

INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

CONDITIONS DE FINITUDE POUR
LES MODULES II

par
Constantin NĂSTĂSESCU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No. 63/1979

Med 26340

BUCURESTI

CONDITIONS DE FINITUDE POUR
LES MODULES II

par
Constantin NĂSTĂSESCU*)

Novembre 1979

*) *Université de Bucarest, Faculté de Mathématiques, Rue Academiei, Bucarest, Roumanie*

CONDITIONS DE FINITUDE POUR LES

MODULES II

Constantin Năstăsescu

INTRODUCTION

Dans le travail [6] C. Faith fait l'étude des modules $\sum(\Delta)$ -injectifs utilisant le treillis d'annulateurs associé à un module injectif. Dans ce travail, utilisant la notion de topologie additive (le filtre topologisant et idempotent d'après Gabriel) sur un anneau unitaire et les résultats de [10] et [11], on fait l'étude de modules qui sont noethériens (artinien)s relatifs à une topologie additive et puis on applique cette théorie à l'étude des modules $\sum(\Delta)$ -injectifs et des modules $\sum^*(\Delta^*)$ -projectifs.

En particulier nous obtenons des résultats qui complètent ceux de Faith [6] (voir §2). Je citerai parmi ceux-ci les théorèmes 2.4, 2.5, la proposition 2.9, les corollaires 2.11 et 2.12. Le corollaire 2.11 est plus fort que le résultat obtenu par Faith dans la proposition 6.3 [6]. Le théorème 2.13 constitue une réponse affirmative au problème 4 posé par Faith en [6].

Ensuite on applique le théorème 2.13 pour l'étude des modules injectifs qui sont Π -projectifs.

Dans le dernier paragraphe on fait l'étude des modules $\sum(\Delta)$ -injectifs, en utilisant les idéaux premiers associés. Les principaux résultats de ce paragraphe sont les théorèmes 4.3 et 4.8 .

§ 1. MODULES F-NOETHERIENS , MODULES F-ARTINIENS

Dans ce travail R désignera toujours un anneau unitaire et $\text{Mod } R$ la catégorie des R-modules à droite unitaires.

Soit F une topologie additive sur R (ou filtre topologisant et idempotent dans la terminologie de [7]), c'est-à-dire un ensemble non vide d'idéaux à droite de R vérifiant les conditions suivantes:

(T₁) Si $\underline{a} \in F$ et $x \in R$, alors $(\underline{a}:x) \in F$

(T₂) Si $\underline{a}$ et $\underline{b}$ sont deux idéaux à droite de R, tels que $\underline{b} \in F$ et $(\underline{a}:x) \in F$ pour tout $x \in \underline{b}$, alors $\underline{a} \in F$.

Soit $(\mathcal{T}_F, \mathcal{F}_F)$ la théorie de torsion héréditaire pour $\text{Mod } R$ associée à F, c'est-à-dire:

$$\mathcal{T}_F = \{ M \in \text{Mod } R / \text{Ann}_R(x) \in F \text{ pour tout } x \in M \}$$

$$\mathcal{F}_F = \{ M \in \text{Mod } R / x \in M \text{ et } \text{Ann}_R(x) \in F \Rightarrow x = 0 \}$$

$\mathcal{T}_F$ est une sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ [7].

Si $M \in \mathcal{T}_F$ nous dirons que M est F-de torsion; si $M \in \mathcal{F}_F$ nous dirons que M est F-sans torsion. Comme $\mathcal{T}_F$ est une sous-catégorie localisante de $\text{Mod } R$ on peut considérer la catégorie quotient $\text{Mod } R / \mathcal{T}_F$ ([7], ch.3).

Nous désignerons par $T_F: \text{Mod } R \rightarrow \text{Mod } R / \mathcal{T}_F$ le foncteur canonique et par $S_F: \text{Mod } R / \mathcal{T}_F \rightarrow \text{Mod } R$ le foncteur adjoint à droite de T_F ([7], ch.3, pag.369).

