ACADEMIA ROMÂNĂ
Institutul de Matematică "Simion Stoilow"

Teză de doctorat

Rezumat

Comportament asimptotic pentru ecuații de evoluție nelocale

TATIANA IONICA IGNAT

Coordonator Științific

Prof. Dr. LUCIAN BEZNEA

BUCHAREST, 2017

Rezumat

Această teză este dedicată studiului proprietăților asimptotice ale soluțiilor câtorva probleme de difuzie nelocală. Obiectivul este acela de a caracteriza primul termen in dezvoltarea asimptotică a soluțiilor atunci când variabila timp tinde la inifinit. Principala strategie utilizată în această teză este bazată pe argumente de scalare. În principal, acest lucru înseamnă ca vom rescala convenabil soluțiile și reducem analiza comportamentului soluțiilor pentru timp mare la studiul compacității traiectorilor rescalate. Această metodă a fost introdusă de Kamin și Vazquez [16].

Pentru început analizăm cel mai simplu model prezentat în această teză. În Capitolul 2 studiem următoarea ecuație nelocală

$$\begin{cases} u_t(x,t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} J(x-y)(u(y,t)-u(x,t))\,dy, & x\in\mathbb{R},\ t>0,\\ u(x,0)=u_0(x), & x\in\mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

Considerăm $J:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție nenegativă, netedă, pară, cu masa unu și data inițială $u_0\in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$. Ecuații de tipul (1) și variații ale sale, au fost recent utilizate în modelarea proceselor de difuzie, de exemplu în biologie, dinamica dislocării, etc... Facem referire aici la lucrările [2], [4], [8], [9] și referințele din acestea.

Așa cum este enunțat în [8], dacă $u(x,t)$ este densitatea unei singure populații la punctul x și timp t iar $J(x,y)$ este distribuția de probabilitate a saltului din punctul y în punctul x, atunci $(J*u)(x,t)=\int_{\mathbb{R}} J(x-y)u(y,t)dy$ esta rata cu care indivizii ajung în poziția x de la toate celelalte locații iar $-u(x,t)=-\int_{\mathbb{R}} J(y-x)u(x,t)dy$ este rata cu care ei părăsesc locația x pentru a călatorii în alte locuri. Aceste considerente, în absența unor intervenții externe, conduc imediat la faptul că densitatea u satisface ecuația (1). Această ecuație poartă numele de *ecuație de difuzie nelocală* deoarece, în contrast cu ecuația clasică a căldurii $u_t=u_{xx}$, difuzia densității u la timpul t și punctul x depinde de toate valorile lui u într-o vecinătate a lui x. Pentru o funcție J cu suportul în intervalul $(-1,1)$, putem să rescriem ecuația (1) ca o integrală in intervalul $(x-1,x+1)$. Referitor la bine-punerea

acestei probleme se obține imediat ca pentru orice data inițială $u_0 \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ există o unică soluție $u \in C([0,\infty), L^p(\mathbb{R}))$. Deoarece operatorul $\mathcal{L}u = J * u - u$ este liniar și continuu pe spațiile $L^p(\mathbb{R})$ soluția este de fapt $C^\infty([0,\infty), L^p(\mathbb{R}))$. Acesta este un rezultat clasic pentru ecuatiile de tip (1).

Studiul comportamentului asimptotic al soluțiilor ecuației (1) atunci când timpul este mare a fost început în [5]. Utilizând reprezentarea Fourier a soluțiilor autorii au obținut ca pentru timpi mari soluția u se apropie de nucleul rescalat al căldurii. În Capitolul 2 demonstrăm același rezultat folosind un argument diferit. Principala noutate este metoda folosită, argumente de rescalare. Această metodă este de obicei utilizată în cazul problemelor neliniare pentru a obține primul termen în dezvoltarea asimptotică a soluțiilor. De fapt pentru a înțelege dificultatea aplicării acestei metode în cazul problemelor neliniare, analizăm mai întâi cazul liniar.

Rezultatul principal în Capitolul 2 este următorul: Pentru orice $u_0 \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ și $p \in [1,\infty]$ soluția ecuației (1) satisface

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - MG_{At}\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0 \tag{2}$$

unde

$$G_t(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4t}\right)$$

este nucleul căldurii și

$$M = \int_{\mathbb{R}} u_0(x)dx, \quad A = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} J(z)z^2 dz.$$

Așa cum vom explica în Capitoul 2, ecuația (1) nu are efect regularizant. Deci, nu ne putem aștepta ca soluțiile sa fie mai regulate decât este data inițială. Din acest motiv impunem ca data inițială să aparțină spațiului $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ spre deosebire de cauzul clasic al ecuației căldurii unde se poate considera data initială în $L^1(\mathbb{R})$. Fără această presupunere nu putem garanta ca pentru timpi t pozitivi soluția se va găsi în $L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$, și deci estimarea acestor norme nu va avea sens.

