INSTITUTUL
DE
MATEMATICĂ

INSTITUTUL NAȚIONAL
PENTRU CREAȚIE
STIINȚIFICĂ ȘI TEHNICĂ

LE LIEU RÉDUIT ET LE LIEU NORMAL D'UN MORPHISME

par

CONSTANTIN BANICA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No.25/1976

BUCUREȘTI

LE LIEU RÉDUIT ET LE LIEU NORMAL D'UN MORPHISME

par

CONSTANTIN BANICA*

Decembre 1976

* Institut de Physique Atomique, Physique Théorique, P.O. Box 5206, Bucharest, Romania

Le lieu réduit et le lieu normal d'un morphisme

Constantin Bănică

On utilise les ensembles singuliers d'un faisceau cohérent pour étudier les points réduits et normals d'un morphisme plat d'espaces complexes et d'un morphisme plat de variétés différentiables.

1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'espaces complexes. Pour tout point y de Y on note X_y la fibre de f au-dessus de y. On obtient ainsi une "famille analytique d'espaces complexes", $(X_y)_y$. Considérons une propriété P concernant les espaces complexes. On peut poser la question si l'ensemble

$$\{y \in Y \mid X_y \text{ ait la propriété P}\}$$

est ouvert et si son complémentaire est analytique. C'est une question locale sur Y. De même, si P est une propriété concernant les points d'un espace complexe, alors on peut demander si l'ensemble

$$\{x \in X \mid X_{f(x)} \text{ ait la propriété P au point } x\}$$

est ouvert et si son complémentaire est analytique. C'est une question locale sur X.

Un exemple classique est donné par le théorème de semi-continuité de Remmert [8] :

"Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme d'espaces complexes et k un entier. Alors l'ensemble $\{x \in X \mid \dim_x X_{f(x)} \leq k\}$ est ouvert et son complémentaire est analytique".

Mais en général, si le morphisme f est quelconque, on a peu de chance que des propriétés raisonnable d'une fibre peuvent se transmettre aux fibres voisines. Soit pour cela l'exemple suivant. $Y = \mathbb{C}$, X = le sous-espace de $\mathbb{C}^2$ (de coordonnées z_1, z_2) donné par l'équation $z_1z_2^2 = 0$ et $f : X \longrightarrow Y$ donné par z_1; la fibre X_o est isomorphe à la droite affine, tandis que les autres fibres X_y sont des points double ($(y,0)$, $\mathbb{C}[z_2]/z_2^2$).

L'hypothèse qu'on doit la faire pour assurer une réponse positive pour beaucoup des propriétés P est la platitude de f pour la deuxième question, respectivement la propreté et la platitude de f pour la première.

On trouve dans ([5], § 9 et § 12) une étude systématique concernant ce sujet dans le cas algébrique.

En particulier on prouve:

Théorème 1. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme plat de type fini, X et Y étant des schémas localement noethériens. Alors les ensembles

$\{x \in X / X_{f(x)}$ soit réduit au point $x\}$, $\{x \in X / X_{f(x)}$ soit normal au point $x\}$

sont ouverts. Si de plus, f est propre, alors les ensembles

$\{y \in Y / X_y$ soit réduit$\}$, $\{y \in Y / X_y$ soit normal$\}$

sont aussi ouverts.

2. Dans le cas analytique on a le même résultat:

Théorème 2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme plat d'espaces complexes. Alors les ensembles $\{x \in X / X_{f(x)}$ soit réduit au point $x\}$, $\{x \in X / X_{f(x)}$ soit normal au point $x\}$

sont ouverts et leurs complémentaires sont analytiques. Si de plus f est propre, alors les ensembles

$\{y \in Y / X_y$ soit réduit$\}$, $\{y \in Y / X_y$ soit normal$\}$

sont aussi ouverts et leurs complémentaires analytiques.

Ce théorème est prouvé par Grauert et Kerner [4] quand Y est une surface de Riemann. Dans [6] Kiehl a prouvé l'énoncé général dans le cas non archimédien; comme il est dit dans la préface de cet article, la méthode de démonstration peut être adaptée aussi au cas complexe. Dans [1] on donne une autre demonstration, mais moyenant l'hypothèse supplémentaire que X et Y sont de dimension pure. Esquissons ici une nouvelle démonstration, qui peut être adaptée également au cas différentiel.

