INSTITUTUL
DE
MATEMATICĂ

INSTITUTUL NAȚIONAL
PENTRU CREAȚIE
STIINȚIFICĂ ȘI TEHNICĂ

SUR LE THÉORÈME DE STONE

par

ION COLOJOARA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No.24/1976

BUCUREȘTI

SUR LE THÉORÈME DE STONE

par

ION COLOJOARA*)

Decembre 1976

*) *Facultatea de matematică, Universitatea București, str. Academiei 14, București, România.*

SUR LE THÉORÈME DE STONE

par

Ion Colojoară.

Résumé : On démontre le resultat suivant : toute représetation cuasi-unitaire d'un espace de Fréchet nucléaire T dans une limite projective d'espaces de Hilbert, est la transformée d'une mesure spectrale cuasi-autoadjointe sur les ensembles cylindriques de T'.

0. Préliminaires

Limites projectives, espaces nucléaires

0.1. Définition. Soient $(X, p_\alpha)_{\alpha \in A}$ et $(Y, q_\beta)_{\beta \in B}$ deux espaces localement convexes. Une application T, $X \longrightarrow Y$ est nucléaire si il existe :

une suite $(x'_n)_{n \in N} \subset X'$ équicontinue

une suite $(y_n)_{n \in N} \subset Y$ bornée

une suite $(\lambda_n)_{n \in N} \subset C$ sommable

tels que :

$$T(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, x'_n \rangle y_n \qquad (\forall)\ x \in X$$

la convergence étant dans $(Y, q_\beta)_{\beta \in B}$.

Une application nucléaire est linéaire et continue et même compacte.

Si X et Y sont deux espaces normables, alors on peut supposer que $\|x'_n\| \leq 1$ et $\|y_n\| \leq 1$ $(\forall) n \in N$. Alors T est nucléaire si et seulement si il existe des suites $(u'_n) \subset X'$; $(v_n) \subset Y$ tels que

$$Tx = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, u'_n \rangle v_n$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} \|u'_n\| \cdot \|v_n\| < \infty .$$

Si $X = Y = H$ est un espace de Hilbert, un opérateur positif $T: H \to H$ est nucléaire et et seulement si la suite des valeurs propres de T est sommable.

0.2. Définition : Soit $(A, \leq)$ un ensemble filtrant et soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'ensemble nevides. On suppose que pour tout $\alpha \leq \beta$ il existe une application

$$\pi_{\alpha\beta}: X_\beta \longrightarrow X_\alpha$$

telle que

$$\pi_{\alpha\alpha} = I_{X_\alpha}$$

$$\pi_{\alpha\gamma} = \pi_{\alpha\beta} \circ \pi_{\beta\gamma} \qquad (\forall)\ \alpha \le \beta \le \gamma$$

Un tel système $(X_\alpha , \pi_{\alpha\beta})$ est dit <u>projective</u>. La <u>limite projective</u> du système $(X_\alpha , \pi_{\alpha\beta})$ est par définition, l'ensemble

$$\overleftarrow{X} = \lim pr\ X_\alpha := \left\{ (x_\alpha)_{\alpha\in A} \in \prod_{\alpha\in A} X_\alpha \;\middle|\; x_\alpha = \pi_{\alpha\beta}(x_\beta) \quad (\forall)\ \alpha \le \beta \right\}$$

Notons par $\pi_\alpha : \overleftarrow{X} \longleftarrow X_\alpha$ la projection canonique $\pi_\alpha(x) = x_\alpha$, alors

$$\pi = \pi_{\alpha\beta} \circ \pi_\beta \qquad (\forall)\ \alpha \le \beta$$

0.3. <u>Remarque</u>. Si $X = \lim pr\ X_\alpha$ et si pour tout $\alpha \in A$ il existe une application $h_\alpha : T \longrightarrow X_\alpha$ telle que

$$h_\alpha = \pi_{\alpha\beta} \circ \pi_\beta \qquad (\forall)\ \alpha \le \beta$$

alors, si nous notons $h(t) := (h_\alpha(t))_{\alpha\in A}$ il résulte que $f : T \longrightarrow X$ est la seule application qui vérifient

