INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

SUR LES FIBRES INFINITESIMELLES
D'UN MORPHISME PROPRE D'ESPACES COMPLEXES

par
Constantin BANICA

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No. 37/1978

Med 15687

BUCURESTI

**SUR LES FIBRES INFINITESIMELLES
D'UN MORPHISME PROPRE D'ESPACES COMPLEXES**
par
Constantin BANICA*)

Octobre 1978

*) *Department of Mathematics, National Institute for Scientific and Technical Creation,
Bdul Pacii 220, 77538 Bucharest Romania.*

SUR LES FIBRES INFINITESIMELLES D'UN
MORPHISME PROPRE D'ESPACES COMPLEXES *

par Constantin Bănică

Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes, y un point de Y et $\mathfrak{m}_y$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_{Y,y}$. Pour tout entier $n \geq 0$ on note $X_y^{(n)}$ l'espace complexe $(f^{-1}(y), \mathcal{O}_X / \mathfrak{m}_y^{n+1} \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(y)})$. $X_y^{(n)}$ s'appelle la fibre n -infinitésimelle de f en y . $X_y^{(0)}$ est la fibre analytique de f en y . On a des applications naturelles $X_y^{(n)} \rightarrow X_y^{(m)}$, $0 \leq n \leq m$, en fait on obtient un système inductif d'espaces complexes. Il s'agit dans ce papier de commenter certains résultats connus concernant ces systèmes inductifs et d'ajouter des résultats nouveaux et un nombre de problèmes ouverts. Surtout il s'agit de lier $(X_y^{(n)})_{n \geq 0}$ de système des voisinages de $f^{-1}(y)$ dans X . Au texte d'exposé on a ajouté le texte de la conférence faite par l'auteur au Colloque sur l'Analyse complexe, Nancy, avril, 1978.

I. Le cas des classes de cohomologie

1. Conservons les notations de l'introduction. Supposons que $\mathcal{F}$ est un faisceau analytique cohérent sur X , on va écrire $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$.

Pour tout n on note $\mathcal{F}_y^{(n)} = \mathcal{F} / \mathfrak{m}_y^{n+1} \mathcal{F}$, ou bien sa restriction à $X_y = f^{-1}(y)$. $\mathcal{F}_y^{(n)}$ est un faisceau cohérent sur $X_y^{(n)}$. Pour $n \leq m$, l'image inverse de $\mathcal{F}_y^{(m)}$ par $X_y^{(n)} \rightarrow X_y^{(m)}$ est canoniquement isomorphe à $\mathcal{F}_y^{(n)}$. Pour tout entier q on obtient des applications $\mathbb{C}$ -linéaires $H^q(X_y^{(m)}, \mathcal{F}_y^{(m)}) \rightarrow H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})$ et en fait un système projectif $H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})_{n \geq 0}$. On a des isomorphismes

$$(R^q f_* \mathcal{F})_y \simeq H^q(X_y, \mathcal{F}) \simeq \varinjlim_{U \supset X_y} H^q(U, \mathcal{F}).$$

Les applications quotient $\mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}_y^{(n)}$ induisent des morphismes

(*) Exposé fait dans le Séminaire Horvath (avril 1978)

$$(R^q f_* \mathcal{F})_y \longrightarrow H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})$$

et par passage à la limite des morphismes

$$\varprojlim (R^q f_* \mathcal{F}_y / \mathfrak{m}_y^{n+1} R^q f_* \mathcal{F}_y) \longrightarrow \varprojlim H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}).$$

La source s'identifie au complété du $\mathcal{O}_y$ -module de type fini $R^q f_* \mathcal{F}_y$ dans la topologie $\mathfrak{m}_y$ -adique.

Théorème (i). Les morphismes ci-dessus

$$(R^q f_* \mathcal{F}_y)^\wedge \longrightarrow \varprojlim_n H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})$$

sont des isomorphismes.

(ii). Il existe un entier n_0 tel que

$$\text{Ker}(H^q(X_y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_y, \mathcal{F}_y^{(n+r)})) = \mathfrak{m}_y^r \text{Ker}(H^q(X_y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_y, \mathcal{F}_y^{(n)}))$$

$$\text{Im}(H^q(X_y, \mathcal{F}_y^{(n+r)}) \longrightarrow H^q(X_y, \mathcal{F}_y^{(r)})) = \text{Im}(H^q(X_y, \mathcal{F}_y^{(n_0+r)}) \longrightarrow H^q(X_y, \mathcal{F}_y^{(r)}))$$

pour $r \geq 0$, $q \geq 0$ et $n \geq n_0$.

L'assertion (i) est le "Vergleichssatz" de Grauert, cf. ([12], Hauptsatz II) et le travail de Knorr [17]. La première assertion de (ii) se trouve également dans ([12], Hauptsatz II a) et [17], sous la forme: il existe une fonction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(n) = \infty$ et vérifiant pour tout $q \geq 0$ et $n \geq 0$ l'inclusion

$$\text{Ker}(H^q(X_y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})) \subseteq \mathfrak{m}_y^{\varphi(n)} H^q(X_y, \mathcal{F}).$$

La forme plus précise et la deuxième égalité de (ii) sont prouvés dans [3].

Signalons la conséquence remarquable suivante

Corollaire. $\text{Im}(H^q(X_y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}_y^{(r)})) = \text{Im}(H^q(X, \mathcal{F}_y^{(n_0+r)}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}_y^{(r)}))$ pour $r \geq 0$ et $q \geq 0$.

Prouvons le par exemple pour $r = 0$. Soit ξ_0 un élément de $\text{Im}(H^q(X, \mathcal{F}_y^{(n_0)}) \longrightarrow H^q(X_y, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y \mathcal{F}))$. D'après (ii) il existe un élément

$$\eta_1 \in H^q(X, \mathcal{F}_y^{(2n_0)}) \text{ dont l'image est } \xi_0 \text{ et soit } \xi_1 \text{ l'image de } \eta_1$$

dans $H^q(X, \mathcal{F}_Y^{(n_0)})$. Comme $\xi_1 \in \text{Im}(H^q(X, \mathcal{F}_Y^{(2n_0)}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}_Y^{(n_0)}))$, de nouveau on peut trouver un élément $\eta_2 \in H^q(X, \mathcal{F}_Y^{(3n_0)})$ et soit ξ_2 l'image de ceci dans $H^q(X, \mathcal{F}_Y^{(2n_0)})$. On continue et on trouve un élément de $\varprojlim_n H^q(X, \mathcal{F}_Y^{(nn_0)})$. D'après le théorème de comparaison lui correspond un élément $\theta = (\theta_n)_n$ de $\varprojlim (R^q f_* \mathcal{F}_Y / \mathcal{M}_Y^n (R^q f_* \mathcal{F})_Y)$. On prenne dans $R^q f_* \mathcal{F}_Y \simeq H^q(X_Y, \mathcal{F})$ un représentant de θ_0 et l'image de ceci par

$$H^q(X_Y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_Y, \mathcal{F}/\mathcal{M}_Y \mathcal{F}) \text{ est } \xi_0.$$

Dans ([14], th.4.1) Griffiths démontre l'égalité

$$\text{Im}(H^q(X_Y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_Y, \mathcal{F}/\mathcal{M}_Y \mathcal{F})) = \text{Im}(H^q(X, \mathcal{F}_Y^{(n_0)}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}/\mathcal{M}_Y \mathcal{F}))$$

(pour n_0 convenable) quand $f : X \longrightarrow Y$ est une famille de déformations de Kodaira-Spencer [18] et $\mathcal{F}$ localement libre (dans la terminologie de [14], l'égalité exprime qu'on a seulement un nombre fini d'obstructions pour prolonger les classes de cohomologie et que si une classe de cohomologie peut se prolonger formellement, alors elle peut se prolonger dans un voisinage de X_Y). Ensuite Wawrick [26] prouve l'égalité pour les espaces complexes, mais moyennant l'hypothèse supplémentaire que f est plat et $\mathcal{F}$ plat sur Y .

