C}_p/\mathbb{Q}_p)$, grupul automorfismelor continue ale lui $\mathbb{C}_p$ peste $\mathbb{Q}_p$ (vezi [9]). Notăm $G_K = \{\sigma \in G | \sigma(x) = x,\ \text{pentru } x \in K\}$. Pentru orice subgrup închis H al lui G, notăm $FixH = \{x \in \mathbb{C}_p |\ \sigma(x) = x,\ \text{pentru orice } x \in H\}$. $FixH$ este un subcorp închis al lui $\mathbb{C}_p$. De asemenea, pentru $x \in \mathbb{C}_p$ şi $\varepsilon > 0$ fie $H(x) = \{\sigma \in G|\ \sigma(x) = x\}$ şi $H(x, \varepsilon) = \{\sigma \in G|\ |\sigma(x) - x|_p < \varepsilon\}$. Atunci $H(x)$ este un subgrup al lui G şi $FixH(x) = \widetilde{\mathbb{Q}_p[x]}$. **Orbita** unui element $T \in \mathbb{C}_p$ în raport cu G_K este $O_K(T) = \{\sigma(T)|\ \sigma \in G_K\}$ În cazul în care $K = \mathbb{C}_p$ vom nota mai simplu $O_{\mathbb{C}_p}(T) = O(T)$. Pentru orice $T \in \mathbb{C}_p$, $O_K(T)$ este un spaţiu compact, echilbrat şi ultrametric pe care putem defini distribuţia Haar:

$$\pi_{T,K}(B(a,\varepsilon)) = \begin{cases} \dfrac{1}{N(T,K,\varepsilon)}, \text{dacă } B(a,\varepsilon) \cap O_K(T) \neq \phi \\ 0,\ \text{altfel} \end{cases} . \tag{2}$$

unde $N(T, K, \varepsilon)$ numărul bilelor de rază ε care acoperă orbita. Aceasta devine măsură dacă T este un element p-mărginit (vezi Definiţia 5).

Definiţia 2. *([28]) Fie $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}_p$, compactă şi $s > 0$. Spunem că μ este o distribuţie de tip s pe $\mathcal{X}$ sau, mai simplu, că este o* ***s-distribuţie*** *dacă:* $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon^s \sup\limits_{a\in\mathcal{X}} |\mu(B^*(a,\varepsilon))|_p = 0$, *unde supremumul este considerat după toate bilele* $B^*(a,\varepsilon) = B(a,\varepsilon) \cap \mathcal{X}$.

O 1-distribuţie se numeşte ***distribuţie Lipschitz****.*

Definiţia 3. *([28]) Fie $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}_p$, compactă şi $r > 0$. Spunem că o funcţie $f : \mathcal{X} \to \mathbb{C}_p$ este Lipschitz de tipul r sau, mai simplu,* ***r-Lipschitz****, dacă există $c > 0$ astfel încât:*

$$|f(x) - f(y)|_p \leqslant c|x - y|_p^r. \tag{3}$$

O funcţie 1-Lipschitz se numeşte, mai simplu, ***Lipschitz****.*

Definiţia 4. *([2]) Un* ***element*** $x \in \mathbb{C}_p$ *se numeşte* ***Lipschitz*** *dacă şi numai dacă* $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \frac{\varepsilon}{|N(x,\varepsilon)|_p} = 0$*, unde* $N(x, \varepsilon)$ *este numărul de bile deschise de rază* ε *care acoperă* $O(x)$*.*

Definiţia 5. *([2]) Un element* $x \in \mathbb{C}_p$ *se numeşte* p-***mărginit*** *dacă există* $s \in \mathbb{N}$ *astfel încât* p^s *să nu dividă numărul* $N(x, \varepsilon)$*, pentru orice* $\varepsilon > 0$*. În acest caz* π_x *este o măsură.*

O submulţime $\mathcal{X}$ a lui $\mathbb{C}_p$ se numeşte echivariantă în raport cu grupul Galois p-adic absolut G sau G-**echivariantă**, dacă $\sigma(x) \in \mathcal{X}$ pentru orice $x \in \mathcal{X}$ şi orice $\sigma \in G$. Orbita $O(x)$ este un astfel de exemplu.

Definiţia 6. *([1, 3, 7]) Fie* $\mathcal{X}$ *o submulţime compactă şi* G*-equivariantă a lui* $\mathbb{C}_p$ *şi* μ *o distribuţie pe* $\mathcal{X}$ *cu valori în* $\mathbb{C}_p$*. Spunem că* μ *este* G-***echivariantă*** *dacă* $\mu(\sigma(B)) = \sigma(\mu(B))$*, pentru orice bilă* B *în* $\mathcal{X}$ *şi orice* $\sigma \in G$*.*

Definiţia 7. *([6]) Fie* $\mathcal{X}$ *o submulţime compactă a lui* $\mathbb{C}_p$*. Spunem că* $\mathcal{X}$ *este o* ***mulţime fundamentală*** *dacă* $\{|x - y|_p \ ; \ x, y \in \mathcal{X}, \ x \neq y\}$ *este un şir* $(\varepsilon_n)_{n \geq 1}$ *care descreşte strict către 0. Acest şir se numeşte* ***şirul fundamental*** *asociat lui* $\mathcal{X}$*.*

Exemple simple. $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Z}_p^\times$ şi $O(x)$ sunt mulţimi fundamentale.