Si X est un espace complexe et $F \in \mathrm{Coh}\, X$, alors pour tout entier k on définit l'ensemble singulier $S_k(F) = \{x \in X / \mathrm{prof}\, F_x \leq k\}$. $S_k(F)$ est analytique et fermé, de dimension $\leq k$. D'après des propriétés générales, l'espace X est normal au point x si et seulement si, pour tout voisinage U de x, l'application $\Gamma(U,O_X) \longrightarrow \Gamma(U \setminus S(X), O_X)$ est bijective (S(X) étant le lieu singulier de X). Ceci et le théorème d'annulation pour la cohomologie locale de Scheja et Trautmann [10] amenent au critère suivant de normalité de Markoe [7] (on trouve dans [9] une première application de la chomologie locale à une question de normalité):

"X est normal au point x si et seulement si $\dim_x(S(X) \cap S_k(O_X)) \leq k-2$, pour tout entier k".

De même, X étant réduit au point x si et seulement si les restrictions $\Gamma(U,O_X) \longrightarrow \Gamma(U \setminus S(X), O_X)$ sont injectives, on obtient:

"X est réduit au point x si et seulement si $\dim_x(S(X) \cap S_k(O_X)) \leq k-1$, pour tout entier k".

Soient R(f) et N(f) les complémentaires des sous-ensembles de X définis dans l'énoncé du théorème 2. On a donc:

$$R(f) = X \setminus \{x \in X / \dim_x(X_{f(x)} \cap S(f) \cap S_k(O_X,f)) \leq k-1, \forall k\} \text{ et}$$

$$N(f) = X \setminus \{x \in X / \dim_x(X_{f(x)} \cap S(f) \cap S_k(O_X,f)) \leq k-2, \forall k\}, \text{ où}$$

$$S(f) = \{x \in X / X_{f(x)} \text{ soit singulier au point } x\},$$

$$S_k(O_X,f) = \{x \in X \ \mathrm{prof}_x\, X_{f(x)} \leq k\}.$$

Montrons que S(f) et $S_k(O_X,f)$ sont des sous-ensembles analytiques fermés et ce qu'on cherche à prouver concernant R(f) et N(f) résulte du théorème de semi-continuité de Remmert. L'assertion concernant S(f) résulte du fait qu'il est fermé [3] et de l'égalité

$$S(f) = \bigcup_{\ell} (\{x \in X \mid \dim_x X_{f(x)} < \ell\} \cap \{x \mid \dim_{\mathbb{C}}(\Omega_x / m_x \Omega_x) \geq \ell\}),$$

où $\Omega = \Omega^1_{X/Y}$ est le faisceau des différentielles relatives. Concernant $S_k(O_X, f)$ on à une assertion générale :

"Si $f : X \longrightarrow Y$ est un morphisme d'espaces complexes et $F \in \mathrm{Coh}\, X$ est plat sur Y, alors les ensembles $S_k(F, f) = \{x / \mathrm{prof}(F_x / m_{f(x)} F_x) \leq k\}$ sont fermés et analytiques".

On prouve ceci en ramenant d'abord le problème au cas où f est une projection $Y \times_X U \longrightarrow Y$, U étant un ouvert d'un espace numérique, et puis en exprimant la profondeur en termes de dimension homologique et en utilisant le résultat suivant d'algèbre locale:

"Soient $A \longrightarrow B$ un morphisme local d'anneaux locaux noethériens et M un B-module de type fini. Supposons que M et B sont A-plats. Alors $dh_B M = dh_{B/m_A B} (M/m_A M)$" (on peut trouver des détails dans [2]).

Concernant la deuxième assertion du théorème, les complémentaires des sous-ensembles de Y défini dans l'énoncé sont f(R(f)) et f(N(f)); on conclut en appliquant le théorème de projection de Remmert.

Remarque. On peut trouver dans [12] l'extension en géométrie algébrique des critères de normalité et d'être réduit. En particulier on obtient:

"Soit A un anneau local noethérien, complet et de Cohen-Macaulay. Alors A est réduit (resp.normal) si et seulement si $\dim S(\mathrm{Spec}\, A) \leq \dim A-1$ (resp. $\dim S(\mathrm{Spec}\, A) \leq \dim A-2$), où S est le lieu singulier".

3. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme C^∞ entre deux variétés différentiables. Soit x un point de X. Notons E_x et $E_{f(x)}$ les anneaux de germes de fonctions C^∞ en x, respectivement en f(x). Par F_x et $F_{f(x)}$ notons les complétés par rapport aux idéaux maximals.