Rezultatele din Capitolul 2 sunt bazate pe lucrarea [15].

Odată ce am înțeles cum funcționează argumentul de scalare pentru problema liniară, următorul pas este să utilizăm aceleași metode pentru probleme neliniare. Analizăm următoarea ecuație de convecție- difuzie nelocală:

$$\begin{cases} u_t = J * u - u + G * |u|^{q-1}u - |u|^{q-1}u, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u(0) = \varphi. \end{cases} \tag{3}$$

În continuare vom preciza ipotezele impuse nucleelor J și G. Vom presupune că $J, G : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ sunt doua funcții pozitive cu masa unu, J având simetrie radială și fiind strict pozitivă intr-o vecinătate a originii. Rezultate asupra existenței și unicității soluțiilor acestei ecuații au fost obținute anterior în [14]. Folosind teorema lui Banach de punct fix se poate demonstra relativ ușor că pentru orice $\varphi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ există o unică soluție $u \in C([0,\infty), L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}))$. De asemenea se poate arăta ușor că soluția se găsește în $C^1([0,\infty), L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}))$.

Rezultatul principal al Capitolului 3 este următorul: Pentru orice $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ soluția u a sistemului (3) satisface

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - U_m(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 1 \le p < \infty, \tag{4}$$

unde m este masa datei inițiale φ și

- dacă $q > 1 + 1/d$ sau $B = 0_{1,d}$, U_m este nucleul căldurii rescalat, soluție a ecuației

$$\begin{cases} U_t = A\Delta U, & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ U(0) = m\delta_0. \end{cases} \tag{5}$$

- dacă $q = 1 + 1/d$ și $B \neq 0_{1,d}$, U_m este unica soluție a următoarei ecuații

$$\begin{cases} U_t = A\Delta U - B \cdot \nabla(|U|^{1/d} U), & x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ U(0) = m\delta_0. \end{cases} \tag{6}$$

În continuare vom spune câteva cuvinte despre profilul asimptotic U_m. Este ușor de verificat că

$$U_m(t,x) = t^{-d/2} f_m\Big(\frac{x}{\sqrt{t}}\Big),$$

unde f_m este soluția regulată a ecuației

$$-A\Delta f_m - \frac{1}{2} x \cdot \nabla f_m = \frac{d}{2} f_m - \alpha B \cdot \nabla(|f_m|^{q-1} f_m) \quad \text{in } \mathbb{R}^d,$$

cu $\int_{\mathbb{R}^d} f_m = m$ și

$$\alpha = \begin{cases} 1, & q = 1 + \frac{1}{d}, \\ 0, & q > 1 + \frac{1}{d}. \end{cases}$$

În cazul în care termenul neliniar este supercritic, adică $q > 1 + 1/d$, primul termen în dezvoltarea asimptotică a soluțiilor a fost analizat în [14], în ipoteza că $J \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, clasa funcțiilor ce descresc repede la infinit. În acest caz ideea principală este că partea neliniară descrește mai repede decat semigrupul liniar și atunci primul termen în dezvoltarea asimptotică pentru timp mare este dat de semigrupul liniar. Acest fenomen a fost observat în [7] în cazul ecuației clasice de convecție-difuzie.

Scopul Capitolului 3 este sa dăm un răspuns în cazul critic $q = 1 + 1/d$ chiar dacă vom da o demonstrație care tratează ambele situații, atât cazul critic cât și cel super-critic. Metoda folosită este așa numita *four step method* introdusă în [16], ce constă în analiza orbitelor $\{u_\lambda(t)\}_{\lambda>0}$.

În continuare vom preciza punctele cheie ale metodei folosite. Introducem familia $u_\lambda(t,x) = \lambda^d u(\lambda^2 t, \lambda x)$. Obținem că u_λ satisface următoarea ecuație rescalată

$$\begin{cases} (u_\lambda)_t = \lambda^2(J_\lambda * u_\lambda - u_\lambda) + \lambda^{d(1-q)+2}(G_\lambda * u_\lambda^q - u_\lambda^q), \quad x \in \mathbb{R}^d, t > 0, \\ u_\lambda(0,x) = \varphi_\lambda(x), \end{cases} \tag{7}$$

unde $\varphi_\lambda(x) = \lambda^d\varphi(\lambda x)$, $J_\lambda(x) = \lambda^d J(\lambda x)$ și $G_\lambda(x) = \lambda^d G(\lambda x)$.