2. On peut se demander comment se comportent les fonctions

$$n \longmapsto \chi(X_Y^{(n)}, \mathcal{F}_Y^{(n)}) = \sum_q (-1)^q \dim H^q(X, \mathcal{F}/\mathcal{M}_Y^{n+1} \mathcal{F}),$$

$n \longmapsto \dim H^q(X_Y^{(n)}, \mathcal{F}_Y^{(n)})$ pour $n \gg 0$. On a le résultat suivant [5]

Théorème. La fonction $n \longmapsto \chi(X_Y^{(n)}, \mathcal{F}_Y^{(n)})$ est polynomiale pour $n \gg 0$. Si en plus $\mathcal{F}$ est plat sur Y alors pour tout $q \geq 0$, la fonction $n \longmapsto \dim H^q(X_Y^{(n)}, \mathcal{F}_Y^{(n)})$ est aussi polynomiale pour $n \gg 0$.

Esquissons brièvement l'argument. Pour la première fonction il suffit de prouver que la fonction différence $n \longmapsto \chi(X_Y^{(n+1)}, \mathcal{F}_Y^{(n+1)}) - \chi(X_Y^{(n)}, \mathcal{F}_Y^{(n)})$ est polynomiale. Pour ceci il suffit de prouver que

pour tout q la fonction $n \mapsto \dim H^q(X, \mathcal{M}_y^n \mathcal{F} / \mathcal{M}_y^{n+1} \mathcal{F})$ a cette propriété. Mais $\bigoplus (\mathcal{M}_y^n \mathcal{F} / \mathcal{M}_y^{n+1} \mathcal{F})$ est faisceau gradué cohérent sur le faisceau d'anneaux $\bigoplus (\mathcal{M}_y^n \mathcal{O}_X / \mathcal{M}_y^{n+1} \mathcal{O}_X)$ et on applique le théorème de finitude pour les faisceaux gradués de [3] et ([24], chap.II, Th.2). La deuxième assertion découle du résultat suivant, cas particulier d'un résultat plus général (bornons nous de dire simplement qu'il s'agit de l'analogie d'un résultat algébrique de Grothendieck [15] et que les complexes construits dans les travaux de Forster-Knorr [11] et Kiehl-Verdier [16] vérifient ce qu'il faut; envoyons à [4], ch.3, pour démonstration et renseignements).

Théorème (du complexe). Supposons $\mathcal{F}$ plat sur Y . Alors il existe, localement sur Y , un complexe $\mathcal{L}^\bullet$ de $\mathcal{O}_Y$ - modules libres de rang fini dont la cohomologie est $R^* f_* \mathcal{F}$ et tel que pour tout y et tout n , la cohomologie du $\mathcal{L}_y^\bullet / \mathcal{M}_y^{n+1} \mathcal{L}_y^\bullet$ est $H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})$.

3. Le pas suivant est de voir ce que se passe aux points voisins de y . On a [5].

Théorème. Supposons que $\mathcal{F}$ est plat sur Y et que y est régulier.

(i) Il existe un voisinage V de y tel que

$$\dim(H^q(X_{y'}^{(n)}, \mathcal{F}_{y'}^{(n)}) \leq \dim H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})$$

pour $q \geq 0$, $n \geq 0$ et $y' \in V$.

(ii) $\mathcal{F}$ est q -cohomologiquement plat en y (i.e. $R^q f_* \mathcal{F}_y$ est $\mathcal{O}_y$ -libre et l'application $R^q f_* \mathcal{F}_y \rightarrow H^q(X_y, \mathcal{F} / \mathcal{M}_y \mathcal{F})$ est surjective) si et seulement si le polynôme associé à la fonction $n \mapsto \dim H^q(X_{y'}^{(n)}, \mathcal{F}_{y'}^{(n)})$ est indépendant de y' dans un voisinage de y .

Pour l'assertion (i) on utilise le fait suivant [20]:

"Soit $(S, \mathcal{O}_S)$ un espace complexe. Alors pour tout s de S il existe un voisinage V tel que $\dim(\mathcal{O}_s / \mathcal{M}_s^n) \leq \dim(\mathcal{O}_s / \mathcal{M}_s^n)$ pour $n \geq 0$ et $s' \in S$ "

Pour (ii) on utilise le résultat d'algèbre suivant [6]:

"Soit A un anneau local noethérien régulier, $\mathcal{M}$ son idéal maximal

et M un A -modul de type fini. Si le polynôme de Hilbert-Samuel de M coïncide au polynôme d'un A -module libre, alors M est libre".

Remarquons qu'on a le fait plus précis: si $\ell(M/m^{n_k} M)$ est divisible par $\ell(A/m^{n_k})$ pour une suite $n_k \rightarrow \infty$, alors M est libre. En effet, il va résulter que $\ell(M/m^{n_k} M) = e_M \cdot \ell(A/m^{n_k})$ pour $k \gg 0$, où e_M est la multiplicité de M , et ensuite que $\ell(M/m^n M) = e_M \ell(A/m^n)$ pour $n \gg 0$ et on réduit la question au fait rappelé ci-dessus. Comme il est remarqué par C.P.L. Rhodes in (Math. Reviews, May 1978, recension du papier [6]), le critère assurant que M est libre est une conséquence d'un critère concernant la propriété de Cohen-Macaulay ([22], th.6.5 (iii)). Remarquons aussi l'analogie (de type local-gradué) entre le critère de [6] et le résultat suivant prouvé dans [1] :

"Soit $\mathcal{F}$ un faisceau cohérent sur l'espace projectif $\mathbb{P}^n$.

Supposons que le polynôme de Hilbert $m \mapsto \chi(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(m))$ coïncide au polynôme d'un faisceau libre. Alors $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si $H^r(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-r)) = 0$ pour $r > 0$; si en plus $\mathcal{F}$ est localement libre alors on a encore l'équivalence avec la condition $H^r(\mathbb{P}^n, \mathcal{F}(-r-1)) = 0$ pour $r < n$ ".

Dans [6], également pour pouvoir démontrer un théorème de continuité pour les polynômes associés aux morphismes propres, nous sommes amenés à prouver le fait que un anneau local noethérien dont le polynôme de Hilbert-Samuel coïncide à celui d'un anneau régulier est régulier. Ceci était déjà connu, cf. [22], th.6.3.

Détails de démonstration pour le théorème se trouvent dans [5]. Notons seulement que la démonstration, jointe aux résultats de [20], montre que pour tout q la famille d fonctions $(n \mapsto \dim H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}))_y$ est localement finie sur Y et que pour toute fonction $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ l'ensemble $\{y \in Y \mid \dim H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}) = \varphi(n), \text{ pour tout } n\}$ est un ensemble analytique (localement fermé) de Y . On

obtient ainsi une stratification pour Y ; si Y est lisse et $Y' \xrightarrow{j} Y$ est un changement de base avec Y' lisse et conexe, alors le théorème montre que l'image inverse de $\mathcal{F}$ sur $X \times_Y Y'$ est q -cohomologiquement plat sur Y' si et seulement si $j(Y')$ est contenu dans un stratus.

Rappelons aussi que les degrés des polynômes de I.2 sont $\leq \leq \dim Y$ (cf. [5]). Énonçons maintenant quelques conséquences.

Corollaire. Avec les notations ci-dessus ($\mathcal{F}$ étant supposé plat sur Y), si pour un point régulier y de Y et un entier $q \geq 0$ on a $H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}) = 0$ pour $n \gg 0$, alors $H^q(X_y, \mathcal{F}/\mathfrak{m}_y \mathcal{F}) = 0$.

Corollaire. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse de variétés complexes et soit $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre de rang fini sur X . Pour tout compact K de Y il existe un entier $n_0 = n_0(K, \mathcal{F})$ avec la propriété: si pour $q \geq 0$, $\dim H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}) = \dim H^q(X_{y'}^{(n)}, \mathcal{F}_{y'}^{(n)})$ pour tout couple (y, y') de points de K et pour au moins $\dim Y$ valeurs $n \geq n_0$, alors $R^q f_* \mathcal{F}$ est localement libre dans un voisinage de K .

Corollaire. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme lisse d'espaces complexes, y un point de Y et $q \geq 0$ un entier. Si $H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{H}_{X_y}^{(n)}) = 0$ pour $n \gg 0$, alors $H^q(X_y, \mathcal{H}_{X_y}) = 0$ ($\mathcal{H}$ c'est le faisceau dual du faisceau Ω des formes différentielles).