Definiţia 8. *([6]) Fie* $\mathcal{X}$ *o mulţime fundamentală a lui* $\mathbb{C}_p$ *şi* $(\varepsilon_n)_{n \geqslant 1}$ *şirul fundamental asociat lui* $\mathcal{X}$*. O* ***distribuţie*** *Lipschitz* μ *definită pe* $\mathcal{X}$ *cu valori în* $\mathbb{C}_p$ *se numeşte* ***Lipschitz-tare*** *dacă verifică următoarea condiţie: există* $N(\mu) \in \mathbb{N}$ *astfel încât*

$$\left(\varepsilon_n \max_{x \in \mathcal{X}} |\mu(B^*(x, \varepsilon_n))|_p \right)_{n \geqslant N(\mu)} \tag{4}$$

este strict decrescător către 0.

2.2 Asupra distribuţiilor Lipschitz tari

În lucrare sunt prezentate câteva exemple de distribuţii Lipschitz-tari şi o modalitate originală de a construi unele distribuţii noi. Căutăm o distribuţie nemărgintă $\mu : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$. Notăm $\mu(a + p^n\mathbb{Z}_p) = \alpha_n^{(a)}$, $0 \leqslant a < p^n$. Din relaţia de compatibilitate $\mu(a + p^n\mathbb{Z}_p) = \sum\limits_{b=0}^{p-1} \mu(a + bp^n + p^{n+1}\mathbb{Z}_p)$, $n \geqslant 0$, obţinem $\alpha_n^{(a)} = \sum\limits_{b=0}^{p-1} \alpha_{n+1}^{(a+bp^n)}$. Următorul rezultat ne oferă posibilitatea de a construi clase de "distribuţii nemărginite" care sunt Lipschitz-tari.

Lema 1. *Fie* $\alpha \in \mathbb{C}_p \setminus \{0\}$*, şi* $t \in p^{\mathbb{Q}}$*,* $t > 1$*. Atunci există* $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_p \in \mathbb{C}_p$ *astfel încât* $\alpha = \sum\limits_{i=1}^{p} \beta_i$ *şi* $\max\limits_{i=\overline{1,p}} |\beta_i|_p = t|\alpha|_p$*.*

Propoziţia 1. *Pe* $\mathbb{Z}_p$ *există distribuţii Lipschitz-tari nemărginite.*

Propoziţia 2. *([6]) Fie* K *o extindere algebrică infinită normală a lui* $\mathbb{Q}_p$*. Există un element generic* x *al lui* $\tilde{K}$ *(i.e.* $\tilde{K} = \widetilde{\mathbb{Q}_p[x]}$*, [4]) asfel încât distribuţia Haar* π_x *este Lipschitz-tare.*

2.3 Integrala Riemann în raport cu distribuţiile p-adice

Definiţia 9. *([28]) Fie* $\mathcal{X} = \varprojlim \mathcal{X}_n$*. Dacă* $B = \theta_n^{-1}(x)$ *este o bilă în* $\mathcal{X}$ *spunem că* x *este* ***centrul*** *lui* B *şi scriem B=B(x). O* ***partiţie*** *a lui* $\mathcal{X}$ *este o mulţime finită de bile disjuncte* $\Delta = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ *cu* $\bigcup\limits_{i=1}^{n} B_i = \mathcal{X}$*. Un* ***sistem de puncte intermediare*** *este o funcţie* $\xi : \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathcal{X}_n \to \mathcal{X}$ *cu proprietatea că pentru orice* $x \in \mathcal{X}_n$ *avem* $\xi(x) \in \theta_n^{-1}(x)$*. Pentru simplitate, vom nota* $\xi(x_i) = \xi_i$ *şi* $B_i = B(x_i)$*.*

Definiţia 10. *Fie* A *un* K*-spaţiu vectorial complet în raport cu o normă nearhimediană* $\|\cdot\|$*,* $\mu \in \mathcal{D}(\mathcal{X}, K)$*,* Δ *o partiţie a lui* $\mathcal{X}$*,* ξ *un sistem de puncte intermediare şi* $f : \mathcal{X} \to A$*.* ***Suma Riemann*** *asociată lui f,* Δ, ξ *şi* μ *este:* $S(f, \Delta, \xi, \mu) = \sum\limits_{i=1}^{n} \mu(B_i) f(\xi_i)$*.*

Definiţia 11. *Fie* $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ *un şir strict descrescător de numere reale având limita 0. Am definit anterior distanţa care dă topologia pe* $\mathcal{X}$*. Pentru* $B = B(x)$ *notăm* $\|B\| = \varepsilon_n$ *dacă* $x \in \mathcal{X}_n$*.* ***Norma unei partiţii*** Δ *este* $\|\Delta\| = \sup\limits_{i=\overline{1,n}} \|B_i\|$*.*

Definiţia 12. *Spunem că o funcţie* $f : \mathcal{X} \to A$ *este integrabilă în raport cu o distribuţie* μ *dacă există* $I \in A$ *cu proprietatea că pentru orice* $\varepsilon > 0$*, există* $\delta_\varepsilon > 0$ *astfel încât pentru orice partiţie* Δ *cu* $\|\Delta\| < \delta_\varepsilon$ *şi orice sistem de puncte intermediare* ξ *să avem*

$$\|S(f, \Delta, \xi, \mu) - I\| < \varepsilon. \tag{5}$$

În cazul în care există, I se numeşte integrala lui f în raport cu μ *şi se notează cu* $\int\limits_{\mathcal{X}} f d\mu$*.*

Teorema 1. *([28]) Fie* $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}_p$*, compactă şi* $r \geqslant s > 0$*. Atunci orice funcţie r-Lipschitz este integrabilă Riemann în raport cu orice s-distribuţie.*

Capitolul al treilea este consacrat funcţiilor Krasner analitice. În prima secţiune sunt studiate câteva proprietăţi ale funcţilor raţionale în contextul p-adic.