Le morphisme f induit un morphisme local $E_{f(x)} \longrightarrow E_x$, donc un morphisme local $F_{f(x)} \longrightarrow F_x$. On dit d'après Tougeron [13] que f est plat en x si le morphisme $F_{f(x)} \longrightarrow F_x$ est plat. On dit que f est plat s'il est plat en tout x de X. Nous disons que f est réduit (resp. normal) au point x si l'anneau $F_x/m_{f(x)} F_x$ est réduit (resp. normal). Si X et Y sont des variétés analytiques (réels ou complexes) et f est une application analytique alors f, regardé comme application C^∞ entre les variétés différentiables associées, est réduit (resp. normal) en x si et seulement si l'espace analytique $X_{f(x)}$ est réduit (resp. normal) en x; en effet, une algèbre analytique est réduite (resp. normale) si et seulement si sa complété est réduite (resp. normale).

Théorème 3. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme plat de variétés différentiables. Alors les ensembles

$$\{x \in X / f \text{ soit réduit en } x\}, \ \{x \in X / f \text{ soit normal en } x\}$$

sont ouverts.

Démonstration. On peut supposer que X et Y sont des ouverts dans des espaces numériques de dimensions n et m, de coordonnées $x_1, \ldots, x_n$ et $y_1, \ldots, y_m$.

Soit $x^o \in X$. Le morphisme $F_{f(x^o)} \longrightarrow F_{x^o}$ étant plat, d'après ([13], 6.1.2 et 6.3.1) $\dim (F_{x^o}/m_{f(x^o)} F_{x^o}) = \dim F_{x^o} - \dim F_{f(x^o)} = n-m$ et $\mathrm{prof}(F_{x^o}/m_{f(x^o)} F_{x^o}) = \mathrm{prof}\, F_{x^o} - \mathrm{prof}\, F_{f(x^o)}$. Par conséquent, $F_{x^o}/m_{f(x^o)} F_{x^o}$ est anneau de Cohen-Macaulay, donc il est réduit (resp. normal) si et seulement si son lieu singulier est de dimension $\leq n-m-1$ (resp. $\leq n-m-2$).

Nous avons besoin de équations explicites pour le lieu singulier. Pour cela, utilisons le critère Jacobien de régularité sous la forme de ([13], Ch. II, § 3).

Soient $f_1, \ldots, f_m$ les composantes de f. Les éléments $f_1 - f_1(x^o), \ldots, f_m - f_m(x^o)$ engendrent l'idéal $I_{x^o} = m_{f(x^o)} F_{x^o}$ et de plus, ils forment une suite F_{x^o}-régulière; en effet, c'est l'image par le morphisme plat $F_{f(x^o)} \longrightarrow F_{x^o}$ de la suite réguliere de paramètres $y_1-y_1(f(x^o)),\dots,y_m-y_m(f(x^o))$. On obtient une surjection $F^m_{x^o} \longrightarrow I_{x^o}$, $(\varphi_1,\dots,\varphi_m) \longrightarrow \sum \varphi_i(f_i-f_i(x^o))$, et le noyau est engendré par les relations triviales $\varphi^{ij} = (\varphi^{ij}_k)_{1\leq k\leq m}$, où

$$\varphi^{ij}_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i,j \\ -(f_j-f_j(x^o)) & \text{si } k = i \\ f_i-f_i(x^o) & \text{si } k = j \end{cases}$$

(voir par exemple [13], Ch.I,prop.5.1). Par conséquent on obtient une suite exacte

$$F^p_{x^o} \xrightarrow{\lambda} F^m_{x^o} \longrightarrow I_{x^o} \longrightarrow 0,$$

où l'entier p est indépendant de x^o et la matrice qui donne λ est continue par rapport à x^o. Donc, pour tout entier k, on peut trouver des éléments de F_{x^o} en nombre fini, leur nombre étant indépendant de x^o, qui engendrent l'idéal $\sigma'_k(I_{x^o})$ définit dans ([13],p.30) et, de plus, tels que les éléments varient continûment par rapport à x^o (on regarde sur F_{x^o} la topologie donné par la convergence des coefficients des series). Une assertion analogue vaut pour les idéaux $J_k(I_{x^o})$ de ([13], p.30); en effet, $J_k(I_{x^o})$ est engendré par $f_1-f_1(x^o),\dots,f_m-f_m(x^o)$ et par les jacobiens

$$D(f_{i_1}-f_{i_1}(x^o),\dots,f_{i_k}-f_{i_k}(x^o)) \,/\, D(x_{i_1},\dots,x_{i_k})$$

$1\leq i_1< \dots <i_k\leq n$. En utilisant les deux assertions on peut trouver pour tout entier k des éléments de F_{x^o} en nombre fini, leur nombre étant indépendant de x^o, qui varient continûment par rapport à x^o et dont l'ensemble des zéros dans Spec F_{x^o} coïncide à l'ensemble des zéros de $R_k(I_{x^o}) = \sqrt{J_k(I_{x^o})} \cap \sqrt{\sigma'_k(I_{x^o})}$.