En effet, si $\Omega_{X/Y}$ est le faisceau des formes différentielles relatives, alors $(\Omega_{X/Y})_y^{(n)} \simeq \Omega_{X_y}^{(n)}$ (la propriété de changement de base [9]); $\mathcal{H}_{X/Y} = \mathcal{H}om_X(\Omega_{X/Y}, \mathcal{O}_X)$ est un faisceau localement libre de rang fini sur X (donc plat sur Y) et on déduit que

$$(\mathcal{H}_{X/Y})_y^{(n)} \simeq \mathcal{H}_{X_y}^{(n)} (= \mathcal{H}om_{\mathcal{O}_{X_y}}(\Omega_{X_y}^{(n)}, \mathcal{O}_{X_y}^{(n)}))$$

et on applique le premier corollaire.

Question. Nous ne savons pas relaxer, dans le théorème, l'hypothèse que Y est régulier en y . En particulier nous ne savons pas si l'assertion suivante est vraie:

"Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes, $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ plat sur Y , $y \in Y$ et q un entier. Supposons Y réduit en y et $H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}) = 0$ pour $n \gg 0$. Alors $H^q(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$."

De même, nous ignorons si on peut démontrer des assertions de sémi-continuité et continuité pour les coefficients des polynômes étudiés ici (quand on écrit ces polynômes dans la base donnée par $\binom{d+n}{d}$, comme par exemple dans [22]).

4. On va faire quelques commentaires sur les familles différentielles de variétés complexes compactes. Soit Y une variété C^∞ et désignons par $\mathcal{E}$ le faisceau des fonctions C^∞ sur Y à valeurs complexes. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une famille de variétés complexes compactes paramétrée par Y et $\mathcal{F}$ un faisceau sur X , localement libre de type fini (on va considérer sur X comme faisceau structurel le faisceau des fonctions " C^∞ sur la base et holomorphes sur la fibre"). Le résultat fondamental est

Théorème. Il existe, localement sur Y , un complexe $\mathcal{L}$ de $\mathcal{E}$ -modules libres de type fini ayant la propriété suivante: pour tout $\mathcal{E}$ -module pseudocoherent et Fréchet $\mathcal{M}$ on a des isomorphismes

$$H^q(\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M}) \simeq R^q f_* (\mathcal{F} \otimes_{\mathcal{E}} \mathcal{M}) \quad (q \geq 0),$$

fonctoriels en $\mathcal{M}$ et compatibles avec les suites exactes courtes.

Forster-Knorr (Invent.math., 16, 113-160, 1972) et Kiehl (Invent.math., 16, 40-112, 1972) démontrent l'existence d'un $\mathcal{L}$ vérifiant $H^q(\mathcal{L}) \simeq R^q f_* (\mathcal{F})$ ($q \geq 0$). Ensuite il n'est pas assez difficile de montrer que le complexe de Forster-Knorr ou celui de Kiehl vérifie ce qu'il faut: pour $\mathcal{M}$ de la forme $\mathcal{E}/\mathcal{M}_y$ le raisonnement est dû à Schneider (Invent.math., 16, 161-176, 1972), pour le cas général envoyons à [5] (en fait le raisonnement de [5] est adaptable à la situation générale des espaces analytiques relatifs).

On peut appliquer le théorème pour les faisceaux $\mathcal{M}$ donnés

par les quotients $\mathcal{L}_y/m_y^{n+1}$ et on obtient des isomorphismes

$$H^q(\mathcal{L}_y/m_y^{n+1} \mathcal{L}_y) \simeq H^q(X, \mathcal{F}/m_y^{n+1} \mathcal{F}) (= H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})).$$

On va déduire alors pour les fonctions $n \mapsto \dim H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)})$ des résultats analogues aux précédents, à l'exception de la propriété de semi-continuité que nous savons la prouver seulement sous la forme: pour tout n il existe un voisinage V de y tel que

$$\dim H^q(X_{y'}^{(n)}, \mathcal{F}_{y'}^{(n)}) \leq \dim H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}), \text{ pour tout } y' \in V.$$

Nous ignorons si on peut trouver un V bon pour tout n , quand même on peut donner un argument sans semi-continuité pour le fait suivant (cf. [5]): si $H^q(X_y^{(n)}, \mathcal{F}_y^{(n)}) = 0$ pour $n \gg 0$, alors $H^q(X_y, \mathcal{F}_y) = 0$ (dont la démonstration dans le cas complexé utilise la semi-continuité).

On peut démontrer également une variante du théorème de comparaison de Grauert, mais un énoncé satisfaisant, sous la forme habituelle

$$\varprojlim (R^q f_* \mathcal{F}_y/m_y^n R^q f_* \mathcal{F}_y) \simeq \varprojlim H^q(X, \mathcal{F}/m_y^n \mathcal{F})$$

nous ne savons pas le prouver que si $R^{q+1} f_* \mathcal{F}$ est un faisceau de Fréchet [5]. L'hypothèse de Fréchet signifie le fait suivant. Pour tout ouvert U de X on peut calculer $H^*(U, \mathcal{F})$ en utilisant la cohomologie de Čech, en travaillant avec de petits ouverts de la forme $D \times V$, D ouvert d'un espace numérique et V ouvert de la base. On obtient une topologie de type QFS (quotient de Fréchet-Schwartz) sur chaque $H^q(U, \mathcal{F})$ et la topologie est indépendante du recouvrement. Maintenant si V est un ouvert de Y , sur $\Gamma(V, R^q f_* \mathcal{F}) \simeq H^q(f^{-1}(V), \mathcal{F})$ on déduit une topologie QFS. On obtient sur chaque $R^q f_* \mathcal{F}$ une structure de faisceau topologique de type QFS.

Localement sur Y il existe des complexes (bornés à droite, ou même bornés) $\mathcal{L}$ de $\mathcal{L}_Y$ -modules libres de type fini tels que $\mathcal{H}^i(\mathcal{L}) \simeq R^i f_* \mathcal{F}$.

Pour tout ouvert V on a

$$\Gamma(V, R^q f_* \mathcal{F}) \simeq H^q(\mathcal{L}^{q-1}(V) \longrightarrow \mathcal{L}^q(V) \longrightarrow \mathcal{L}^{q+1}(V)),$$

donc on peut donner une autre topologie sur $\Gamma(V, R^q f_* \mathcal{F})$, induite par la topologie de Fréchet du $\mathcal{L}^q$. On peut montrer que cette topologie coïncide à celle obtenue par Čech (on peut par exemple raisonner comme il suit: on démontre en utilisant le théorème de l'application ouverte de Banach que la topologie est indépendante de $\mathcal{L}^q$, ensuite on utilise un $\mathcal{L}^q$ et un complexe de Čech comme dans le travail de Forster-Knorr et on remarque enfin qu'on a une flèche continue entre les deux complexes....).

Question. Nous ignorons si les faisceaux $R^q f_* \mathcal{F}$ sont de Fréchet (i.e. si les espaces $H^q(f^{-1}(V), \mathcal{F})$ sont séparés ou, équivalent, si pour les complexes $\mathcal{L}^q$ qui donnent localement $R^q f_* \mathcal{F}$ les différentielles $\mathcal{L}^{q-1}(V) \longrightarrow \mathcal{L}^q(V)$ sont à image fermée).

Faisons la remarque que si $R^q f_* \mathcal{F}$ est localement libre, alors il est de Fréchet. Comme la question est locale (on plonge injectivement et continuellement....), on peut supposer qu'il existe $\mathcal{L}^q$ qui donne $R^q f_* \mathcal{F}$ et soit $\mathcal{H}^q(\mathcal{L}^q) \simeq \mathcal{E}^p$. Montrons que $B^q(Y) = \text{Im}(\mathcal{L}^{q-1}(Y) \longrightarrow \mathcal{L}^q(Y))$ est fermé. Soient $s_1, \dots, s_p \in Z^q(Y)$ tels que les classes dans $Z^q(Y)/B^q(Y) \simeq \Gamma(Y, \mathcal{H}^q(\mathcal{L}^q))$ donnent une base ($Z^q =$ les cycles...).