$$h_\alpha = \pi_\alpha \circ h$$

0.4. <u>Remarque</u>. Soient $(X_\alpha , \pi_{\alpha\beta})_{\alpha\in A}$, $(Y_\beta , \theta_{\alpha\beta})_{\alpha\in A}$ deux systèmes projectives indexés apres le même ensemble A et soient X et Y leurs limites projectives. Si pour tout $\alpha \in A$ il existe une application $f_\alpha : X_\alpha \longrightarrow Y_\alpha$ telle que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{tikzcd} X_\beta \arrow[r, "f_\beta"] \arrow[d, "\pi_{\alpha\beta}"'] & Y_\beta \arrow[d, "\theta_{\alpha\beta}"] \\ X_\alpha \arrow[r, "f_\alpha"] & Y_\alpha \end{tikzcd} \qquad \alpha \le \beta$$

alors il existe une application unique $f : X \longrightarrow Y$, telle que $f_\alpha \circ \pi_\alpha = \theta_\alpha \circ f$

0.5. <u>Définition</u> : Un système $(f_\alpha)_{\alpha\in A}$ (tel que celui de la remarque 0.4) est un <u>système projectif</u> d'applications et l'application f est la <u>limite projective</u> de ce système :

$$f = \lim pr\, f_\alpha$$

et elle est définie par l'égalitée :

$$f(x) := \left\{ f_\alpha\,(\pi_\alpha(x)) \right\}_{\alpha\in A} = \left\{ f_\alpha(x_\alpha) \right\}_{\alpha\in A}$$

0.6. Définition. Si chaque X_α est un espace localement-convexe muni de la topologie $\mathcal{E}_\alpha$ et $\pi_{\alpha\beta} \in L(X_\beta\,,\,X_\alpha)$, alors la moins fine topologie sur $\overleftarrow{X} := \lim pr\, X_\alpha$ rendant continues toutes les applications $\pi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ est une topologie localement convexe (séparée, si toutes les topologies $\mathcal{E}_\alpha$ sont séparées) qu'on va noter par $\overleftarrow{\mathcal{E}}$. La paire $(\overleftarrow{X}, \overleftarrow{\mathcal{E}})$ est la limite projective du système d'espaces localement convexes $(X_\alpha\,, \pi_{\alpha\beta}\,)$.

0.7. Soit $(X_\alpha\,, p_\alpha)_{\alpha\in A}$ un espace localement convexe, séparé et on suppose que A est un ensemble filtrant. Notons

$$K_\alpha := p_\alpha^{-1}(o) \quad . \qquad X_\alpha := X/K_\alpha$$

et définissons $\varphi_\alpha : X \longrightarrow X_\alpha$ et $\|\cdot\|_\alpha : X_\alpha \longrightarrow R_+$ par $\varphi(x) := x_\alpha = x + K_\alpha$ et $\|x_\alpha\|_\alpha := p_\alpha(x)$ $(\forall)\, x \in X_\alpha$, respectivement. $\|\cdot\|_\alpha$ est une norme sur X_α et $\|\varphi_\alpha\| \leq 1$. Si $\alpha\leq\beta$ il résulte que $K_\beta \subset K_\alpha$, donc il existe une application $\varphi_{\alpha\beta} : X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ avec les propriétéss :

$$\varphi_\alpha = \varphi_{\alpha\beta}\circ\varphi_\beta \quad (\forall)\ \alpha\leq\beta\ ,$$

$$\varphi_{\alpha\gamma} = \varphi_{\alpha\beta}\circ\varphi_{\beta\gamma} \quad (\forall)\ \alpha\leq\beta\leq\gamma,$$

$$\|\varphi_{\alpha\beta}\| \leq 1\ .$$

Notons par $\widetilde{X}_\alpha$ le complété de $(X_\alpha\,, \|\cdot\|_\alpha\,)$ et par $\pi_{\alpha\beta} : \widetilde{X}_\beta \longrightarrow \widetilde{X}_\alpha$ le prolongement par continuité de $\varphi_{\alpha\beta}$ à $\widetilde{X}_\beta$; il résulte que

$$\|\pi_{\alpha\beta}\| \leq 1\ ,$$

$$\pi_{\alpha\gamma} = \pi_{\alpha\beta}\circ\pi_{\beta\gamma} \quad (\forall)\ \alpha\leq\beta\leq\gamma\ ,$$

$$\pi_{\alpha\beta}\,(\widetilde{X}_\beta) \text{ est dense dans } \widetilde{X}_\alpha\ .$$