Mai întâi punem în evidență că proprietatea (4) este echivalentă cu faptul că de exemplu la timpul $t = t_0$ familia rescalată $u_\lambda(t_0)$ converge la o anumită funcție $U(t_0)$ în orice normă $L^p(\mathbb{R}^d)$, $1 \leq p < \infty$. Apar o mulțime de probleme care folosesc această abordare. Mai întâi trebuie să demonstrăm că familia $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ este compactă și prin urmare, până la un subșir, converge la o anumită funcție U. La pasul următor caracterizăm limita funcției U. Principala dificultate în demonstrația compacității traiectoriilor $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$ este lipsa oricărei informații despre derivatele funcției u. Reamintim estimarea energetică: pentru orice $0 < t_1 < t_2 < \infty$ are loc:

$$\|u_\lambda(t_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \lambda^2 \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} J_\lambda(x-y)(u_\lambda(t,x) - u_\lambda(t,y))^2\, dxdydt = \|u_\lambda(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leq C(t_1). \tag{8}$$

Această estimare este corespondenta nelocală a estimării clasice energetice

$$\|u(t_2)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} + \int_{t_1}^{t_2} \int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u|^2 dxdt = \|u(t_1)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

care are loc pentru problema clasică de convecție-difuzie

$$u_t = \Delta u + a \cdot \nabla(|u|^{q-1}u).$$

Demonstrăm că estimarea (8) este suficientă pentru a obține compacitatea traiectoriilor $\{u_\lambda\}_{\lambda>0}$. Aceasta necesită o nouă versiune a argumentelor clasice de compacitate în spațiul

$L^p((0,T)\times\Omega)$, care poate fi adaptată la ecuațiile de evoluție nelocală. Reamintim acum un rezultat clasic de compacitate în spațiul $L^p((0,T),B)$, unde B este spațiu Banach. Lema Aubin-Lions-Simon [18, Th. 5] presupune că avem trei spații Banach $X\hookrightarrow B\hookrightarrow Y$ unde scufundarea $X\hookrightarrow B$ este compactă. Un subșir $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este relativ compact în $L^p((0,T),B)$ (și în $C([0,T],B)$ dacă $p=\infty$) dacă putem garanta că $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este mărginit în $L^p((0,T),X)$ și $\|\tau_h f_n - f_n\|_{L^p((0,T-h),Y)}\to 0$ când $h\to 0$ uniform în n.

Există situații în care nu putem mărgini uniform un șir $\{g_n\}_{n\geq 1}$ într-un spațiu care este scufundat compact în $L^p(\Omega)$. În schimb avem estimări asupra unor forme Dirichlet care variază cu n, estimări care ne permit să obținem compacitatea șirului $\{g_n\}_{n\geq 1}$ (vezi [3], [17] și [1, Th. 6.11, p. 128]). Mai precis, alegem $1<p<\infty$ și $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ un domeniu neted. Funcția $\rho:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ este o funcție radială, netedă, nenegativă cu suport compact, neidentic zero ce satisface $\rho(x)\geq\rho(y)$ dacă $|x|\leq|y|$. Alegem $\rho_n(x)=n^d\rho(nx)$. Fie $\{g_n\}_{n\geq 1}$ un șir mărginit în spațiul $L^p(\Omega)$ astfel încât

$$n^p\int_\Omega\int_\Omega \rho_n(x-y)|g_n(x)-g_n(y)|^p dxdy\leq M.$$

Așa cum a fost demonstrat în [3], [17], [1, Th. 6.11, p. 128], șirul $\{g_n\}_{n\geq 1}$ este relativ compact în $L^p(\Omega)$. Principala noastra contribuție este să folosim acest criteriu de compacitate în loc de scufundarea compactă $X\hookrightarrow B$ din Lema Aubin-Lions-Simon și să obținem un nou criteriu de compacitate în $L^p((0,T)\times\Omega)$. Principalul instrument de compacitate pe care îl demonstrăm și îl folosim în Capitolul 3 este dat de Teorema 3.2.1. Demonstrăm că dacă $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este un șir mărginit în spațiul $L^p((0,T)\times\Omega)$, $1<p<\infty$, care verifică ecuația

$$n^p\int_0^T\int_\Omega\int_\Omega \rho_n(x-y)|f_n(t,x)-f_n(t,y)|^p dxdydt\leq M \tag{9}$$

și

$$\|\partial_t f_n\|_{L^p((0,T),W^{-1,p}(\Omega))}\leq M \tag{10}$$

atunci $\{f_n\}_{n\geq 1}$ este relativ compact în $L^p((0,T)\times\Omega)$.