L'application $\theta : \mathcal{L}^{q-1}(Y) \oplus \mathcal{E}^p(Y) \longrightarrow Z^q(Y)$ donnée par la différentielle et par $s_1, \dots, s_p$ est continue ($Z^q(Y)$ est $\mathcal{E}^p(Y)$ -module topologique) et surjective. Donc elle est stricte. Comme $B^q(Y)$ et l'image par θ de $0 \oplus \mathcal{E}^p(Y)$ ont l'intersection nulle, on peut élever une suite d'éléments de $B^q(Y)$ qui converge vers un élément de $Z^q(Y)$ dans une suite convergente d'éléments de $\mathcal{L}^{q-1}(Y) \oplus \mathcal{E}^p(Y)$ qui appartient à $\mathcal{L}^{q-1}(Y) \oplus 0$ et on déduit que $B^q(Y)$ est fermé.

Corollaire. Soient $f : X \longrightarrow Y$ une famille C^∞ de variété complexes compactes, $\mathcal{F}$ un faisceau localement libre de rang fini sur X ,

y un point de Y et $q \geq 0$ un entier. Supposons de plus que $R^{q+1} f_* \mathcal{F}$ est de Fréchet. Alors il existe un entier n_0 tel que

$$\text{Im}(H^q(X_y, \mathcal{F}) \longrightarrow H^q(X_y, \mathcal{F}/m_y \mathcal{F})) = \text{Im}(H^q(X_y^{(n_0)}, \mathcal{F}_y^{(n_0)}) \longrightarrow H^q(X_y, \mathcal{F}/m_y \mathcal{F})).$$

L'argument est le même que dans I.1 : on utilise le théorème de comparaison et le fait que pour tout r il existe un entier $n_0 = n_0(r)$ tel que

$$\text{Im}(H^q(X, \mathcal{F}_y^{(n+r)}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}_y^{(r)})) = \text{Im}(H^q(X, \mathcal{F}_y^{(n_0+r)}) \longrightarrow H^q(X, \mathcal{F}_y^{(r)}))$$

(ceci étant conséquence du fait que $\dim H^q(X, \mathcal{F}_y^{(r)}) < \infty$).

II. Le cas de fibrés en droites

1. Soient de *nouveau* un morphisme propre $f : X \longrightarrow Y$ d'espaces complexes et y un point de Y. L'image inverse définie des applications linéaires $\text{Pic } X_y^{(m)} \longrightarrow \text{Pic } X_y^{(n)}$, $m \geq n$. On obtient en fait un système projectif. On va noter $\text{Pic } f^{-1}(y)$ le groupe de Picard de l'espace annelé $(f^{-1}(y), \mathcal{O}_X|_{f^{-1}(y)})$. On a des isomorphismes

$$\text{Pic } f^{-1}(y) \simeq H^1(f^{-1}(y), \mathcal{O}_X^*) \simeq \varinjlim \text{Pic } U,$$

la limite inductive étant d'après les voisinages de $f^{-1}(y)$ dans X.

L'association $\mathcal{L} \longmapsto \mathcal{L}_y^{(n)}$ définie une application $\text{Pic } f^{-1}(y) \longrightarrow \text{Pic } X_y^{(n)}$ et ceux-ci une autre $\text{Pic } f^{-1}(y) \longrightarrow \varprojlim \text{Pic } X_y^{(n)}$.

On muni chaque $\text{Pic } X_y^{(n)}$ avec la topologie discrète et on prenne sur $\varprojlim$ la topologie limite projective.

Théorème. L'application $\text{Pic } f^{-1}(y) \longrightarrow \varprojlim \text{Pic } X_y^{(n)}$ est injective et d'image dense.

On peut interpréter l'énoncé en disant que $\text{Pic } f^{-1}(y)$ est séparé dans la topologie induite et que son complété est isomorphe à $\varprojlim \text{Pic } X_y^{(n)}$, de cette manière l'analogie avec le Vergleichsatz de Grauert est frappante.

Dans la géométrie algébrique un tel théorème a été prouvé par Artin [2], la démonstration est beaucoup plus difficile que dans

le cas analytique (la manque de l'exponentielle!).

L'énoncé a été dégagé sous cette forme par Bingener [7] et indépendant par l'auteur, mais en fait il se trouve en substance dans le papier de Kuhlmann ([19], démonstration du Satz 1). L'argument consiste à analyser à la Mittag-Leffler un diagramme donné par les suites exactes $0 \rightarrow Z \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow \mathcal{O}_X^* \rightarrow 0$, $0 \rightarrow Z \rightarrow$

$\rightarrow \mathcal{O}_{X/Y}^{(n)} \rightarrow \mathcal{O}_{X/Y}^{*(n)} \rightarrow 0$, en utilisant pour $\mathcal{O}$ des renseignements

donnés par le théorème de Grauert (cf.I) et pour Z le fait que $f^{-1}(y)$ est triangulable (on a le soin de factoriser certaines applications par les espaces $H^*(X, Z) \otimes_Z Q$ et ceux-ci sont de dimension finie sur Q et on utilise ce fait pour prouver que certaines suites d'images dans $H^*(X, Z) \otimes_Z Q$ sont stationnaires).

Voici un autre argument, qui n'utilise pas la cohomologie à valeurs dans Z . D'abord on va écrire une suite exacte remarquable. Soit X un espace complexe et $S \subset X$ un sous-espace donné par un idéal cohérent $\mathcal{Y} \subset \mathcal{O}_X$. On a une application linéaire injective $\mathcal{Y}|_S \rightarrow \mathcal{O}^*|_S$, $\varphi \rightarrow e^\varphi$ (e^φ est bien définie dans un voisinage des points où φ est nulle). D'autre part on a l'application surjective de passage au quotient $\mathcal{O}^*|_S \rightarrow (\mathcal{O}/\mathcal{Y})^*|_S$. On obtient une suite exacte

$$0 \rightarrow \mathcal{Y}|_S \rightarrow \mathcal{O}^*|_S \rightarrow \mathcal{O}_S^* \rightarrow 1,$$

car $\ln(1+\varphi) = \varphi - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$ est dans $\mathcal{Y}$ pour un élément φ de $\mathcal{Y}$.

Par passage à la cohomologie on obtient la suite exacte

$$\dots \rightarrow H^1(S, \mathcal{Y}) \rightarrow \text{Pic}(S, \mathcal{O}_X|_S) \rightarrow \text{Pic } S \rightarrow H^2(S, \mathcal{Y}) \rightarrow \dots$$

Prouvons maintenant le théorème. Supposons que $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ sont deux faisceaux invertibles sur un voisinage de $f^{-1}(y)$ tels que $\mathcal{L}_{1,Y}^{(n)} \simeq \mathcal{L}_{2,Y}^{(n)}$ pour tout $n \geq 0$. Considérons le faisceau $\mathcal{H} = \mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$.

Il existe n_0 tel que $\text{Im}(\Gamma(f^{-1}(y), \mathcal{H}) \rightarrow \Gamma(X_Y, \mathcal{H}_Y)) =$

$= \text{Im}(\Gamma(X_y^{(n_0)}, \mathcal{H}_y^{(n_0)}) \longrightarrow \Gamma(X_y, \mathcal{H}_y))$. Soit α un isomorphisme

$\mathcal{L}_{1,y}^{(n_0)} \simeq \mathcal{L}_{2,y}^{(n_0)}$. On peut donc trouver un morphisme $\beta: \mathcal{L}_1 \longrightarrow \mathcal{L}_2$

(dans un voisinage de $f^{-1}(y)$) tel que α et β ont la même image dans $\text{Hom}(\mathcal{L}_{1,y}, \mathcal{L}_{2,y})$. En particulier $\beta \bmod \mathfrak{m}_y$ est isomorphisme et il résulte aisément que β est isomorphisme dans un voisinage de $f^{-1}(y)$.