Si M est un R-module, par M_F on dénote le module de quotients de M par rapport à F [15], c'est-à-dire

$$M_F = (S_F \circ T_F)(M)$$

Si $M = R_R$, on obtient un anneau R_F , appelé l'anneau de quotients de R par rapport à F . On peut munir canoniquement M_F d'une structure de R_F -module.

Soit $L \subseteq M$ un sous-module de M et $x \in M$, alors nous notons:

$$(L:x) = \{ \lambda \in R / x\lambda \in L \} \quad \text{et}$$

$$L^\sim = \{ x \in M / (L:x) \in F \}$$

Désignons par $C_F(M)$ l'ensemble :

$$C_F(M) = \{ L \subseteq M / L^\sim = L \}$$

Il est clair que $L^\sim = L$ si et seulement si M/L est un module F -sans torsion. $C_F(M)$ est un treillis modulaire complet pour la relation d'ordre d'inclusion [1], [10].

Pour $M = R_R$ nous avons le treillis

$$C_F(R) = \{ \underline{a} / \underline{a} \text{ idéal à droite de } R \text{ tel que } \underline{a}^\sim = \underline{a} \}.$$

Nous dirons que $M \in \text{Mod } R$ est F -noethérien (F -artinien) si $T_F(M)$ est un objet noethérien (artinien) dans la catégorie $\text{Mod } R/\mathcal{T}_F$. En tenant compte de prop.1.1 [10] M est F -noethérien (F -artinien) si et seulement si $C_F(M)$ est un treillis noethérien (artinien).

Le module M s'appelle F -de type fini s'il existe un sous-module M' de M de type fini tel que M/M' est F -de torsion (voir [1], [10], [15]).

Un module $M \neq 0$ s'appelle F -critique si M est F -sans torsion et pour tout sous-module $N \subseteq M$, $N \neq 0$, M/N est F -de torsion. Il est facile de voir que M est F -critique $\Leftrightarrow T_F(M)$ est un objet simple de $\text{Mod } R/\mathcal{T}_F \Leftrightarrow C_F(M)$ contient deux éléments (c'est-à-dire $C_F(M) = \{0, M\}$). On voit aussi que si M est F -critique, alors tout sous-module non-nul de M est F -critique.

Nous rappelons que une catégorie de Grothendieck $\mathcal{C}$

s'appelle semi-artinienne si tout objet non-nul de $\mathcal{C}$ contient un sous-objet simple. Quand $\mathcal{C} = \text{Mod } R$ est une catégorie semi-artinienne alors l'anneau R on dit semi-artinien (à droite).

L'étude des anneaux semi-artiniens est fait dans [12].

On sait que tout anneau parfait à gauche est un anneau semi-artinien à droite.

Aussi nous rappelons que une catégorie de Grothendieck $\mathcal{C}$ s'appelle spectrale [15] si tout objet de $\mathcal{C}$ est injectif (projectif).

Proposition 1.1. Soient $F_1, F_2, \dots, F_n$ des topologies additives sur R . Si $M \in \text{Mod } R$ est F_i -noethérien (F_i -artinien) pour tout $1 \leq i \leq n$, alors M est $F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$ -noethérien (artinien).

Démonstration. Notons $F = F_1 \cap F_2 \cap \dots \cap F_n$. Soit $N \in C_F(M)$; nous noterons par

$$\tilde{N}^i = \{x \in M \mid (N:x) \in F_i\} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Il est clair que

$$\tilde{N}^i \in C_{F_i}(M) \quad \text{et} \quad N = \bigcap_{i=1}^n \tilde{N}^i$$

Si maintenant

$$N_1 \subseteq N_2 \subseteq \dots \subseteq N_p \subseteq \dots$$

est une chaîne ascendante d'éléments, de $C_F(M)$, alors

$$\tilde{N}_1^i \subseteq \tilde{N}_2^i \subseteq \dots \subseteq \tilde{N}_p^i \quad \dots \quad (1 \leq i \leq n).$$

Comme $C_{F_i}(M)$ est un treillis noethérien ($1 \leq i \leq n$) il existe un k tel que $\tilde{N}_p^i = \tilde{N}_{p+1}^i = \dots$ pour tout $p \geq k$ et $1 \leq i \leq n$.