Rezultatele din Capitolul 3 sunt bazate pe lucrarea [12].

În ultimul capitol al tezei considerăm un model de convecție-difuzie diferit de cele anterioare. Cele două nuclee care apar în partea difuzivă, respectiv convectivă, concurează între ele. Analizăm următoarea ecuație

$$\begin{cases} u_t(t,x) &= \displaystyle\int_{\mathbb{R}} K(x-y)(u(t,y)-u(t,x))dy \\ & \qquad + \displaystyle\int_{\mathbb{R}} G(x-y)f\Big(\frac{u(t,y)+u(t,x)}{2}\Big)dy, t>0, x\in\mathbb{R}, \\ u(0) &= \varphi, \end{cases} \tag{11}$$

în cazul particular când $f(u) = u^2$. Acest model a fost propus în [6] ca o regularizare a următoarei ecuații de advecție nelocală inspirată din teoria peridinamică

$$u_t(t,x) = \int_{\mathbb{R}} G(x-y)f\Big(\frac{u(t,y)+u(t,x)}{2}\Big)dy.$$

Modelul general în [6] presupune că funcția K este o funcție pară și G este o funcție impară. Consideram aici nucleele K și G care sunt integrabile. Pentru simplitate presupunem că nucleul K este de masă unu. Noi vom analiza bine-punerea problemei (11) și comportamentul în timp mare al soluțiilor sale. Rezultatele prezentate aici se bazează pe ipoteza că nucleul K domina nucleul G, adică pentru o constantă pozitivă $C = C_{GK}$ are loc inegalitatea

$$|G(x)| \le C_{GK}K(x), \quad \forall\, x\in\mathbb{R}. \tag{12}$$

Pentru orice $u_0 \in L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R})$ demnstrăm că există o unică soluție locală $u \in C([0,T_{max}], L^1(\mathbb{R})\cap L^\infty(\mathbb{R}))$ a ecuației (11), soluție ce conservă masa datei inițiale. Mai mult, în ipoteza unei date inițiale mici $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} < 1/C_{GK}$, soluția este globală, păstrează semnul datei inițiale și satisface

$$\|u(t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \le \|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}, \|u(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})}.$$

Odată ce bine-punerea problemei a fost stabilită, obținem descreșterea soluțiilor sistemului (11). Demonstrăm că

$$\|u(t)\|_{L^2(\mathbb{R})} \le C(\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}, \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})})t^{-\frac{1}{4}}, \quad \forall t>0. \tag{13}$$

În plus, dacă data inițială satisface condiția $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \le 1/(2C_{GK})$, atunci pentru orice $2\le p<\infty$ are loc următoarea estimare

$$\|u(t)\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C(\|\varphi\|_{L^1(\mathbb{R})}, \|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})})t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})}, \quad \forall t>0. \tag{14}$$

Condiția de mai sus, ca norma $L^\infty(\mathbb{R})$ a soluției să fie mică este similară cu condiția Courant–Friedrichs–Lewy (CFL) care apare în studiul stabilității aproximărilor numerice pentru legile de conservare (vezi [10, Ch. 3]). Aceasta garantează că partea difuzivă controlează termenul convectiv neliniar. Diferenta față de ecuațiile de convecție-difuzie nelocală anterioare [14, 13, 12] este că în acest caz termenul convectiv

$$Tu = \int_{\mathbb{R}} G(y-x)(\frac{u(t,y)+u(t,x)}{2})^2 dy$$

nu satisface condiția disipatvă $(Tu,u)_{L^2(\mathbb{R})} \leq 0$. Astfel ar trebui impuse condiții suplimentare asupra datei inițiale, deci și asupra soluțiilor, pentru a controla acest termen cu partea difuzivă.