3.2 Elemente analitice

Definiţia 13. *([24]) Fie $D \subset \mathbb{C}_p$ o mulţime închisă. O funcţie $f : D \to \mathbb{C}_p$ se numeşte* ***Krasner analitică*** *(funcţie* ***rigid analitică*** *sau* ***element analitic****) dacă există un şir de funcţii raţionale $(f_n) \subset R(D)$ care converge uniform la f pe D în raport cu norma supremum.*

Notăm cu $H(D) = \{f : D \longrightarrow \mathbb{C}_p \mid f$ e Krasner analitică pe $D\}$.

Ca în [2], o funcţie Krasner-analitică definită pe o mulţime G-echivariantă $\mathcal{X}$ a lui $\mathbb{C}_p$ se numeşte **echivariantă** dacă $f(\sigma(x)) = \sigma(f(x))$ pentru $x \in \mathcal{X}$ şi orice $\sigma \in G$. Pentru o submulţime G-echivariantă $\mathcal{X}$ a lui $\mathbb{C}_p$, fie $H^G(\mathbb{P} \setminus \mathcal{X})$ mulţimea funcţiilor Krasner-analitice pe $\mathbb{P} \setminus \mathcal{X}$ cu valori în $\mathbb{C}_p$, şi $H_0^G(\mathbb{P} \setminus \mathcal{X})$ submulţimea sa care conţine acele funcţii care se anulează la ∞. Aici $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) = \mathbb{C}_p \cup \{\infty\}$.

Teorema 2. *(**Mittag-Leffler**, [24]) Fie $D \subset \mathbb{C}_p$ o mulţime închisă mărginită şi infra-conexă, $(B_i)_{i\in I}$ familia sa de găuri şi B_i^C complementara lui B_i, $i \in I$. Atunci există următoarea descompunere ca sumă directă de spaţii Banach*

$$H(D) \xrightarrow{\sim} H(B_D) \widehat{\bigoplus_{i\in I}} H_0\left(B_i^C\right), \tag{6}$$

adică orice $f \in H(D)$ se scrie în mod unic

$$f = f_0 + \sum_{i\in I} f_i, \ \text{cu } \|f\|_D = \max\left(\|f_0\|, \sup_{i\in I} \|f_i\|\right), \tag{7}$$

unde $f_0 \in H(B_D)$, $f_i \in H_0\left(B_i^C\right)$ şi $\|f_i\| = \|f_i\|_{B_i^C} = \|f_i\|_D \xrightarrow[i\to\infty]{} 0$.

3.3 Integrala Shnirelman

Aici este introdusă integrala Shnirelman, un analog p-adic al integralei curbilinii, cu ajutorul căreia se demonstrează analoagele p-adice ale unor teoreme clasice de analiză complexă: formula de reprezentare a lui Cauchy, teorema reziduurilor, principiul maximului modulului. Totodată, această integrală are aplicaţii în teoria numerelor transcendente. De asemenea, este prezentată teorema lui Vishik împreună cu forma sa Galois echivariantă.

Definiţia 14. *([19]) Fie $f : S(a,r) \to \mathbb{C}_p$ şi $\Gamma \in \mathbb{C}_p$, $|\Gamma|_p = r$. Integrala Shnirelman este definită de următoarea limită (dacă există!):*

$$\int\limits_{a,\Gamma} f(x)dx \stackrel{def}{=} \lim_{n\to\infty}{}' \frac{1}{n} \sum_{\xi^n=1} f(a+\xi\Gamma), \tag{8}$$

unde apostroful semnifică faptul că limita se calculează doar după valorile lui n pentru care $p \not| n$.

În continuare vom prezenta teorema lui Vishik şi vom face câteva completări.

Notaţii:

$B(\mathcal{X},r) = \bigcup\limits_{a\in\mathcal{X}} B(a,r)$, $B[\mathcal{X},r] = \bigcup\limits_{a\in\mathcal{X}} B[a,r]$.

Pentru $\phi \in H_0\left(\mathcal{X}^C\right)$ definim $\|\phi\|_r = \max\limits_{x\in B(\mathcal{X},r)^C} |\phi(z)|_p$. Se arată că $\|\phi\|_r = \max\limits_{dist(z,\mathcal{X})=r} |\phi(z)|_p$.

O topologie pe $H_0\left(\mathcal{X}^C\right)$ e dată de baza de vecinătăţi ale lui 0: $U(r,\varepsilon) = \left\{\phi \in H_0(\mathcal{X}^C);\ \|\phi\|_r < \varepsilon\right\}$.

$H(\mathcal{X},r) = \{f : B(\mathcal{X},r) \to \mathbb{C}_p |\ f$ este Krasner analitică pe orice $\mathrm{B}(a_i,r) \subset B(\mathcal{X},r)\}$.

$L(\mathcal{X}) = \bigcup\limits_{r>0} H(\mathcal{X},r)$ (mulţimea funcţiilor local analitice pe $\mathcal{X}$).