0.8. Remarque. Soient $\overleftarrow{X}: = \lim pr(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta})$ et $f: X \longrightarrow Y$ définie par

$$f(x): = (x_\alpha)_{\alpha\in A}$$

Alors f est injective et bicontinue. Si X est complet, f est bijective, donc tout espace localement-convexe, complet est la limite projective d'un système projective d'espaces de Banach.

0.9. Définition. $(X, p_\alpha)_{\alpha\in A}$ est un espace nucléaire si pour tout $\alpha\in A$ il existe $\beta\geqslant\alpha$, tel que l'application $\pi_{\alpha\beta}: X_\beta \longrightarrow X_\alpha$ est nucléaire.

0.10. Si p_α sont des normes sur X, $\widetilde{X}_\alpha$ est le completé de (X, p_α) et

$$\pi_{\alpha\beta}|_X : X \hookrightarrow X_\alpha \qquad \text{(l'injection canonique)}$$

en plus, si $\pi_{\alpha\beta}$ est nucléaire, il existent une suite $(\lambda_n)_n \subset C$, et les suites $(x'_n)_n \subset \widetilde{X}'$; $(y_n)_n \subset \widetilde{X}_\alpha$ telles que $\|x'_n\| \leq 1$, $\|y_n\| \leq 1$ et

$$x = \pi_{\alpha\beta}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n \langle x, x_n\rangle\, y_n \qquad (\forall)\ x\in X$$

Notons par $J = \{ (\alpha,\beta)\in A\times A \mid \pi_{\alpha\beta} \text{ nucléaire}\}$, alors pour tout $i = (\alpha,\beta)\in J$ nous pouvons définir un produit scalaire :

$$(x|y)_i: = \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n| \langle x, x'_n\rangle \overline{\langle y, x'_n\rangle}$$

Il résulte que la famille des normes hilbertiennes $|x|_i: = \sqrt{(x|x)_i}$ est equivalente à la famille initiale des normes; en plus pour tout $i\in J$ il existe $j\in J$ et $j\geqslant i$, tel que $\widetilde{\pi}_{ij} : \widetilde{X}_j \longrightarrow \widetilde{X}_i$ est nucléaire. Donc

0.10.a) La topologie d'un espace nucléaire peut être définie par une famille de (semi)normes hilbertiennes.

0.10.b) Tout espace nucléaire complet est la limite projective d'un système projective d'espaces de Hilbert.

Ensembles cylindriques

0.11. Définition: Soit T un espace localement convexe, réel, séparé et soit T' son dual. Pour tout ensemble de Borel B de R^n et pour tout système $\{t_1, \ldots, t_n\} \subset T$, l'ensemble

$$C(t_1, \ldots, t_n; B) = \{ t' \in T' \mid (\langle t_1, t' \rangle, \ldots, \langle t_n, t' \rangle) \in B \}$$

est l'ensemble cylindrique de base B, déterminé par $\{t_1, \ldots, t_n\}$. Si $\{t_1, \ldots, t_n\}$ est un système des générateurs du sousespace S, alors nous notons :

$$C(S; B) := C(t_1, \ldots, t_n; B)$$

0.12. La famille $\mathcal{C}(S) := \{C(S; B) \mid B \in \mathcal{B}(R^n)\}$ des ensembles cylindriques déterminés par un sousespace S de dimension finie est une σ-algèbre, et la famille

$$\mathcal{C}_{T'} = \bigcup_{S \in \mathcal{F}(T)} \mathcal{C}(S)$$

(où $\mathcal{F}(T)$ est la famille des sous-espaces de dimension finie de T) de toutes les ensembles cylindriques de T' est un algèbre .