$$\text{Donc } N_p = N_{p+1} = \dots$$

Quand nous avons une famille arbitraire de topologies additives on a le résultat:

Proposition 1.2. Soient $(F_i)_{i \in I}$ une famille de topologies additives sur R et $M \in \text{Mod } R$ tel que M est

F_i -noethérien pour tout $i \in I$. Supposons que pour tout $x \in M$, $x \neq 0$, M/xR est F_i -de torsion pour tout $i \in I$ sauf un nombre fini d'indexes. Alors M est $\bigcap_{i \in I} F_i$ -noethérien

Démonstration. Soient $F = \bigcap_{i \in I} F_i$ et $N \in C_F(M)$, $N \neq 0$.

Pour tout $i \in I$, nous notons

$$\tilde{N}^i = \{x \in M \mid (N:x) \in F_i\}$$

Il est clair que $N = \bigcap_{i \in I} \tilde{N}^i$. Si nous notons par

$$X_N = \{i \in I \mid \tilde{N}^i \neq M\}$$

alors d'après l'hypothèse X_N est un ensemble fini.

Donc $N = \bigcap_{i \in X_N} \tilde{N}^i$. Soit

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_p \subset \dots$$

une chaîne ascendante d'éléments de $C_F(M)$. On peut supposer que $N_1 \neq 0$. Alors nous obtenons la chaîne descendante d'ensembles finis:

$$X_{N_1} \supset X_{N_2} \supset \dots \supset X_{N_p} \supset \dots$$

Il existe le nombre naturel k tel que $X_{N_k} = X_{N_{k+1}} = \dots$
d'où on déduit que $N_k = N_{k+1} = \dots$

Remarque. Soit R un anneau régulier au sens de von Neumann non-noethérien. Donc le spectre premier $\text{Spec } R$ est un ensemble infini. Pour tout $p \in \text{Spec } R$ nous considérons la topologie additive

$$F_p = \{a \in R \mid a \notin p\} = \{a \in R \mid (R/a)_p = 0\}$$

Comme R_p est un corps alors R est F_p -noethérien.

D'autre part

$$F = \bigcap_{p \in \text{Spec } R} F_p = \{a \in R \mid \forall p \in \text{Spec } R, a \notin p\} = \{0\}$$

et donc $C_F(R) =$ le treillis d'idéaux de R . Par suite R n'est pas F -noethérien.

Il est bien connu le résultat suivant $[6], [11], [16]$:

Si R est F -artinien alors R est F -noethérien.

Réciproquement nous avons le résultat suivant:

Proposition 1.3. Supposons que R est F -noethérien.

Alors R est F -artinien si l'une des conditions suivantes est satisfaite:

a) R est un anneau semi-artinien (en particulier pour un anneau parfait).

b) R est un anneau régulier au sens de von Neumann

c) Tout module injectif F -sans torsion a le radical singulier zéro.

Démonstration. a) Comme $\text{Mod } R$ est une catégorie semi-artinienne alors $\text{Mod } R/\mathcal{F}$ est une catégorie semi-artinienne.

D'autre part $T_F(R_R)$ étant un objet noethérien dans $\text{Mod } R/\mathcal{F}$ alors $T_F(R_R)$ est un objet de longueur finie [12] et donc R est F -artinien.

b) Soit maintenant $I \subset R$ un idéal à droite. Comme R est F -noethérien alors d'après la proposition 1.1 [10] il existe un idéal à droite $J \subset I$, J de type fini, tel que I/J est F -de torsion. Donc $T_F(I) = T_F(J)$. Comme J est de type fini alors J est un facteur direct de R_R . Donc $T_F(I)$ est un facteur direct de $T_F(R_R)$. Comme tout sous-objet de $T_F(R_R)$ est de forme $T_F(I)$ où I est un idéal à droite, alors tout sous-objet de $T_F(R_R)$ est un facteur direct.