$L^*(\mathcal{X})$ (spaţiul dual) reprezintă mulţimea tuturor funcţionalelor liniare şi continue μ definite pe $L(\mathcal{X})$ care au proprietatea că, pentru orice $r > 0$, $\|\mu\|_r \stackrel{def}{=} \max\limits_{0\neq f\in H(\mathcal{X},r)} \frac{|\mu(f)|_p}{\|f\|_r}$ este finită.

Definiţia 15. *Pentru $\mu \in L^*(\mathcal{X})$ definim* ***transformata Stieltjes***

$$S\mu : \mathcal{X}^C \to \mathbb{C}_p, \quad z \to \mu(f_z) \stackrel{not}{=} (\mu(x), f_z(x)), \tag{9}$$

unde $x \in \mathcal{X}$, $f_z : \mathcal{X} \to \mathbb{C}_p$, $f_z(x) = \frac{1}{z-x}$.

Observaţia 1. *Dacă μ provine dintr-o măsură pe $\mathcal{X}$, atunci $S\mu(z) = \int\limits_{\mathcal{X}} \frac{d\mu(x)}{z-x}$.*

Definiţia 16. *Pentru $\phi \in H_0\left(\mathcal{X}^C\right)$ se numeşte* ***transformata Vishik*** *funcţionala $V\phi$ pe $L(\mathcal{X})$*

$$f \to \sum_i \int\limits_{a_i,\Gamma} \phi(x)f(x)(x-a_i)dx, \quad f \in H(\mathcal{X},r), \tag{10}$$

unde Γ, $a_i \in \mathbb{C}_p$, $|\Gamma|_p = r > 0$.

Teorema 3. *(**Vishik**, [30]) V şi S sunt inverse topologic una alteia între $H_0\left(\mathcal{X}^C\right)$ şi $L^*(\mathcal{X})$. Prin acest izomorfism, subspaţiul $M(\mathcal{X}) \subset L^*(\mathcal{X})$ al măsurilor pe $\mathcal{X}$ este în corespundenţă biunivocă cu mulţimea $\left\{\phi \in H_0\left(\mathcal{X}^C\right) \mid r\|\phi\|_r \text{ e mărginit pentru } r \to 0\right\}$.*

Prezentăm în continuare o completare originală la Teorema 3 (vezi [30]). Fie σ un automorfism continuu al lui $\mathbb{C}_p$. Avem un isomorfim canonic, notat la fel: $\sigma : L(\mathcal{X}) \to L(\sigma\mathcal{X})$, unde $\sigma\mathcal{X} = \sigma(\mathcal{X})$. $G = Gal_{cont}(\mathbb{C}_p/\mathbb{Q}_p)$ acţionează pe $L(\mathcal{X})$ astfel: $G \times L(\mathcal{X}) \to L(\mathcal{X})$,$(\sigma, f) \to \sigma * f$ unde $(\sigma * f)(u) \overset{def}{=} \sigma f(\sigma^{-1}u)$, iar $\sigma^{-1}u = \sigma^{-1}(u)$. De asemenea, definim izomorfismul dual notat la fel: $\sigma : L^*(\mathcal{X}) \to L^*(\mathcal{X}^\sigma)$. Prin urmare, pentru orice $\mu \in L^*(\mathcal{X})$ şi $f \in L(\mathcal{X})$ avem egalitatea $(\sigma\mu, \sigma * f) = \sigma(\mu, f)$. Este evident că σ acţionează în mod natural între $H_0(\mathcal{X}^C)$ şi $H_0(\sigma\mathcal{X}^C)$, adică pentru orice $\varphi \in H_0(\mathcal{X}^C)$ avem: $\sigma * \varphi(z) = \sigma\varphi(\sigma^{-1}z)$. Următoarea diagramă este comutativă.

$$\begin{array}{ccc} L^*(\mathcal{X}) & \overset{\sigma}{\to} & L^*(\sigma\mathcal{X}) \\ S\downarrow & & \downarrow S \\ H_0(\mathcal{X}^C) & \overset{\sigma}{\to} & H_0\left(\sigma X^C\right) \end{array} \tag{11}$$

3.4 Forma Galois echivariantă a teoremei lui Vishik

În această secţiune sunt expuse rezultate originale din articolul [23].

Fie $\mathcal{X} \subset \mathbb{C}_p$ un compact G-echivariant şi $L(\mathcal{X}) = \bigcup\limits_{n \geqslant 0} H(\mathcal{X}, r)$.

Propoziţia 3. *Fie $\tau \in G = Gal_{cont}(\mathbb{C}_p/\mathbb{Q}_p)$. Dacă f este integrabila Schnirelman, atunci*

$$\tau\left(\int\limits_{a,\Gamma} f(x)dx\right) = \int\limits_{\tau a, \tau\Gamma} (\tau * f)(x)dx. \tag{12}$$

Fie acum $H_0^G(\mathcal{X}^C) \subseteq H_0(\mathcal{X}^C)$ subspaţiul funcţiilor analitice G-echivariante (i.e. care satisfac condiţia $\tau\phi(x) = \phi(\tau x),\ \phi \in H_0(\mathcal{X}^C)$). Fie $L_G^*(\mathcal{X}) \subseteq L^*(\mathcal{X})$ subspaţiul funcţionalelor $\mu \in L^*(\mathcal{X})$ care verifică egalitatea $\tau(\mu(f)) = \mu(\tau * f)$, pentru orice $\tau \in G$ şi $f \in L(\mathcal{X})$ (i.e. subspaţiul funcţionalelor G-echivariante).