Notons par $\mathcal{B}_c(T')$ la σ-algèbre engendrée par l'algèbre des ensembles cylindriques. Si T' est un espace de Fréchet, séparable (en particulier, si T est nucléaire de type DF) alors $\mathcal{B}_c(T')$ coincide avec la σ-algèbre $\mathcal{B}(T')$ de toutes les ensembles de Borel de T'.

0.14. Définition. Pour tout mesure cylindrique $\mu : \mathcal{C}_{T'} \to C$ la fonction $\tilde{\mu} : T \to C$ définie par :

$$\tilde{\mu}(t) := \int_T e^{i \langle t, t' \rangle} d\,\mu(t')$$

est la transformée de Fourier de μ ; et l'application $\mu \longmapsto \tilde{\mu}$ est le transformation de Fourier.

0.15. Les propriétés de $\tilde{\mu}$

a) Si $\tilde{\mu}$ est à variation bornée, alors

$$|\tilde{\mu}(t)| \leq 4 \ \mathrm{var}(\mu) \qquad (\forall)\ t \in T$$

b) L'Application $\mu \longmapsto \tilde{\mu}$ est linéaire

c) L'application $\mu \longmapsto \tilde{\mu}$ est injective ([5])

0.16. Définition. Soit T un espace vectoriel, une fonction $f: T \longrightarrow C$ est de type positif si pour tout système $\{t_1, \dots, t_n\} \subset T$ et pour tout $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset C$, nous avons:

$$\sum_{i,j=1}^{n} f(t_i - t_j)\, \lambda_i \, \overline{\lambda}_j \geqslant 0$$

0.17. Théorème de Bochner. Si T est un espace de Fréchet nucléaire, réel et $f: T \longrightarrow C$ une fonction positif, continue et vérifiant $f(0)=1$, il existe une mesure unique $\mu: \mathcal{B}_C(T') \longrightarrow R_+$ telle que :

$$f(t) = \int_{T'} e^{i \langle t, t' \rangle} d\mu(t') \qquad (\forall)\ t \in T$$

et

$$\mu(T') = 1$$

1. Théorème de Stone (le cas unitaire)

1.1. Théorème . Soit T un espace de type FN (Fréchet, nucléaire), H un espace de Hilbert et $\mathcal{U}: T \longrightarrow L(H)$ une représentation unitaire, continue. Il existe, alors, une mesure spectrale $E: \mathcal{B}_C(T') \longrightarrow L(H)$, unique, telle que

(i) $$(\mathcal{U}(t)x \,|\, y) = \int_{T'} e^{i \langle t, t' \rangle} d(E(t')x \,|\, y) \qquad (\forall)(t \in T;\ x, y \in H)$$

(ii) E commute avec touts les opérateurs $S \in L(H)$ qui commutent avec U.

Démonstration. L'application $t \longmapsto (\mathcal{U}(t)\, x | x)$ est de type positif. En effet; soient $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in C$ et $x \in H$. Alors

$$\sum_{i,j=1}^{n} (U(t_i - t_j)x|x)\, \lambda_i \overline{\lambda_j} = \sum_{i,j=1}^{n} (U(t_i).U(t_j)^* x|x)\, \lambda_i \overline{\lambda_j} =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} (U(t_i)x \mid U(t_j)x)\, \lambda_i \overline{\lambda_j} =$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, U(t_i)x \;\middle|\; \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\, U(t_j)x \right) =$$

$$= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, U(t_i)x \right\|^2 \geqslant 0$$