D'autre part $T_F(R_R)$ étant un objet noethérien dans $\text{Mod } R/\mathcal{F}$, alors $T_F(R_R)$ est une extension essentielle d'une somme directe finie $\bigoplus_{i=1}^n X_i$ de sous-objets co-irréductibles. Mais X_i est de forme $T_F(\underline{a}_i)$ où $\underline{a}_i$ est un idéal à droite de R . D'ici on déduit que X_i est un objet simple dans $\text{Mod } R/\mathcal{F}$. Donc $T_F(R_R)$ est un objet semi-simple de longueur finie. Donc R est F -artinien.

c) Soit $\mathcal{G}$ la théorie de torsion de Goldie [15]. D'après les hypothèses $\mathcal{G} \subset \mathcal{T}_F$ et donc $\text{Mod } R/\mathcal{T}_F$ est une catégorie de quotients de $\text{Mod } R/\mathcal{G}$. Comme $\text{Mod } R/\mathcal{G}$ est une catégorie spectrale alors $\text{Mod } R/\mathcal{T}_F$ est une catégorie spectrale. Comme $T_F(R)$ est un objet noethérien dans $\text{Mod } R/\mathcal{T}_F$ alors il est semi-simple de longueur finie, Donc R est F -artinien.

Proposition 1.4. Soient F une topologie additive sur R et Q un R -module quasi-injectif, F -sans torsion.

Si Q est F -noethérien (resp. F -artinien) alors l'anneau $A = \text{End}_R(Q)$ est semi-primaire (resp. noethérien à gauche).

Démonstration. Si $\underline{a}$ est un idéal à gauche de A , de type fini, alors d'après le théorème de Harada - Ishii [8]

$\underline{a} = \{f \in A \mid \text{Ker } f \supseteq Q_{\underline{a}}\}$ où $Q_{\underline{a}} = \bigcap_{f \in \underline{a}} \text{Ker } f$. Comme Q est F -sans torsion alors $Q_{\underline{a}} \in C_F(Q)$. Comme $C_F(Q)$ est un treillis noethérien (artinien), alors A satisfait la condition descendante (ascendante) de chaînes d'idéaux à gauche de type fini, donc A est parfait à droite (resp. noethérien à gauche).

Supposons maintenant que Q est F -noethérien. Si J est le radical de Jacobson de A , alors $Q_{J^n} \in C_F(Q)$ et donc il existe un nombre naturel n tel que $Q_{J^n} = Q_{J^{n+1}} = \dots$

Ensuite la démonstration on fait comme dans la proposition 6.3 [6].

Proposition 1.5. Supposons que R est F -artinien. Si Q est un R -module quasi-injectif, F -sans torsion et F -de type fini, alors l'anneau $A = \text{End}_R(Q)$ est artinien à gauche.

Démonstration. Comme R est F -artinien alors R est F -noethérien et donc R est F -de longueur finie. Par suite Q est F -de longueur finie. Alors pour Q il existe une suite finie: $0 = Q_n \subset Q_{n-1} \subset Q_{n-2} \subset \dots \subset Q_0 = Q$ tel que Q_i/Q_{i-1}

est F-critique pour tout $0 \leq i \leq n-1$. Si nous notons

$$\underline{a}_i = \{ f \in A \mid \text{Ker } f \supseteq Q_i \} \quad (0 \leq i \leq n-1),$$

alors $\underline{a}_i$ sont des idéaux à gauche dans A et

$$(*) \quad 0 = \underline{a}_0 \subset \underline{a}_1 \subset \underline{a}_2 \subset \dots \subset \underline{a}_n = A$$

De plus on voit que $\underline{a}_i \cong \text{Hom}_R(Q/Q_i, Q)$ et $\underline{a}_i/\underline{a}_{i-1}$ est isomorphe avec un A-sous-module de $\text{Hom}_R(Q_i/Q_{i-1}, M)$ ($1 \leq i \leq n$).

Utilisant le lemme suivant (lemme 1.6) on déduit que la suite (*) est une suite de Jordan-Hölder pour A et donc A est artinien à gauche.

Lemme 1.6. Si M est F-critique alors $\text{Hom}_R(M, Q)$ est un A-module à gauche simple.

Démonstration. En effet si $f \in \text{Hom}_R(M, Q)$, $f \neq 0$, alors $\text{Ker } f = 0$ (dans le cas contraire $\text{Ker } f \neq 0 \Rightarrow \text{Im } f \simeq Q/\text{Ker } f$ est F-de torsion et comme Q est F-sans torsion alors $\text{Im } f = 0$ et donc $f = 0$).