Ultimul rezultat al acestui capitol se referă la creșterea asimptotică a soluției u. Introducem următorii termeni

$$A = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} K(z)z^2 dz \quad \text{și} \quad B = \int_{\mathbb{R}} G(z)z dz.$$

Principalul rezultat privind creșterea asimptotică a soluției sistemului (11) este următorul: presupunem că $K \in L^1(\mathbb{R}, 1+x^2)$ este pozitiv într-o vecinătate a originii. Pentru orice $\varphi \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ cu $\|\varphi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1/(2C_{GK})$ soluția u a sistemului (11) verifică

$$\lim_{t\to\infty} t^{\frac{d}{2}(1-\frac{1}{p})} \|u(t) - U(t)\|_{L^p(\mathbb{R}^d)} = 0, \quad 1 \leq p < \infty,$$

unde U este soluția ecuației Burgers vâscoasă

$$\begin{cases} U_t = AU_{xx} - \frac{B}{2}(U^2)_x, & t > 0, x \in \mathbb{R}^d, \\ U(0) = m\delta_0, \end{cases}$$

și m este masa datei inițiale φ. În acest caz U poate fi calculat explicit folosind transformarea Hoph-Cole. Rezultatele din capitolul 4 se bazează pe lucrarea [11].

Bibliografie

[1] Fuensanta Andreu-Vaillo, José M. Mazón, Julio D. Rossi, and J. Julián Toledo-Melero. *Nonlocal diffusion problems.* Mathematical Surveys and Monographs 165. Providence, RI: American Mathematical Society (AMS); Madrid: Real Sociedad Matemática Española. xv, 256 p. $ 82.00 , 2010.

[2] Peter W. Bates, Paul C. Fife, Xiaofeng Ren, and Xuefeng Wang. Traveling waves in a convolution model for phase transitions. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 138(2):105–136, 1997.

[3] Jean Bourgain, Haim Brezis, and Petru Mironescu. Another look at Sobolev spaces. Menaldi, José Luis (ed.) et al., Optimal control and partial differential equations. In honour of Professor Alain Bensoussan's 60th birthday. Proceedings of the conference, Paris, France, December 4, 2000. Amsterdam: IOS Press; Tokyo: Ohmsha. 439-455 (2001)., 2001.

[4] C. Carrillo and P. Fife. Spatial effects in discrete generation population models. *J. Math. Biol.*, 50(2):161–188, 2005.

[5] E. Chasseigne, M. Chaves, and J. D. Rossi. Asymptotic behavior for nonlocal diffusion equations. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 86(3):271–291, 2006.

[6] Qiang Du, James R. Kamm, R. B. Lehoucq, and Michael L. Parks. A new approach for a nonlocal, nonlinear conservation law. *SIAM J. Appl. Math.*, 72(1):464–487, 2012.

[7] M. Escobedo and E. Zuazua. Large time behavior for convection-diffusion equations in $\mathbf{R}^N$. *J. Funct. Anal.*, 100(1):119–161, 1991.

[8] P. Fife. Some nonclassical trends in parabolic and parabolic-like evolutions. In *Trends in nonlinear analysis*, pages 153–191. Springer, Berlin, 2003.

[9] Paul C. Fife and Xuefeng Wang. A convolution model for interfacial motion: the generation and propagation of internal layers in higher space dimensions. *Adv. Differential Equations*, 3(1):85–110, 1998.

[10] E. Godlewski and P.A. Raviart. *Hyperbolic systems of conservation laws.* Mathématiques & Applications (Paris). 3-4. Paris: Ellipses, 1991.

[11] Liviu I. Ignat and Tatiana I. Ignat. Long-time behavior for a nonlocal convection diffusion equation. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 455(1):816–831, 2017.

[12] Liviu I. Ignat, Tatiana I. Ignat, and Denisa Stancu-Dumitru. A compactness tool for the analysis of nonlocal evolution equations. *SIAM J. Math. Anal.*, 47(2):1330–1354, 2015.

[13] Liviu I. Ignat and Ademir F. Pazoto. Large time behaviour for a nonlocal diffusion—convection equation related with gas dynamics. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 34(9):3575–3589, 2014.

[14] Liviu I. Ignat and Julio D. Rossi. A nonlocal convection-diffusion equation. *J. Funct. Anal.*, 251(2):399–437, 2007.

[15] Tatiana I. Ignat. Asymptotics for nonlocal evolution problems by scaling arguments. *Differ. Equ. Appl.*, 5(4):613–626, 2013.

[16] S. Kamin and J. L. Vázquez. Fundamental solutions and asymptotic behaviour for the p-Laplacian equation. *Rev. Mat. Iberoamericana*, 4(2):339–354, 1988.

[17] Augusto C. Ponce. An estimate in the spirit of Poincaré's inequality. *J. Eur. Math. Soc. (JEMS)*, 6(1):1–15, 2004.

[18] Jacques Simon. Compact sets in the space $L^p(0, T; B)$. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146:65–96, 1987.