Alors la fonction $f_x : T \longrightarrow C$ définie par

$$f_x(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\|x\|^2}\, (U(t)x|x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

est de type positif, elle est continue et $f_x(0)=1$. D'après le théorème de Bochner, il existe une mesure unique $\nu_x : \mathcal{B}_c(T') \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

$$f_x(t) = \int_{T'} e^{i\langle t, t'\rangle} d\nu_x(t') \qquad \forall\, t \in T,$$

$$\nu_x(T') = 1 \qquad (x \neq 0).$$

Si on note $\mu_x := \|x\|^2 \nu_x$, il résulte que $\mu_x(T') = \|x\|^2$ $(\forall)\, x \in H$

et

$$(1) \qquad (U(t)x|x) = \int_{T'} e^{i\langle t, t'\rangle} d\mu_x(t').$$

Alors, l'égalité

$$(2) \quad (U(t)x|y) = \frac{1}{4}\Big[\big(U(t)(x+y)\,|\,x+y\big) - \big(U(t)(x-y)\,|\,x-y\big) + i\big(U(t)(x+iy)\,|\,x+iy\big) - $$
$$- i\big(U(t)(x-iy)\,|\,x-iy\big) \Big]$$

conduit à l'introduction de la mesure $\mu_{x,y} : \mathcal{B}_c(T') \longrightarrow C$ $(x, y \in H)$, par l'égalité

$$(3) \qquad \mu_{x,y} := \frac{1}{4}\left[\mu_{x+y} - \mu_{x-y} + i\mu_{x+iy} - i\mu_{x-iy} \right]$$

De (1), (2) et (3), il résulte

(4) $$(U(t)x|y) = \int_{T'} e^{i<t,t'>} d\mu_{x,y}(t') \quad (\forall) t \in T;\ x,y \in H$$

et de l'injectivité de la transformation de Fourier il résulte l'unicité de cette formule.

Si dans (3) on pose y=x et tenant compte du fait que $\mu_0 = o$, on obtient

(5) $$\mu_{x,x} = \frac{1}{4}\left[\mu_{2x} + i\mu_{(1+i)x} - \mu_{(1-i)x}\right]$$

En utilisant 0.15(c) il résulte que :

(6) $$\mu_{2x} = 4\mu_x$$

et

(7) $$\mu_{(1\pm i)x} = |1+i|^2\mu_x = |1-i|^2\mu_x$$

De (5), (6) et (7) il resulte que

(8) $$\mu_{x,x} = \mu_x$$

De (4) et 0.15(c) in déduit les propriétés suivantes de $\mu_{x,y}$:

(9) $x \longmapsto \mu_{x,y}$ est linéaire $(\forall)$ $y \in H$

(1o) $\mu_{yx} = \overline{\mu}_{xy}$

Nous allons définir $\varphi_a : H \times H \longrightarrow C$ par

$$\varphi_a(x,y) := \mu_{x,y}(a)$$

De (8), (9) et (1o) il resulte que

$$\varphi_a(x,x) \geqslant o,$$

$x \longmapsto \varphi_a(x,y)$ est linéaire $(\forall)$ $y \in H$,

$$\varphi_a(y,x) = \overline{\varphi_a(x,y)},$$

donc

$$|\varphi_a(x,y)| \leq \sqrt{\varphi_a(x,x)\cdot\varphi_a(y,y)} = \sqrt{\mu_x(a)\cdot\mu_y(a)} \leq \sqrt{\mu_x(T')\cdot\mu_y(T')} =$$
$$= \|x\|\cdot\|y\|$$

Alors, pour tout $a \in \mathcal{B}_c(T')$ il existe un opérateur autoadjoint, unique, $E(a) \in L(H)$, tel que

$$\mu_{x,y}(a) = (E(a)\,x|y)$$

donc $a \longmapsto (E(a)x|y)$ est denombrablement aditive sur $\mathcal{B}_c(T')$ et de (4) on obtient

$$(11) \qquad (U(t)x|y) = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d(E(t')x|y)$$

En notant, pour $s \in T$:

$$(12) \qquad \nu_s(b) := \int_b e^{i\langle s,t'\rangle} d(E(t')x|y)$$

nous pouvons écrire :

$$(U(t+s)x|y) = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} e^{i\langle s,t'\rangle} d(E(t')x|y) = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d\nu_s(t')$$