Prouvons la densité. Soit n un entier et $\xi = (\xi_m)_m$ un élément de $\varprojlim \text{Pic } X_y^{(m)}$. Il faut trouver $\eta \in \text{Pic } f^{-1}(y)$ dont l'image dans $\text{Pic } X_y^{(m)}$ soit ξ_m pour $m \leq n$. On a une suite exacte

$$\dots \longrightarrow \text{Pic } f^{-1}(y) \longrightarrow \text{Pic } X_y^{(n)} \longrightarrow H^2(f^{-1}(y), \mathfrak{m}_y^{n+1} \mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots$$

Il suffit de montrer que l'image τ^n de ξ^n dans $H^2(f^{-1}(y), \mathfrak{m}_y^{n+1} \mathcal{O}_X) \simeq R^2 f_* (\mathfrak{m}_y^{n+1} \mathcal{O}_X)_y$ est nulle. D'après le théorème I.1 et le théorème de séparation de Krull il suffit de prouver que l'image de τ^n dans $H^2(f^{-1}(y), \mathfrak{m}_y^{n+1} \mathcal{O}_X / \mathfrak{m}_y^{n+r+1} \mathcal{O}_X)$ est nulle pour tout $r \geq 0$, i.e. qu'elle est dans tout $\text{Im}(H^2(f^{-1}(y), \mathfrak{m}_y^{n+r+1} \mathcal{O}_X) \longrightarrow H^2(f^{-1}(y), \mathfrak{m}_y^{n+1} \mathcal{O}_X))$.

Mais ça c'est vrai, parce que $\xi^n = \text{Im } \xi^{n+r}$ et que on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \text{Pic } X_y^{(n+r)} & \longrightarrow & H^2(f^{-1}(y), \mathfrak{m}_y^{n+r+1} \mathcal{O}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \text{Pic } X_y^{(n)} & \longrightarrow & H^2(f^{-1}(y), \mathfrak{m}_y^{n+1} \mathcal{O}_X) \end{array}$$

Remarque. En fait l'argument pour l'injectivité donné également: si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des fibrés vectoriels holomorphes sur X et si $\mathcal{F}_y^{(n)} \simeq \mathcal{G}_y^{(n)}$ pour $n \gg 0$, alors $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$ dans un voisinage de $f^{-1}(y)$.

Si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont des faisceaux cohérents quelconques sur X et $\widehat{\mathcal{F}}_y \simeq \widehat{\mathcal{G}}_y$ ($\widehat{}$ désigne les complétés formels...), i.e. si $\mathcal{F}_y^{(n)} \simeq \mathcal{G}_y^{(n)}$ par des isomorphismes qui sont compatibles avec les changements $X_y^{(n)} \longrightarrow X_y^{(n+1)}$, alors $\mathcal{F} \simeq \mathcal{G}$ dans un voisinage de $f^{-1}(y)$ (cf. Bingsener [8]).

Concernant la densité on peut prouver l'assertion plus pre-

cise: il existe n_0 tel que

$$\text{Im}(\text{Pic } f^{-1}(y) \longrightarrow \text{Pic } X_y^{(r)}) = \text{Im}(\text{Pic } X_y^{(r+n_0)} \longrightarrow \text{Pic } X_y^{(r)}).$$

Il est intéressant de savoir si n_0 a la même propriété pour les points voisins de y (en supposant f plat et avec des bonnes propriétés topologiques). Enfin notons aussi que $\varprojlim \text{Pic } X_y^{(n)}$ s'identifie au groupe de Picard du complété formel

$$\hat{X}_y = (f^{-1}(y), \varprojlim (\mathcal{O}_X / m_y^{n+1} \mathcal{O}_X |_{f^{-1}(y)})), \text{ cf. [7].}$$

2. Avec l'argument que nous l'avons donné et en utilisant [3] on peut obtenir la généralisation suivante

Théorème. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes dont le but Y est de Stein, Y' un sous-espace de Y donné par un idéal $\mathcal{J}$, $X' = f^{-1}(Y')$ et $X_{Y'}^{(n)} = (X', \mathcal{O}_X / \mathcal{J}^{n+1} \mathcal{O}_X |_{X'})$.

(i) Si deux faisceaux invertibles $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2$ ont la même image par l'application $\text{Pic}(X', \mathcal{O}_X |_{X'}) \longrightarrow \varprojlim \text{Pic } X_{Y'}^{(n)}$, alors ils sont isomorphes sur tout compact de X' .

(ii) L'application $\text{Pic}(X', \mathcal{O}_X |_{X'}) \longrightarrow \varprojlim \text{Pic } X_{Y'}^{(n)}$ est dense.

Démonstration. L'assertion (i) résulte du fait suivant (appliqué au faisceau $\mathcal{H}om(\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2)$), conséquence des résultats de [3]: pour tout $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$ et tout ouvert de Stein relativement compact V de Y il existe n_0 tel que

$$\begin{aligned} \text{Im}(\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}) \longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F})) &= \text{Im}(\Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}/\mathcal{J}^{n_0}\mathcal{F}) \longrightarrow \\ &\longrightarrow \Gamma(f^{-1}(V), \mathcal{F}/\mathcal{J}\mathcal{F})). \end{aligned}$$

Prouvons (ii). Soit n un entier et $\xi = (\xi_m)_m$ un élément de $\varprojlim \text{Pic } X_{Y'}^{(n)}$. Il faut trouver $\eta \in \text{Pic}(X', \mathcal{O}_X |_{X'})$ dont l'image dans $\text{Pic } X_{Y'}^{(n)}$ soit ξ_m pour $m \leq n$. Considérons la suite exacte

$$\dots \longrightarrow \text{Pic}(X', \mathcal{O}_X |_{X'}) \longrightarrow \text{Pic } X_{Y'}^{(n)} \longrightarrow H^2(X', \mathcal{J}^{n+1} \mathcal{O}_X) \longrightarrow \dots$$

Il suffit de montrer que l'image τ_n de ξ_n dans $H^2(X', \mathcal{J}^{n+1} \mathcal{O}_X)$ est nulle. En remplaçant Y pour un voisinage de Stein de Y' , on peut

supposer que τ_n est la restriction d'un élément de $H^2(X, \mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_X)$, notons le aussi par τ_n . On a l'identification $H^2(X, \mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_X) \simeq \Gamma(Y, R^2 f_* (\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_X))$.

Soit $\mathcal{G} = R^2 f_* (\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_X)$. Tout élément du noyau de l'application $\Gamma(Y, \mathcal{G}) \rightarrow \Gamma(Y, \varprojlim \mathcal{G}/\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{G})$ est nul dans un voisinage de Y' (conséquence directe du théorème de séparation de Krull). D'après [3],

$$\Gamma(Y, \varprojlim \mathcal{G}/\mathcal{I}^{r+1} \mathcal{G}) \simeq \varprojlim \Gamma(Y, R^2 f_* (\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{n+r+1} \mathcal{O}_X)).$$

On va donc finir la démonstration si on montre que l'image de τ_n dans chaque $\Gamma(Y, R^2 f_* (\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_X / \mathcal{I}^{n+r+1} \mathcal{O}_X))$ ($\simeq \Gamma(Y', \dots)$) est nulle, i.e. que ceci appartient à $\text{Im}(\Gamma(Y', R^2 f_* (\mathcal{I}^{n+r+1} \mathcal{O}_X)) \rightarrow \Gamma(Y', R^2 f_* (\mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_X)))$. Mais ça résulte, parce que $\xi_n = \text{Im } \xi_{n+r}$ et que on a le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} \text{Pic } X_{Y'}^{(n+r)} & \longrightarrow & H^2(X', \mathcal{I}^{n+r+1} \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \Gamma(Y', \dots) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \text{Pic } X_{Y'}^{(n)} & \longrightarrow & H^2(X', \mathcal{I}^{n+1} \mathcal{O}_X) & \longrightarrow & \Gamma(Y', \dots). \end{array}$$

3. Théorème. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes, $\mathcal{L}$ un faisceau invertible sur X et y un point de Y . Alors on a l'équivalence

- (1) $\mathcal{L}$ est ample relativement à f dans un voisinage de y .
- (2) $\mathcal{L}_y^{(n)}$ est ample pour tout n .
- (3) $\mathcal{L}/\mathfrak{m}_y \mathcal{L}$ est ample.

Ce résultat est dû à Grothendieck dans le cas algébrique [15].

Un argument dans le cas analytique se trouve dans ([19], démonstration du Satz 1). Disons simplement que seule l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) est difficile, mais l'argument donné par Grothendieck peut s'adapter aisément. Pour la convenance du lecteur, esquissons-le (cf. aussi [7]). Il suffit (cf. par exemple [4], démonstration du théorème 4.4.1) de montrer que pour tout $\mathcal{F} \in \text{Coh } X, R^q f_* (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n)_y = 0$ pour $q \geq 1$ et $n \gg 0$.