D'après le critère jacobien de régularité, on a(dans Spec F_{x^o})

$$S(F_{x^o} / I_{x^o}) = \bigcap_k V(R_k(I_{x^o})).$$

On peut ainsi trouver des éléments $g_1(x^o),\ldots,g_N(x^o)$ de F_{x^o}, leur nombre étant indédendant de x^o, qui varient continûment par rapport à x^o et tels que le lieu singulier $S(F_{x^o}/m_{f(x^o)}F_{x^o})$ s'identifie à l'ensemble des zéros dans $\mathrm{Spec}(F_{x^o}/m_{f(x^o)}F_{x^o})$ du l'idéal $(g_1(x^o),\ldots,g_N(x^o))$.

Par conséquent,

$$\dim S(F_{x^o}/m_{f(x^o)}F_{x^o}) = \dim(F_{x^o}/(g_1(x^o),\ldots,g_N(x^o))$$

et on finie la démonstration en utilisant ([13], Ch.II, pr.5.3).

Peut être la théorie des espaces différentiables [11] donne un cadre naturel pour généraliser le théorme 3 .

4. On peut généraliser les faits de la section précédente par exemple comme il suit. On va considérer des espaces annelés (X,E_X) qui localement sont de la forme $(\mathrm{Supp}(E_U/I), (E_U/I)|\mathrm{Supp})$, où U est un ouvert d'un espace numérique, E_U le faisceau de germes de fonctions C^∞ sur U et $I \subset E_U$ un faisceau d'idéaux pseudocohérent (cf. SGA 6, I.H.E.S., Bures sur Yvette 1966/1967). Les morphismes $f : (X,E_X) \longrightarrow (Y,E_Y)$ seront les morphismes d'espaces annelés qui localement sont induites par des applications différentiables $f' : U \longrightarrow V$ tels que $f'^*(J)E_U \subset I$.

On dit d'un tel morphisme f qu'il est plat (resp.régulier, réduit, normal) dans le point x si le complété du morphisme $E_{Y,f(x)} \longrightarrow E_{X,x}$ (resp. le complété du l'anneau $E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x}$) est plat (resp. régulier, réduit, normal). On va supposer par la suite que f est plat dans tous les points de X. De plus, que f est induit par un f'. Soit x_o un point de X. On peut trouver, dans un voisinage de x_o, des entiers n_1 et n_o et des présentations finies

$$E_{U,x}^{n_1} \xrightarrow{\lambda(x)} E_{U,x}^{n_o} \longrightarrow \mathfrak{A}(x) \longrightarrow 0,$$

où $\mathfrak{a}(x)$ est l'idéal de $E_{U,x}$ pour lequel $E_{U,x}/a(x) \simeq E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x}$, telles que le complété de $\lambda(x)$, $\hat{\lambda}(x) : F_{U,x}^{n_1} \longrightarrow F_{U,x}^{n_o}$, varie continûment par rapport a x quand on regarde sur $F_{U,x}$ (s'identifiant canoniquement à un anneau de séries formelles) la topologie donnée par la convergence des coefficients des séries: on part avec des présentations "continues" convenables pour les idéaux maximaux des anneaux $E_{V,y}$, dans un voisinage de $y_o = f(x_o)$, et on utilise des faits du (Ch.I. § 2; Ch.III, § 1) du SGA 6, en remarquant que la "continuité" peut se préserver. On déduit alors, comme dans 3, l'assertion:

(*) Il existe, dans un voisinage de x_o, un entier p et des éléments $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_p(x) \in F_{U,x}$ qui varient continûment par rapport à x et tels que dans Spec $(F_{U,x})$ on a:

$$V((\varphi_1(x),\ldots,\varphi_p(x)) = S((E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x})^{\wedge}).$$

On déduit de ([13], Ch.II, pr.5.3):

"Pour tout morphisme plat $f : (X,E_X) \longrightarrow (Y,E_Y)$, la fonction $x \longmapsto \dim S((E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x})^{\wedge})$ est semi-continue supérieurement. En particulier, l'ensemble $\{x\in X | f$ soit régulier en $x\}$ est ouvert".

Rappelons que pour un anneau A et un entier k on note $S_k^*(A)=\{p\in \mathrm{Spec}\ A | \mathrm{prof}\ A_p + \dim(A/p) \leq k\}$. Si A est quotient d'un anneau local noethérien régulier, alors $S_k^*(A)$ est fermé (et ainsi prof $A \geqslant k+1$ si et seulement si $S_k^*(A) = \emptyset$).