D'autre part

$$(U(t+s)x|y) = (U(t)U(s)x|y) = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d(E(t')U(s)x|y)$$

donc (0.15(c))

$$(13) \qquad \nu_s = (E(\cdot)\,U(s)x|y)$$

En utilisant maintenant (12), (13) et le fait que $E(b)=E(b)^*$ $(\forall)$ $b \in \mathcal{B}_c(T')$, on obtient :

$$\int_{T'} e^{i\langle s,t'\rangle} d(E(\{t'\} \cap b)\,x|y) = \int_b e^{i\langle s,t'\rangle} d(E(t')\,x|y) = \nu_s(b) =$$

$$= (E(b)U(s)x|y) = (U(s)x\,|\,E(b)y) = \int_{T'} e^{i\langle s,t'\rangle} d(E(t')x\,|\,E(b)y) =$$

$$= \int_{T'} e^{i\langle s,t'\rangle} d(E(b)E(t')x|y),$$

donc (0.15(c)),

$$(E(a \cap b)x|y) = (E(b)E(a)x|y) \qquad (\forall)\ a,b \in \mathcal{B}_c(T'),\ x,y \in H$$

et alors

$$(14) \qquad E(a \cap b) = E(b \cap a) = E(a)\,E(b),$$

donc $E(a)$ est un projecteur $(\forall)$ $a \in \mathcal{B}_c(T')$

L'égalité $E(T')=I$ resulte de :

$$(x|y) = (U(o)\,x|y) = \int_{T'} d(E(t')x|y) = (E(T')x|y).$$

Soit $(a_n) \subset \mathcal{B}_c(T')$ une suite décroissante telle que $\bigcap_{n=0}^{\infty} a_n = \phi$ comme $a \longmapsto (E(a)x|y)$ est denombrablement aditive , il resulte que

$$\lim_{n\to\infty} (E(a_n)x|y) = 0 \qquad (\forall)\ x,y \in H ;$$

donc, $E(a)$ étant projecteur, on obtient :

$$\| E(a_n)x \|^2 = (E(a_n)x|x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

et, en utilisant le théorème de Kolmogorov, il resulte que $a \longmapsto E(a)x$ est denombrablement aditive. Donc E est une mesure spectrale.

L'unicité de E resulte de 0.15(c).

Soit $S \in L(H)$, tel que $S\mathcal{U}(t) = \mathcal{U}(t)S \quad (\forall)\ t \in T$, alors

$$\int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d(SE(t')x|y) = \int_{T'} e^{i\langle t,\ t'\rangle} d(E(t')x\,|\,S^*y) =$$

$$= (U(t)x\,|\,S^*y) = (S\mathcal{U}(t)x|y) = (U(t)S\ x|y) =$$

$$= \int_{T'} e^{i\langle t,\ t'\rangle} d(E(t')S\ x|y)$$

Et il resulte que (0.15(c))

$$E(a)S = SE(a) \qquad (\forall)\ a \in \mathcal{B}_c(T')$$

1.2. <u>Lemme</u>. <u>Si</u> $E: \mathcal{B}_c(T') \longrightarrow L(H)$ <u>est une mesure spectrale, alors la mesure scalaire</u> $a \longmapsto (E(a)x|y)$ <u>est à variation bornée et</u>

$$V_{(E(\cdot)x|y)}(a) \leq \|x\| \cdot \|y\| \qquad (\forall)\ a \in \mathcal{B}_c(T') \quad ; \quad x,y \in H$$

<u>Démonstration</u>. Soient $a \in \mathcal{B}_c(T')$ et $a_i \in \mathcal{B}_c(T')$ $(1 \leq i \leq n)$ tels que

$$a_i \cap a_j = \phi \quad i \neq j \qquad \text{et} \qquad \bigcup_{i=1}^{n} a_i = a,$$

alors :

$$\sum_{i=1}^{n} |(E(a_i)x|y)| = \sum_{i=1}^{n} |(E(a_i)x|E(a_i)y)| \leq \sum_{i=1}^{n} \|E(a_i)x\| \cdot \|E(a_i)y\| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|E(a_i)x\|^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|E(a_i)y\|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\| \sum_{i=1}^{n} E(a_i)x \right\| \cdot \left\| \sum_{i=1}^{n} E(a_i)y \right\| =$$

$= \|E(a)x\| \cdot \|E(a)y\| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|$

2. Théorème de Stone (le cas cuasiunitaire)

2.1. Définition. Un espace localement-convexe X est espace cuasi-Hilbert si :

1) X est complete

2) X est limite projective d'espaces de Hilbert.