Par le théorème de comparaison de Grauert, il suffit de prouver que $H^q(X, \mathcal{F}/\mathcal{M}^r \mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0$ pour tout $q \geq 1$, $r \geq 0$ et n assez grand (mais indépendant de r), donc que

$$(*) \quad H^q(X_y, (\mathcal{M}^r \mathcal{F}/\mathcal{M}^{r+1} \mathcal{F}) \otimes (\mathcal{L}/\mathcal{M}_y \mathcal{L})^{\otimes n}) = 0 \text{ pour } q \geq 1, r \geq 0 \text{ et } n \gg 0.$$

La restriction de l'algèbre graduée $\bigoplus (\mathcal{M}^r \mathcal{O}_X / \mathcal{M}^{r+1} \mathcal{O}_X)$ sur la variété projective $X_y = (f^{-1}(y), \mathcal{O}_X / \mathcal{M}_y \mathcal{O}_X |_{f^{-1}(y)})$ est cohérente et globalement de type fini et la restriction de $\bigoplus (\mathcal{M}^r \mathcal{F}/\mathcal{M}^{r+1} \mathcal{F})$ est un module cohérent et gradué sur ceci, cf. par exemple [3]. Maintenant (*) résulte par GAGA d'un résultat analogue de géométrie algébrique ([15], Ch.III, th.2.4.1). Comme on voit, la clé de la démonstration est un théorème d'annulation homogène de la cohomologie vers ∞ ; on va prouver dans la section suivante le résultat général de ce type (dont une conséquence serait exactement une généralisation du résultat précédent de Kuhlmann). On a aussi le résultat suivant

Proposition. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes, y un point de Y et $\mathcal{L}$ un faisceau invertible sur X tel que $\mathcal{L}^{(n)}$ soit très simple pour tout n . Alors $\mathcal{L}$ est très ample au dessus d'un voisinage de y .

Démonstration. On va montrer que l'application $f^* f_* \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$ est surjective dans les points de $f^{-1}(y)$. Ensuite le raisonnement est standard: il va résulter la même condition dans un ouvert $f^{-1}(V)$ (V voisinage de y), donc le morphisme $f^{-1}(V) \rightarrow \mathbb{P}(f_* \mathcal{F}/V)$ est bien défini, mod $\mathcal{M}_y$ il est une immersion fermée et la conclusion en résulte (cf. par exemple [4], prop.4.4.3). Soit donc $x \in f^{-1}(y)$. Il suffit de trouver une section $s \in \Gamma(f^{-1}(y), \mathcal{L}) = f_*(\mathcal{L})_y$ telle que $s(x) \neq 0$ (i.e. $s_x \notin \mathcal{M}_x \mathcal{L}_x$). Soit n_0 avec la propriété

$$\text{Im}(\Gamma(f^{-1}(y), \mathcal{L}) \rightarrow \Gamma(X_y, \mathcal{L}_y)) = \text{Im}(\Gamma(X_y^{(n_0)}, \mathcal{L}_y^{(n_0)}) \rightarrow \Gamma(X_y, \mathcal{L}_y)).$$

Il existe $t \in \Gamma(X_y^{(n_0)}, \mathcal{L}_y^{(n_0)})$ avec la propriété $t(x) \neq 0$. On peut

trouver $s \in \Gamma(f^{-1}(y), \mathcal{L})$ dont l'image dans $\Gamma(X_y, \mathcal{L}_y)$ est la même que l'image de t et ceci est la section cherchée.

Remarque. Par des arguments semblables, ou en les déduisant directement de résultats ci-dessus, on a:

"Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme propre d'espaces complexes, Y' un sous-espace fermé de Y , $X = f^{-1}(Y')$ et $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X , alors $\mathcal{L}$ est ample (resp. très ample) si et seulement si $\mathcal{L}_{Y'}^{(0)}$ (resp. $\mathcal{L}_{Y'}^{(n)}$ pour tout n) est ample (resp. très ample)".

4. Théorème. Soient $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes, $T_1, \dots, T_N$ des indéterminées et $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_N]$ -module cohérent et gradué. Alors

(1) $R^q f_* (\mathcal{M})$ est $\mathcal{O}_Y[T_1, \dots, T_N]$ -cohérent pour tout q ;

(2) si f est projectif et $\mathcal{L}$ est ample relativement à f ,

alors, localement sur Y , $R^q f_* (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour $n \gg 0$, $q \geq 1$; de même, localement, les morphismes $f^* f_* (\mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n) \rightarrow \mathcal{M} \otimes \mathcal{L}^n$ sont surjectives pour $n \gg 0$.

Les énoncés sont similaires aux énoncés de géométrie algébrique ([15], ch.III, th.2.4.1 et proposition 3.3.1; le passage aux algèbres graduées est facile), mais les démonstrations dans le cas analytique sont plus difficiles. Une démonstration pour (1) a été donnée dans [3] et ce résultat a permis de prouver dans le cas analytique le théorème de comparaison de Grothendieck ([15], Ch.III, th.4.1.5). Une démonstration plus courte est donnée dans ([4], Ch.6, fin du § 3), en utilisant les théorèmes de Grauert-Remmert pour les morphismes projectifs [13]. Montrons ici comment on peut prouver (2), en utilisant de même le théorème de Grauert-Remmert. Notons par $p : X \times \mathbb{P}^{N-1} \rightarrow X$ la projection. On va noter par $\tilde{\mathcal{M}}$ le faisceau sur $X \times \mathbb{P}^{N-1}$ obtenu du préfaisceau

$$U \times D \longrightarrow \left\{ \frac{s}{Q} \in \Gamma(U, \mathcal{M})_{S(D)} \mid s, Q \text{ homogènes de même degré} \right\},$$

U étant ouvert de X , D ouvert de $\mathbb{P}^{N-1}$ et $S(D)$ le système multipli-

catif des éléments de $\bigcup_k \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N-1}}(k)(D)$ sans zéros (gradué par k). $\widetilde{\mathcal{M}}$ est un faisceau analytique cohérent sur $X \times \mathbb{P}^{N-1}$.

Si maintenant $\mathcal{E}$ est un faisceau cohérent sur $X \times \mathbb{P}^{N-1}$, on va noter $\Gamma(\mathcal{E}) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} p_* (\mathcal{E}(k))$. Ceci a une structure naturelle de

$\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_N]$ -module gradué, et on démontre qu'il est cohérent.

De même on démontre qu'on a un morphisme gradué canonique $\mathcal{M} \rightarrow \Gamma(\widetilde{\mathcal{M}})$ qui est isomorphisme dans les degrés assez grands (on peut trouver des démonstrations dans le cas analytique dans [4], Ch. 6, § 3).

Prouvons la première assertion de (2) par induction sur q . Si q est assez grand, $R^q f_* = 0$ (localement sur Y). Supposons prouvé le résultat pour $q+1$ et prouvons le pour q . Comme le noyau et le conoyau du $\mathcal{M} \rightarrow \Gamma(\widetilde{\mathcal{M}})$ résultent $\mathcal{O}_X$ -cohérents, le résultat est vrai pour ceux-ci, cf. le théorème de Grauert-Remmert. Il suffit donc de le prouver pour $\Gamma(\mathcal{M})$, donc pour un $\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_N]$ -module de la forme $\Gamma(\mathcal{E})$. Soit L un compact de Stein de Y .