Teorema 4. *Există izomorfismul de spaţii topologice $H_0^G\left(\mathcal{X}^C\right) \simeq L_G^*(\mathcal{X})$.*

De asemenea, arătăm că $\tau S\mu(z) = S\mu(\tau z),\ \tau \in G$.

În capitolul al patrulea este studiată o clasă specială de funcţii Krasner analitice, în particular funcţiile urmă, care au aplicaţii în obţinerea unor rezultate originale privind transcendenţa anumitor funcţii (de exemplu funcţia log gamma p-adică a lui Diamond).

4.1 Urma unui element

Orice element $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$ este p-mărginit, deci distribuţia π_α este măsură. Mai mult, pentru orice funcţie $f : O(\alpha) \to \mathbb{C}_p$ avem: $\int\limits_{O(\alpha)} f d\pi_\alpha = \frac{1}{deg(\alpha)} \sum\limits_{\sigma} f(\sigma(\alpha))$.

Definiţia 17. *59([2]) Fie $\alpha \in \overline{\mathbb{Q}}_p$. **Urma** lui α este:*

$$Tr(\alpha) = \frac{1}{deg(\alpha)} tr_{\mathbb{Q}_p(\alpha)/\mathbb{Q}_p} = \int\limits_{O(\alpha)} x d\pi_\alpha(x) \tag{13}$$

Mai general, urma unui element $T \in \mathbb{C}_p$ (dacă există!) este

$$Tr(T) = \int\limits_{O(T)} x d\pi_T(x) \tag{14}$$

4.2 O estimare a normei

Fie $\mathcal{X}$ o mulţime fundamentală a lui $\mathbb{C}_p$ şi μ o distribuţie Lipschitz-tare definită pe $\mathcal{X}$. Considerăm transfomata Cauchy:

$$F_\mu(z) = \int\limits_{\mathcal{X}} \frac{1}{z-t} \mathrm{d}\mu(t) \in H(\mathbb{P} \setminus \mathcal{X}). \tag{15}$$

Pentru $\mathcal{X} = O(x)$, cu $x \in \mathbb{C}_p$ şi $\mu = \pi_x$ avem că F_μ este funcţia urmă a lui x asociată lui π_x, vezi [2] şi [29]. Pentru orice $F \in H(\mathbb{P} \setminus \mathcal{X})$, $\varepsilon > 0$ şi $\mathcal{X}(\varepsilon) = \{y \in \mathbb{C}_p \mid$ există $t \in \mathcal{X}$ astfel încât $|y - t|_p < \varepsilon\}$ o ε-**vecinătate** a lui $\mathcal{X}$ notăm $\|F\|_{\mathbb{P}\setminus\mathcal{X}(\varepsilon)}$ norma supremum a lui F pe $\mathbb{P} \setminus \mathcal{X}(\varepsilon)$. Fie $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ şirul fundamental asociat lui $\mathcal{X}$. Pentru $n \geqslant 1$, fie $N(\varepsilon_n)$ numărul bilelor deschise de rază ε_n care acoperă $\mathcal{X}$. De asemenea, fie $a_i^{(n)}$, $1 \leqslant i \leqslant N(\varepsilon_n)$, o alegere convenabilă a centrelor acestor bile.

Teorema 5. *Fie $\mathcal{X}$ o mulţime fundamentală a lui $\mathbb{C}_p$ şi μ o distribuţie Lipschitz-tare definită pe $\mathcal{X}$. Fie $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ şirul fundamental asociat lui $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{X}(\varepsilon_n)$ ε_n-vecinătatea deschisă a lui $\mathcal{X}$ în $\mathbb{C}_p$. Atunci, există un număr natural $N(\mu)$, care depinde doar de μ, astfel încât pentru orice $n \geq N(\mu)$,*

$$\|F_\mu\|_{\mathbb{P}\setminus\mathcal{X}(\varepsilon_n)} = \frac{1}{\varepsilon_n} \cdot \max_{x\in\mathcal{X}} |\mu(B^*(x, \varepsilon_n))|_p\ . \tag{16}$$

Observaţia 2. *Fie k un număr natural fixat. În aceleaşi ipoteze ca în teorema anterioară integrând $\frac{1}{(z-t)^k}$ în loc de $\frac{1}{z-t}$, rezultatul principal din Teorema 5 rămâne neschimbat, cu excepţia $\frac{1}{z-t}$ care devine $\frac{1}{(z-t)^k}$ în membrul stâng şi $\frac{1}{\varepsilon_n}$ care devine $\frac{1}{\varepsilon_n^k}$ în membrul drept. Un caz particular al Teoremei 5 este tratat în [5].*

În continuare vom vedea că o clasă mare de funcţii, care sunt transformate Cauchy prin integrarea în raport cu distribuţii Lipschitz-tari definite pe $\mathcal{X}$, sunt transcendente peste $\mathbb{C}_p(Z)$ şi, în consecinţa, vom obţine rezultate de transcendeţă privind funcţia log gamma p-adică twistată (respectiv regularizată) şi privind funcţiile urmă.