2.2. Remarque. Tout espace nucléaire complet est un espace cuasi-Hilbert.

2.3. Définition. Soit X un espace cuasi-Hilbert, limite projective du système projectif $(X_\alpha, \pi_{\alpha\beta})_{\alpha \in A}$ et soit G un groupe. Une représentation $U: G \longrightarrow L(X)$ est représentation cuasi-unitaire si elle est limite projective des représentations unitaires $U_\alpha : G \longrightarrow L(X_\alpha)$.

Donc (0.4) les représentation U_α rendent commutatif le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_\beta \arrow[r, "U_\beta(t)"] \arrow[d, "\pi_{\alpha\beta}"'] & X_\beta \arrow[d, "\pi_{\alpha\beta}"] \\ X_\alpha \arrow[r, "U_\alpha(t)"] & X_\alpha \end{tikzcd} \qquad (\forall)\ t \in G,\ \alpha \leq \beta$$

et la liaison entre U et U_α est donnée (0.5) par

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "U(t)"] \arrow[d, "\pi_\alpha"'] & X \arrow[d, "\pi_\alpha"] \\ X_\alpha \arrow[r, "U_\alpha(t)"] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

c'est à dire, si $x = \{x_\alpha\}_{\alpha \in A} \in X$, alors

$$U(t)x = \{U_\alpha(t)\, x_\alpha\}_{\alpha \in A}$$

2.4. Définition. Soit T un espace nucléaire, $X = \lim\, pr\, (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta})$ un espace cuasi - Hilbert et soit $E: \mathcal{B}_c(T') \longrightarrow L(H)$. On dit que E est une mesure spectrale cuasi-autoadjointe si E est limite projective des mesures spectrales $E_\alpha : \mathcal{B}_c(T') \longrightarrow L(H_\alpha)$

2.5. Remarque. Si E est une mesure spectrale autoadjointe, alors $a \longmapsto E(a)x$ est denombrablement aditive pour tour $x \in X$ et $E(a \cap b) = E(a)E(b)$ $(\forall)\ a,b \in \mathcal{B}_c(T')$; en plus la famille $\{E(a)\}_{a \in \mathcal{B}_c(T')}$ est équicontinue.

2.6. Théorème. Soit T un espace de type $\mathcal{F}N$, $X = \mathcal{X} = \lim pr (X_\alpha, \pi_{\alpha\beta})$ un espace cuasi-Hilbert et $U : T \longrightarrow L(X)$ une représentation cuasi-unitaire, telle que toutes les applications,

$$t \longmapsto (U_\alpha(t)\, x_\alpha \,|\, y_\alpha)_\alpha \qquad \alpha \in A$$

sont continues. Alors il existe une mesure spectrale cuasi-autoadjointe $E : \mathcal{B}_c(T') \longrightarrow L(X)$ unique, telle que

$$\langle U(t)x, x' \rangle = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle}\, d\langle E(t)\,x, x'\rangle \quad (\forall)\, t \in T, x \in X, x' \in X'$$

et E commute avec touts les $S \in L(X)$ commutant avec U.

Démonstration. Soit $U = \lim pr\, U_\alpha$ où $U_\alpha : T \longrightarrow L(X_\alpha)$ sont des représentations unitaires faiblement continues.