D'après [13], il existe un k_0 tel que le morphisme $p^* p_*(\mathcal{E}(k_0)) \rightarrow \mathcal{E}(k_0)$ soit epimorphisme dans un voisinage de $p^{-1}f^{-1}(L)$. Comme $\mathcal{L}$ est ample au-dessus de Y et L est de Stein, il existe en appliquant de nouveau [13] un epimorphisme $\mathcal{J} \rightarrow p_*(\mathcal{E}(k_0))$ dans un voisinage de $f^{-1}(L)$, où $\mathcal{J}$ est une somme finie de modules isomorphes à une puissance $\mathcal{L}^{q_0}$ ($q_0 < 0$). Par conséquence on obtient dans un voisinage de $p^{-1}f^{-1}(L)$ un epimorphisme $p^* \mathcal{J} \rightarrow \mathcal{E}(k_0) \rightarrow 0$, donc un epimorphisme $(p^* \mathcal{J})(-k_0) \rightarrow \mathcal{E} \rightarrow 0$. Notons $\mathcal{I} = p^*(\mathcal{J})(-k_0)$ et $\theta : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{E}$ le morphisme. Par Γ on obtient un morphisme gradué et de [13] on déduit que les composantes $\Gamma(\theta)_r$ sont des epimorphismes dans un voisinage de $f^{-1}(L)$ pour $r \gg 0$. Donc $\mathcal{C} = \text{Coker } \Gamma(\theta)$ est cohérent sur $\mathcal{O}_X$, donc $R^q f_*(\mathcal{C} \otimes \mathcal{L}^n) |_L = 0$ pour $n \gg 0$. Par conséquence il faut prouver le résultat pour $I = \text{Im } \Gamma(\theta)$. On a les suites exactes ($K = \text{Ker } \Gamma(\theta)$)

$$R^q f_* (\Gamma(\mathcal{F}) \otimes \mathcal{L}^n) \longrightarrow R^q f_* (I \otimes \mathcal{L}^n) \longrightarrow R^{q+1} f_* (K \otimes \mathcal{L}^n).$$

On a $\Gamma(\mathcal{F}) \simeq (\Gamma(p^*(\mathcal{T}))) [-k_0]$, où $[-k_0]$ signifie qu'on a décalé le degré dans le module gradué.... En appliquant l'hypothèse d'induction on voit qu'il suffit de prouver ce qu'on cherche pour $\Gamma(p^*(\mathcal{T}))$, donc pour $\Gamma(p^*(\mathcal{L}^{q_0}))$. Mais on peut obtenir aisément des identifications $\Gamma(p^*(\mathcal{L}^{q_0})) \simeq \mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_N] \otimes \mathcal{L}^{q_0}$ et on conclut, parce que les composantes homogènes sont des sommes finies de $\mathcal{L}^{q_0}$. Quand à la deuxième assertion de (2), elle résulte par l'argument théorème B $\Rightarrow$ théorème A.

L'assertion (1) est utile pour étudier les morphismes propres d'espaces complexes formels ([8], Satz 3.1).

L'assertion (2) peut être utile pour étudier les morphismes projectifs entre tels espaces. Bornons-nous à prouver le résultat suivant, qui en fait est une généralisation du théorème de la section précédente.

Corollaire. Soient $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes formels, $\mathcal{y} \subset \mathcal{O}_Y$ un idéal de définition pour f , $\mathcal{L}$ un faisceau inversible sur X et $\mathcal{F} \in \text{Coh } X$. Supposons que $\mathcal{L}/\mathcal{y}\mathcal{L}$ (qui est un faisceau inversible sur l'espace complexe donné par $\mathcal{y}\mathcal{O}_X$) est ample relativement au morphisme $(X, \mathcal{O}_X/\mathcal{y}\mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y/\mathcal{y})$. Alors, localement sur Y , $R^q f_* (\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n) = 0$ pour $n \gg 0$ et $q \geq 1$.

Démonstration. Notons $\mathcal{F} \otimes \mathcal{L}^n = \mathcal{F}(n)$. D'après [8],

$$R^q f_* (\mathcal{F}(n)) \simeq \varprojlim_k R^q f_* (\mathcal{F}(n)/\mathcal{y}^k \mathcal{F}(n)).$$

Il suffit donc de trouver pour tout compact de Stein L de Y un entier n_0 tel que $R^q f_* (\mathcal{F}(n)/\mathcal{y}^k \mathcal{F}(n))|_L = 0$ pour $q \geq 1$, $k \geq 1$ et $n \geq n_0$.

Par additivité il suffit de prouver que $R^q f_* (\mathcal{y}^k \mathcal{F}(n)/\mathcal{y}^{k+1} \mathcal{F}(n))|_L = 0$ pour $q \geq 1$, $k \geq 1$ et $n \gg 0$. On a $\mathcal{y}^k \mathcal{F}(n)/\mathcal{y}^{k+1} \mathcal{F}(n) \simeq (\mathcal{y}^k \mathcal{F}/\mathcal{y}^{k+1} \mathcal{F}) \otimes_{\mathcal{O}_X/\mathcal{y}\mathcal{O}_X} (\mathcal{L}/\mathcal{y}\mathcal{L})^n$.

Si $t_1, \dots, t_N$ sont des sections qui engendrent $\mathcal{Y}$ sur L , alors il résulte que $\bigoplus (\mathcal{Y}^k \mathcal{F} / \mathcal{Y}^{k+1} \mathcal{F})$ a une structure naturelle de $\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_N]$ -module cohérent et gradué. On conclut en appliquant le théorème pour le morphisme d'espaces complexes $(X, \mathcal{O}_X / \mathcal{I}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y / \mathcal{I}_Y)$.

Question. J'ignore si dans le théorème on peut supposer que $\mathcal{M}$ est seulement cohérent sur $\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_N]$ (c'est vrai dans la géométrie algébrique [15]). En particulier je ne sais pas répondre à la question:

"Soient $(X, \mathcal{O}_X)$ un espace complexe compact, $T_1, \dots, T_N$ des indéterminées, $\mathcal{M}$ un $\mathcal{O}_X[T_1, \dots, T_N]$ -modul cohérent. Sont-ils $H^q(X, \mathcal{M})$ des modules de type fini sur $\mathbb{C}[T_1, \dots, T_N]$? "

III. Propriétés géométriques des fibres

Théorème. Soit $f : X \longrightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes et y un point de Y . Supposons que toutes les fibres infinitésimelles $X_y^{(n)}$ sont projectives. Alors f est projectif au dessus d'un voisinage de y .

C'est le résultat principal prouvé par Kuhlmann dans [19] et l'on peut obtenir aisément des résultats précédents. En effet, il existe n_0 tel que

$$\text{Im}(\text{Pic } f^{-1}(y) \longrightarrow \text{Pic } X_y^{(0)}) = \text{Im}(\text{Pic } X_y^{(n_0)} \longrightarrow \text{Pic } X_y^{(0)}).$$

Soit $\mathcal{T}$ un faisceau ample sur $X_y^{(n_0)}$. Il existe un faisceau invertible $\mathcal{L}$ défini dans un voisinage de $f^{-1}(y)$ dont l'image dans $\text{Pic } X_y^{(0)}$ coïncide à l'image de $\mathcal{T}$. On conclut par le théorème II.3. Donnons une conséquence du théorème.

Proposition. Tout espace complexe X strictement pseudoconvexe, de dimension 2 et de dimension Zariski bornée, sans composantes irréductibles compacts, peut être plongé dans un produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^m$.

Démonstration. Soit $f : X \rightarrow Y$ la réduction de Remmert et A l'ensemble exceptionnel de X . Pour tout $y \in f(A) = B$, $f^{-1}(y)$ est de dimension ≤ 1 , donc $X_y^{(n)}$ sont projectives pour tout n . D'après le théorème, on peut trouver un faisceau invertible $\mathcal{L}$ sur un voisinage de $f^{-1}(y)$ qui est ample relativement à f . Comme B est fini, on peut ainsi trouver un voisinage V de B et $\mathcal{L} \in \text{Pic } f^{-1}(V)$, ample au dessus de V . De plus, on peut supposer que V est de Stein et que $H^q(V, Z) = 0$, $q \geq 1$. Prouvons que, quitte à remplacer $\mathcal{L}$ par une puissance, on peut le prolonger à X .

On a le diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^1(Y \setminus B, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(Y \setminus B, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & H^2(Y \setminus B, Z) & \longrightarrow & H^2(Y \setminus B, \mathcal{O}) \\
 \downarrow \varepsilon_1 & & \downarrow \varepsilon_2 & & \downarrow \varepsilon_3 & & \downarrow \varepsilon_4 \\
 H^1(V \setminus B, \mathcal{O}) & \longrightarrow & H^1(V \setminus B, \mathcal{O}^*) & \longrightarrow & H^2(V \setminus B, Z) & \longrightarrow & H^2(V \setminus B, \mathcal{O})
 \end{array}$$

Les morphismes ε_1 et ε_4 sont des isomorphismes par le théorème B de Cartan et en utilisant les suites exactes de la cohomologie relative de B dans V et dans Y .