Propoziţia 4. *Fie $\mathcal{X}$ o submulţime compactă a lui $\mathbb{C}_p$ şi $f : \mathbb{P} \setminus \mathcal{X} \to \mathbb{C}_p$ o funcţie cu proprietatea că există o submulţime infinită $\mathcal{S}$ a lui $\mathcal{X}$ astfel încât $\limsup_{z\to x} |f(z)|_p = \infty$, pentru orice $x \in \mathcal{S}$. Atunci f este transcendentă peste $\mathbb{C}_p(Z)$.*

Observaţia 3. *Propoziţia 4 este o versiune rafinată a primei părţi a Teoremei 6 din [26].*

Lema 2. *Fie $\mathcal{X}$ o submulţime compactă a lui $\mathbb{C}_p$ fără puncte izolate şi $f : \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{X} \to \mathbb{C}_p$ o funcţie local analitică şi algebrică peste $\mathbb{C}_p(Z)$. Atunci derivata sa, care este definită pe $\mathbb{C}_p \setminus \mathcal{X}$, cu excepţia eventual a unei mulţimi discrete, este algebrică peste $\mathbb{C}_p(Z)$.*

Corolarul 1. *Fie $\mathcal{X}$ o submulţime compactă a lui $\mathbb{C}_p$ fără puncte izolate şi $f : \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{X} \to \mathbb{C}_p$ o funcţie local analitică astfel încât f' este Krasner analitică peste $\mathbb{C}_p \setminus \mathcal{X}$ şi transcendentă peste $\mathbb{C}_p(Z)$. Atunci f este transcendentă peste $\mathbb{C}_p(Z)$.*

Lema 3. *Fie $\mathcal{X}$ o submulţime compactă a lui $\mathbb{C}_p$ fără puncte izolate şi $f : \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{X} \to \mathbb{C}_p$ o funcţie Krasner-analitică. Dacă există o bilă $B(\alpha, \varepsilon) \subset \mathbb{C}_p \setminus \mathcal{X}$ astfel încât $f|_{B(\alpha,\varepsilon)} : B(\alpha, \varepsilon) \to \mathbb{C}_p$ să fie algebrică peste $\mathbb{C}_p(Z)$, atunci f este algebrică peste $\mathbb{C}_p(Z)$.*

4.3 Aplicaţii la rezultate de transcendenţă

Fie $\mathcal{X}$ o mulţime fundamentală a lui $\mathbb{C}_p$ şi μ o distribuţie Lipschitz-tare definită pe $\mathcal{X}$ cu valori în $\mathbb{C}_p$. Fie $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ şirul fundamental asociat lui $\mathcal{X}$. Se vede uşor că şirul $\left(\max_{x\in\mathcal{X}} |\mu(B^*(x, \varepsilon_n))|_p\right)_{n\geq 1}$ este crescător, nu neapărat şi mărginit. Pentru orice întreg $k \geq 1$, notăm $F_{k,\mu}(z) = \int_{\mathcal{X}} \frac{1}{(z-t)^k} \mathrm{d}\mu(t)$. Din Observaţia 2 avem

$$\|F_{k,\mu}\|_{\mathbb{P}\setminus\mathcal{X}(\varepsilon_n)} = \frac{1}{\varepsilon_n^k} \cdot \max_{x\in\mathcal{X}} |\mu(B^*(x, \varepsilon_n))|_p \geqslant \frac{1}{\varepsilon_n^k} \cdot \max_{x\in\mathcal{X}} |\mu(B^*(x, \varepsilon_{N(\mu)}))|_p \ , \tag{17}$$

pentru orice $n \geq N(\mu)$. Pentru $n \to \infty$ în (17) obţinem $\lim_{n\to\infty} \|F_{k,\mu}\|_{\mathbb{P}\setminus\mathcal{X}(\varepsilon_n)} = \infty$. Atunci există două şiruri $(z_n)_{n\geqslant 1}$ in $\mathbb{P} \setminus \mathcal{X}$ şi $(x_n)_{n\geqslant 1}$ în $\mathcal{X}$ astfel încât $\mathrm{dist}(z_n, \mathcal{X}) = |z_n - x_n|_p \to 0$ şi $\lim_{n\to\infty} |f(z_n)|_p = \infty$. Deoarece $\mathcal{X}$ este secvenţial compactă există un subşir $(x_{n_m})_{m\geqslant 1}$ al lui

$(x_n)_{n\geqslant 1}$ care converge către $x \in \mathcal{X}$. Subşirul $(z_{n_m})_{m\geqslant 1}$ converge către x şi $\lim\limits_{m\to\infty} |f(z_{n_m})|_p = \infty$. Evident, x este un punct singular al lui $F_{k,\mu}$ ca în Propoziţia 4. Dacă $F_{k,\mu}$ verifică o "ecuaţie funcţională" şi $\mathcal{X}$ are numite "proprietăţi" (de exemplu, subgrup compact sau Galois echivariant şi compact în $\mathbb{C}_p$) se constată uşor că $F_{k,\mu}$ are un număr infinit de puncte singulare ca în $\mathcal{X}$, deci din Teorema 5 şi Propoziţia 4 este transcendentă peste $\mathbb{C}_p(Z)$. Un exemplu specific pentru această situaţia este funcţia urmă a unei distribuţii Lipschitz-tari. Această funcţie urmă este transcendentă peste $\mathbb{Q}_p(Z)$ şi, mai mult, derivatele sale sunt linar independente peste $\mathbb{Q}_p(Z)$. În particular, funcţia urmă nu poate verifica o ecuaţie diferenţială peste $\mathbb{Q}_p(Z)$, vezi [5]. În continuare, prezentăm un alt exemplu interesant pentru această situaţie. În 1977, Diamond a introdus funcţia log gamma p-adică, analogul funcţiei gamma classice $\frac{\log\Gamma(x)}{\sqrt{2\pi}}$, şi se defineşte astfel:

$$G_p(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{0\leq i<p^n} (z+i)(\log_p(z+i)-1), \tag{18}$$

care are sens pentru orice $z \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p$, vezi [10], unde $\log_p$ este logaritmul Iwasawa ([12]). Koblitz [16] introduce o variantă twistată a funcţiei log gamma pentru a demonstra mai simplu formula lui Leopold pntru $L_p(1,\chi)$, unde $L_p(s,\chi)$ este L-funcţia p-adică a caracterului χ şi formulele exprimând $L_p'(0,\chi)$ şi $L_p(k,\chi)$, $k \geq 1$, în termenii funcţiei log gamma p-adice. Funcţia log gamma p-adică twistată se defineşte astfel:

$$G_{p,\xi}(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{rp^n} \sum_{0\leq i<rp^n} \xi^i (z+i)(\log_p(z+i)-1), \tag{19}$$

unde $\xi^r = 1$, r este ordinul lui ξ care este prim cu p şi $z \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p$. În particular $G_{p,1} = G_p$. Funcţia log gamma p-adică twistată este convoluţia lui $-\log_p$ cu μ_ξ (distribuţia lui Koblitz, $d = 1$, $z = \xi \neq 1$), i.e.

$$G_{p,\xi}(z) = -\int\limits_{\mathbb{Z}_p} \log_p(z+t)\mathrm{d}\mu_\xi(t),\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p, \tag{20}$$

care este local analitică şi verifică următoarea ecuaţie funcţională

$$\xi G_{p,\xi}(z+1) - G_{p,\xi}(z) = \log_p z,\ z \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p. \tag{21}$$

Derivata de ordinul $k \geqslant 1$ a lui $G_{p,\xi}$ este

$$G_{p,\xi}^{(k)}(z) = (-1)^k (k-1)! \int\limits_{\mathbb{Z}_p} \frac{1}{(z+t)^k} \mathrm{d}\mu_\xi(t) \in H(\mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p). \tag{22}$$

Teorema 6. *Funcţia log gamma p-adică twistată $G_{p,\xi}$ şi toate derivatele sale sunt transcendente peste $\mathbb{C}_p(Z)$. În plus, toate zerourile lui $G_{p,\xi}$ şi ale derivatelor sale sunt algebrice.*

Teorema 7. *Funcţia log gamma p-adică $G_{p,\xi}$ şi derivatele sale sunt liniar independent peste $\mathbb{C}_p(Z)$. În particular, $G_{p,\xi}$ nu poate fi soluţia unei ecuaţii diferenţiale de forma $\sum\limits_{k=0}^{m} P_k G_{p,\xi}^{(k)} = 0$, unde pentru orice $0 \leqslant k \leqslant m$ avem $P_k \in \mathbb{C}_p(Z)$, nu toate nule, şi $m \in \mathbb{N}$.*

Propoziţia 5. *Fie μ o distribuţie Lipschitz tare definită pe orbita unui element transcendent $x \in \mathbb{C}_p$. Atunci, pentru orice $s \in \mathbb{N}^*$*

$$F_{s,\mu}(z) = \int\limits_{O(x)} \frac{1}{(z-t)^s} d\mu(t) \in H_0^G(\mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus O(x)) \tag{23}$$

şi este transcendentă peste $\mathbb{Q}_p(\mathbb{Z})$.

Propoziţia 6. *Fie $k \in \mathbb{N}^*$. Pentru orice numere naturale nenule $s_1 < s_2 < ... < s_k$ fie $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_k$ distribuţii Lipschitz tari pe orbita unui element transcendent $x \in \mathbb{C}_p$. Atunci, funcţiile*

$$F_{s_i,\mu_i}(z) = \int\limits_{O(x)} \frac{1}{(z-t)^{s_i}} d\mu_{s_i}(t), \ i = \overline{1,k} \tag{24}$$

sunt liniar independente peste $\mathbb{Q}_p(\mathbb{Z})$. În particular, rezultă că nicio funcţie $F_{s,\mu}$ nu poate verifica o ecuaţie diferenţială de forma $\sum\limits_{j=0}^{m} P_j F_{s,\mu}(j) = 0$, unde $m \in \mathbb{N}^*$ şi $P_j \in \mathbb{Q}_p(\mathbb{Z})$, $j = \overline{0,m}$, nu sunt toţi nuli.