Alors (théorème 1.2) il existe, pour tout $\alpha \in A$, une mesure spectrale $E_\alpha : \mathcal{B}_c(T) \longrightarrow L(X_\alpha)$, telle que

$$(1) \qquad U_\alpha(t)x_\alpha = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} dE_\alpha(t')x_\alpha \quad (\forall)\, t \in T,\ x_\alpha \in X_\alpha .$$

Alors

$$(U_\alpha(t)\,\pi_{\alpha\beta}\, x_\beta | y_\alpha)_\alpha = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d(E_\alpha(t')\pi_{\alpha\beta}\, x_\beta | y_\alpha)_\alpha$$

et

$$(\pi_{\alpha\beta} U_\beta(t)\, x_\beta |\, y_\alpha)_\alpha = (U_\beta(t)x_\beta | \pi^*_{\alpha\beta}\, y_\beta)_\beta =$$

$$= \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d(E_\beta(t')x_\beta | \pi^*_{\alpha\beta} y_\alpha)_\beta$$

$$= \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d(\,\pi_{\alpha\beta}\, E_\beta(t')x_\beta \,|\, y_\alpha\,)_\alpha ,$$

donc, tenant compte (définition 2.3) que

$$\pi_{\alpha\beta} U_\beta = U_\alpha \pi_{\alpha\beta} \qquad (\forall)\ \alpha \le \beta$$

on obtient :

$$\int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d(E_\alpha(t')\pi_{\alpha\beta}\, x_\beta \mid y_\alpha) = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d(\pi_{\alpha\beta}\, E_\alpha(t') x_\beta \mid y_\alpha)_\alpha ,$$

d'où (0.15(c)) il résulte la commutativité du diagramme :

$$\begin{tikzcd} X_\beta \arrow[r, "E_\beta(a)"] \arrow[d, "\pi_{\alpha\beta}"'] & X_\beta \arrow[d, "\pi_{\alpha\beta}"] \\ X_\alpha \arrow[r] & X_\alpha \end{tikzcd}$$

Alors $E := \lim pr\, E_\alpha$ est une mesure spectrale cuasi-autoadjointe.

Comme $a \longmapsto E(a)x$ est denombrablement aditive pour tout $x = \{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \in X$, nous pouvons écrire :

$$\int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} dE(t')x = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d\left(\{E_\alpha(t')x_\alpha\}_{\alpha\in A}\right) =$$

$$= \left\{\int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} dE_\alpha(t')x_\alpha\right\}_{\alpha\in A} = \{U_\alpha(t)x_\alpha\}_{\alpha\in A} = U(t)x$$

Si $F: \mathcal{B}_c(T') \longrightarrow L(X)$ est une autre mesure spectrale cuasi-autoadjointe qui vérifie :

$$U(t)x = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} dF(t')x \qquad (\forall)\ x\in X, t\in T,$$

nous avons

$$\int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d\langle E(t')x, x'\rangle = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d\langle F(t'), x'\rangle\ (\forall)\, t\in T,\ x\in X,\ x'\in X'$$

et alors (0.15 (c)) $E = F$.

Soit $S\in L(X)$, telle que $SU(t) = U(t)S$ $(\forall)$ $t\in T$, alors

$$\int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d\langle SE(t')x, x'\rangle = \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d\langle E(t')x, S'x'\rangle =$$

$$= \langle U(t)x, S'x'\rangle = \langle SU(t)x, x'\rangle = \langle U(t)Sx, x'\rangle =$$

$$= \int_{T'} e^{i\langle t,t'\rangle} d\langle E(t')Sx, x'\rangle$$

d'où (0.15(c))

$$SE(a) = E(a)S \qquad (\forall)\ a\in \mathcal{B}_c(T')$$

- BIBLIOGRAPHIE -

1.- GELFAND I.M.,and VILENKIN N.Ya.- Generalized Functions Vol. 4 Academic Press,New York 1964.

2.- HIRSCHFELD R.A. - Projective limits and unitary reprezentations.Math.Ann. 194,3 (1971) 18o-196.

3.- MACKEY G.W. - Commutative Banach algebras Mimeographed lecture notes.Harvad University 1952.

4.- SALEHI H. - Stone's teorem for a group of unitary operators over a Hilbert spaces .Proc.A.M.S. 31,2 (1972) 48o-484.

5.- UGLANOV A.V. - The heat conduction equation for measures in the equipped Hilbert spaces.Vestnik Mosk.Univ.Matema - tika,Mechanika.1(1971) 52-6o.