Soient $A(= A(x)) = (E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x})^{\wedge}$ et $B(= B(x))=\hat{E}_{U,x}=F_{U,x}$.
Pour un idéal $p\in \mathrm{Spec}\ A\subset \mathrm{Spec}\ B$ on a

$$\mathrm{prof}\ A_p + \dim(A/p) = \dim B - dh_{B_p} A_p.$$

On peut trouver, dans un voisinage de x_o, des résolutions

$$\cdots \longrightarrow B(x)^{n_2} \longrightarrow B(x)^{n_1} \longrightarrow B(x)^{n_o} \longrightarrow A(x) \longrightarrow 0$$

telles que les entiers n_q ne dépendent pas de x et telles que les matrices qui définissent les morphismes $B(x)^{n_{q+1}} \longrightarrow B(x)^{n_q}$ varient continûment par rapport à x (on part des résolutions convenables pour les $E_{V,y}$-modules $E_{V,y}/m_y$, dans un voisinage de $y_o = f(x_o)$, et puis on utilise le lemme III.1.1.1 du SGA 6, la platitude de f et de nouveau de lemme).

On obtient l'assertion:

(**) Pour un entier k il existe, dans un voisinage de x_o, un entier q et des éléments $\psi_1(x),\dots,\psi_q(x) \in F_{U,x}$ qui varient continûment par rapport à x et tels que dans Spec $F_{U,x}$ on a

$$V(\psi_1(x),\dots,\psi_q(x)) = S_k^*((E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x})\hat{\ })$$

(ψ_i sont certains mineurs obtenus par les morphismes de la résolution de A(x)).

A l'aide de ceci on prouve:

"Pour tout morphisme plat $f : (X,E_X) \longrightarrow (Y,E_Y)$, la fonction $x \longmapsto \dim S_k^*((E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x})\hat{\ })$ est semi-continue supérieurement. En particulier, l'ensemble $\{x\in X/\mathrm{prof}((E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x})\hat{\ })\geqslant k\}$ est ouvert. De même, l'ensemble $\{x\in X/(E_{X,x}/m_{f(x)}E_{X,x})\hat{\ }$ soit de Cohen-Macaulay$\}$ est ouvert".

De (*), (**) et en utilisant les critères de normalité et d'être réduit de [12] on conclut enfin:

"Pour tout morphisme plat $f : (X,E_X) \longrightarrow (Y,E_Y)$ les ensembles $\{x\in X/f$ soit réduit en $x\}$, $\{x\in X/f$ soit normal en $x\}$ sont ouverts".

Institut Central de Mathématiques
Bucarest

Bibliographie

1. C.Bănică, Un théorème concernant les familles analytiques d'espaces complexes, Revue Roum. de Math., 10 (1973), 1515-1520.
2. C.Bănică et O.Stănăşilă, Metode algebrice în teoria globală a spaţiilor complexe, Editura Academiei R.S.R., 1974.
3. H.Cartan, Séminaire E.N.S., Paris, 1960-1961.

4. H.Grauert et H.Kerner, Deformationes von Singularitäten komplexer Räume, Math. Annalen 153 (1964), 236-260.

5. A.Grothendieck et J.Dieudonné, Eléments de géométrie algébrique, Ch.IV, Publ. I.H.E.S., No. 20, 24, 28.

6. R.Kiehl, Analitischen Familien Affinoider Algebren, Heidelberg, 1968.

7. A.Markoe, A characterisation of normal analytic spaces by the homological codimension of the structure sheaf, Pacific J. of Math., 52 (1974), 485-489.

8. R.Remmert, Holomorphe und meromorphe Abbildungen Komplexer Räume, Math. Annalen, 133 (1957), 328-370.

9. G.Scheja, Eine Anwendung Riemannscher Hebbarkeitssätze für analytische Cohomologieklassen, Archiv der Math., 12, 341-348. 1961.

10. Y-T-Siu et G.Trautmann, Gap-Sheaves and Extension of Coherent Analytic Subsheaves, Lecture Notes in Math., 172 (1971), Springer Verlag.

11. K.Spallek, Differenzierbare Räume, Math. Ann. 180, 269-296, (1969).

12. M.Stoia, Reduced and normal points of a flat morphism, Revue Roum., de Math., no.9, 1976.

13. J.C.Tougeron, Idéaux de fonctions différentiables, Springer Verlag, 1972.