Propoziţia 7. *Fie $(s_i)_{i\geqslant 1}$ un şir strict crescător de numere întregi pozitive şi μ_{s_i}, $i \geqslant 1$, distribuţii Lipschitz tari definite pe orbita unui element transcendent $x \in \mathbb{C}_p$. Dacă o funcţie $G : \mathbb{P}^1(\mathbb{C}_p) \setminus O(x) \to \mathbb{C}_p$ poate fi scrisă sub forma unei serii $G(z) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P_i(z) F_i(z)$, care converge pe $E(x, \varepsilon_n)$, unde $(\varepsilon_n)_{n\geqslant 1}$ este şirul fundamental asociat orbitei $O(x)$, $P_i(z) \in \mathbb{Q}_p(z)$ şi $F_i(z) = F_{s_i,\mu_{s_i}}(z) = \int\limits_{O(x)} \frac{1}{(z-t)^{s_i}} d\mu_{s_i}(t)$, $i = \overline{1,k}$, atunci pentru n suficient de mare avem $\|G\|_{E(x,\varepsilon_n)} = \sup\limits_{i\geqslant 1} \|P_i F_i\|_{E(x,\varepsilon_n)}$ şi reprezentarea este unică.*

Bibliografie

[1] V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharescu, *On the closed subfields of* $\mathbb{C}_p$, J. Number Theory 68, 2 (1998), p. 131-150.

[2] V. Alexandru, N. Popescu, A. Zaharescu, *Trace on* $\mathbb{C}_p$, J. Number Theory 88, 1 (2001), p. 13-48.

[3] V. Alexandru, E.L. Popescu, N. Popescu, *On the continuity of the trace*, Proceedings of the Romanian Academy, Series A, vol. bf 5, nr. 1 (2005), p. 11-16.

[4] V. Alexandru, N. Popescu, M. Vâjâitu and A. Zaharescu,*The p-adic measure on the orbit of an element of* $\mathbb{C}_p$, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, Vol. 118 (2007), p. 197-216.

[5] V. Alexandru, C.C. Niţu and M. Vâjâitu, *On the norm of the trace functions and applications*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 56(104) No. 1 (2013), p. 47-54.

[6] V. Alexandru, C.C. Niţu and M. Vâjâitu and A.Zaharescu *On the norm of Krasner analytic functions with applications to transcendence results*, Journal of Pure and Applied Algebra, vol. 219 (2015), p. 4607 - 4618.

[7] V. Alexandru, N. Popescu, M. Vâjâitu and A. Zaharescu,*On the zeros of Krasner analytic functions*, Algebr. Represent. Theor., Vol. 16, 3 (2013), p. 895-904.

[8] Y. Amice, *Les nombres p-adiques*, Presse Univ. de France, Collection Sup., 1975.

[9] J. Ax, *Zeros of polynomials over local fields-The Galois action*, J. Algebra 15 (1970),p. 417-428

[10] J. Diamond, *The p-adic log gamma function and p-adic Euler constants*, Trans. Amer. Math. Soc. 233 (1977), p. 321-337.

[11] J. Fresnel, M. van der Put, *Rigid Analytic Geometry and its Applications*, Birkhauser, 2004.

[12] K. Iwasawa, *Lectures on p-Adic L-Functions*, Princeton University Press, 1972.

[13] F. Gouvea, *p-adic Numbers - An introduction*, Springer - Verlag Berlin Heidelberg, 1997.

[14] G. Groza, A. Popescu,*Extinderi de corpuri valuate*, Editura Academiei Române, Bucureşti, 2011.

[15] N. Koblitz, *Interpretation of the p-adic log gamma function and Euler constants using the Bernoulli measure*, Trans. Amer. Math. Soc. bf 242 (1978), p. 261-269.

[16] N. Koblitz, *A new proof of certain formulas for p-adic L-functions*, Duke Math. J. 46, 2 (1979), p. 455-468.

[17] N. Koblitz, *Interpretation of the p-Adic Log Gamma Function and Euler Constants Using the Bernoulli Measure*, Transactions of the American Mathematical Society, 242 (1978), p. 261-269

[18] N. Koblitz, *p-adic Numbers, p-adic Analysis and Zeta - Functions* (2 ed.), Springer, 1984.

[19] N. Koblitz, *p-adic Analysis: A Short Course on Recent Work*, Cambridge University Press, 1980.

[20] T. Kubota and H. Leopold, *Eine p-adische Theorie der Zetawerte.* I, J. Reine Angew Math. 214/215 (1965), p. 328-339.

[21] B. Mazur, P. Swinnerton-Dyer, *Arithmetic of Weil curves*, Invent. Math. 25 (1974), p. 1-61.

[22] R. Murty, *Introduction to p-adic Analytic Number Theory*, American Mathematical Society/ International Press, 2002.

[23] C.C. Niţu, M. Vâjâitu, *On a theorem of Vishik*, in progress.

[24] A. M. Robert, *A course in p-adic analysis*, Springer-Verlag New-York, Inc., 2000.

[25] W.H. Schikhov *Ultrametric calculus. An Introduction to p-adic analysis*, Cambridge University Press, 1984.

[26] M. Vâjâitu, *Integral Representations and the Behavior of Krasner Analytic Functions Around Singular Points*, Algebr. Repres. Theor., Vol. 16, 6 (2013), p. 1611-1620.

[27] M. Vâjâitu, *On a class of Krasner analytic functions and applications*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie Tome 58(106) No. 4 (2015), p. 475-482.

[28] M. Vâjâitu, A. Zaharescu, *Non-Archimedean Integration and Applications*, The publishing house of the Romanian Academy, 2007.

[29] M. Vâjâitu, A. Zaharescu, *Trace functions and Galois invariant p-adic measures*, Publ. Mat. 50 (2006), p. 43-55.

[30] M.M. Vishik, *Nonarchimedian spectral theory*, Journal of Soviet Mathematics, September 1985, Volume 30, Issue 6, p. 2513-2555.

[31] A. Wiles, *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem*, Annals of Mathematics, (142) 1995, p. 443-551.