D'autre part on a le diagramme commutatif et exact

$$\begin{array}{ccccccc}
 H^2(Y, Z) & \longrightarrow & H^2(Y \setminus B, Z) & \longrightarrow & H_B^3(Y, Z) & \longrightarrow & H^3(Y, Z) \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
 H^2(V, Z) & \longrightarrow & H^2(V \setminus B, Z) & \longrightarrow & H_B^3(V, Z) & \longrightarrow & H^3(V, Z).
 \end{array}$$

Comme $H^2(V, Z) = H^3(V, Z) = 0$ et $H^3(Y, Z)$ est à torsion (cf. [21], Y étant espace de Stein de dimension 2), il résulte que $\text{Coker } \varepsilon_3$ est à torsion.

On considère maintenant la restriction de $\mathcal{L}$ à $f^{-1}(V) \setminus A$. Comme $f^{-1}(V) \setminus A \simeq V \setminus B$, l'image de cette restriction par f donne un élément ξ dans $H^1(V \setminus B, \mathcal{O}^*)$. Du diagramme $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$ on déduit qu'une puissance de ξ se prolonge à $Y \setminus B$. On obtient un faisceau inversible sur $Y \setminus B \simeq X \setminus A$ et en utilisant ceci on peut prolonger à X une puissance

de $\mathcal{L}$. On peut donc supposer que le faisceau $\mathcal{L}$ donné par le théorème de Kuhlmann est défini sur X . L'application $X \rightarrow \mathbb{P}(f_*(\mathcal{L}))$ est bien définie, en plus elle résulte immersion fermée. Y est un espace de Stein de dimension Zariski bornée, donc on peut trouver un plongement $Y \rightarrow \mathbb{C}^n$. D'autre part, il existe un nombre fini de sections globales qui engendrent $f_*(\mathcal{L})$ (par induction sur $\dim Y \dots$), donc on peut plonger $\mathbb{P}(f_*(\mathcal{L}))$ dans un espace projectif $\mathbb{P}^m$. L'application $X \rightarrow \mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^m$ donnée par $X \xrightarrow{f} Y \rightarrow \mathbb{C}^n$, $X \rightarrow \mathbb{P}(f_*(\mathcal{L})) \rightarrow \mathbb{P}^m$ est un plongement.

Dans [1] et [10] il est établi le résultat suivant:

"Soit X un espace complexe strictement pseudoconvexe. Alors on a l'équivalence

- (i) X admet un fibre en droites positif;
- (ii) X peut se plonger dans un produit $\mathbb{C}^n \times \mathbb{P}^m$;
- (iii) X est projectivement séparable".

Il est naturel de demander quelle est la liaison entre ceci et la propriété de l'ensemble exceptionnel A d'être projectif (ou infinitésimal projectif, i.e. les espaces $(A, \mathcal{O}_X/\mathcal{I}^n/A)$ sont projectifs, $\mathcal{I}$ étant l'idéal défini par A), cf. également [25], question 5. Notons enfin la généralisation suivante du théorème.

Théorème. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme propre d'espaces complexes dont le but Y est de Stein et soit Y' un sous-espace de Y . Supposons que les morphismes $X_{Y'}^{(n)} \rightarrow Y_{Y'}^{(n)}$ sont projectifs pour tout n . Alors f est projectif au dessus de tout compact de Y .

La démonstration est la même, seulement il faut noter que pour l'existence d'un n_0 on doit utiliser la suite exacte de l'exponentielle et analyser la situation comme dans Kuhlmann [19] (cette fois, pour les renseignements sur $\mathcal{O}_X$ on doit utiliser essentiellement [3]).

J'ignore si on peut conclure que f est projectif au dessus

d'un voisinage de Y' . De même, j'ignore la réponse à la question:

"Soit $f : X \longrightarrow Y$ une famille $\mathbb{C}^\infty$ de variétés complexes compactes et $y \in Y$. Supposons que $X_Y^{(n)}$ (qui est un espace complexe est projectif pour tout n . Est-ce qu'on peut factoriser f , en remplaçant Y par un voisinage de y , par un plongement $X \longrightarrow Y \times \mathbb{P}^N$?".

La question est liée, via les arguments donnés ici, de la séparation des faisceaux $Rf_* \mathcal{O}_X$ (cf. I.4).

INCREST,

Dép. de Math.
Bd. Păcii 220
et l'Institut
Central de Math.
Str. Academiei 14
Bucarest

Bibliographie

- [1] Andreotti A., Bănică C., Twisted sheaves on complex spaces (va apparaître).
- [2] Artin M., *Algebraic approximation of structures over complete local rings*, Publ. I.H.E.S., Paris.
- [3] Bănică C., Le complété formel d'un espace analytique le long d'un sous-espace: un théorème de comparaison, *Manuscripta math.*, 6, 207-244, 1972.
- [4] Bănică C., Stănăşilă O., Méthodes algébriques dans la théorie globale des espaces complexes, Bucarest 1974 et Gauthier-Villars, Paris, 1977.
- [5] Bănică C., Brînzănescu V., Hilbert-Samuel polynomials of a proper morphism, *Math.Z.*, 158, 107-124, 1978.
- [6] Bănică C., Brînzănescu V., Hilbert-Samuel polynomials of a complex of modules, *Comm. in Algebra*, 5(7), 733-742, 1977.
- [7] Bingener J., *Habilitationschrift*, Osnabrück, 1976.
- [8] Bingener J., *Über formale komplexe Räume*, *Manuscripta math.*, 1978.
- [9] Cartan H., *Séminaire E.N.S.*, 1960/61.
- [10] Eto S., Kazama H., Watanabe K., On strongly q -pseudo-convex spaces with positive vector bundles, *Memoirs of the Fac.Sc. Kyushu University*, Ser. A. Vol.28, no. 2, 1974.

- [11] Forster O., Knorr K., Ein Beweis des Grauert'schen Bildgarbensatzes nach Ideen von B. Malgrange, *Manuscripta math.*, 5, 19-33, 1971.
- [12] Grauert H., Ein Theorem der analytischen Garbentheorie und die Modulräume komplexer Strukturen, *Publ. IHES*, No.5, 1960.
- [13] Grauert H., Remmert R., Bilder und Urbilder analytischer Garben, *Ann. of Math.*, 68, 393-443, 1958.
- [14] Griffiths P., *The extension problem for compact submanifolds of complex manifolds. Proc. Conf. Complex Analysis Minneapolis, 1964.*
- [15] Grothendieck A., Dieudonné J., *Eléments de géométrie algébrique*, IHES, Paris.
- [16] Kiehl R., Verdier J.L., Ein einfacher Beweis des Kohärenzsatzes von Grauert, *Math. Ann.*, 195, 24-50, 1971.
- [17] Knorr K., Der Grauert'sche Projektionssatz, *Invent. Math.*, 12, 118-172, 1971.
- [18] Kodaira K., Spencer D.C., On deformations of complex analytic structures, I, II, *Ann. of Math.*, 67, 328-466, 1958 and III, *Ann. of Math.*, 71, 43-76, 1960.
- [19] Kuhlmann N., Über holomorphe Abbildungen mit projektiven Fasern, *Math. Z.*, 135, 43-54, 1973.
- [20] Lejeune-Jalabert M., Teissier B., Quelques calculs utiles pour la résolution des singularités, *Séminaire, L'Ecole Polytechnique*, Paris, 1971.
- [21] Narasimhan R., On the homology groups of Stein spaces, *Inv. Math.*, 2, 377-385, 1967.
- [22] Rhodes C.P.L.,
J. London Math. Soc. (2), 3, 73-85, 1971.
- [23] Schneider M., Halbstetigkeitssätze für relativ analytische Räume, *Inv. Math.*, 16, 161-176, 1972.
- [24] Serre J.P., *Algèbre locale. Multiplicités. Lecture Notes 11*, 1965.
- [25] Vo-Van-Tan, La classification des espaces 1-convexes, *Séminaire Lelong 1975/76, Lecture Notes 578*.
- [26] Wawrick J., Deforming cohomology classes, *Trans. A.M.S.*, 181, 341-350, 1973.