Si $g \in \text{Hom}(M, Q)$ alors du diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} 0 & \longrightarrow & M & \xrightarrow{f} & Q \\ & & \downarrow g & & \\ & & Q & & \end{array}$$

il existe $h \in \text{End}(Q)$ tel que $g = h \circ f$ (Q est quasi-injectif).

D'ici on déduit que $\text{Hom}(M, Q)$ est A-module simple.

Proposition 1.7. Supposons que R est F-artinien. Si Q est R-module injectif, F-sans torsion et de dimension de Goldie finie alors l'anneau $A = \text{End}_R(Q)$ est semi-primaire.

Démonstration. L'objet $T_F(Q)$ est injectif et de dimension de Goldie finie. Comme R est F-artinien alors $T_F(R)$ est un objet de longueur finie dans la catégorie $\text{Mod } R/\mathcal{T}_F$. Exactement comme dans la proposition 5.4 [12], l'anneau $\text{End}_{\text{Mod } R/\mathcal{T}_F}(T_F(Q))$ est semi-primaire. Q étant F-sans torsion et injectif (donc F-fermé ([7], ch.3)) alors

$$A = \text{End}_R(Q) \simeq \text{End}_{\text{Mod } R/\mathcal{T}_F}(T_F(Q)).$$

Donc A est semi-primaire.

§2. MODULES $\Sigma(\Delta)$ -INJECTIFS

Soit Q un R -module à droite injectif. L'ensemble

$$F_Q = \{ I \subseteq R \mid I \text{ idéal à droite tel que } \text{Hom}(R/I, Q) = 0 \}$$

est une topologie additive sur R . La théorie de torsion associée est

$$\mathcal{T}_Q = \{ M \in \text{Mod } R \mid \text{Hom}(M, Q) = 0 \} \quad \text{et}$$

$$\mathcal{F}_Q = \{ M \in \text{Mod } R \mid \text{il existe l'ensemble } I \text{ tel que } M \subseteq Q^I \}$$

Le treillis $C_{F_Q}(R)$ est noté plus simple $C_Q(R)$.

D'après [10] et [15],

$$C_Q(R) = \{ I \subseteq R \mid \exists X \subseteq Q, X \neq 0, \text{ tel que } I = \text{Ann}_R(X) \}.$$

Nous dirons que Q est $\Sigma(\Delta)$ -injectif $\Leftrightarrow C_Q(R)$ est un treillis noethérien (artinien).

Par suite Q est $\Sigma(\Delta)$ -injectif $\Leftrightarrow R_R$ est F_Q -noethérien (F_Q -artinien).

Il est bien connu que Q est Σ -injectif $\Leftrightarrow$ pour tout ensemble I , $Q^{(I)}$ est injectif. (voir [5], [6], [15])

Théorème 2.1. [6], [11], [16]. Si Q est Δ -injectif alors Q est Σ -injectif.

La démonstration plus simple de ce théorème est donnée dans [11] (corollaire 1.3).

Si $\text{End}_R(Q)$ est l'anneau d'endomorphismes de Q alors Q est $\text{End}_R(Q)$ -module à gauche.

Le module $\text{End}(Q)^Q$ s'appelle le contre-module de Q .

L'anneau $\text{Biend}(Q) = \text{End}_{\text{End}(Q)}(\text{End}(Q)^Q)$ s'appelle l'anneau de biendomorphismes de Q .

Proposition 2.2. [6] Q est Δ -injectif $\Leftrightarrow$ le contre-module de Q est noethérien.

Théorème 2.3. [6] Si Q est injectif et le contre-module de Q est noethérien alors le contre-module de Q est artinien.

Démonstration. Si le contre-module de Q est noethérien alors d'après la proposition 2.2 et le théorème 2.1, Q est Σ -injectif. D'après le théorème de Johnson-Wong [9], on déduit que le contre-module de Q est artinien.

Remarques. 1) Une démonstration compliquée du théorème 2.3 est donnée dans [6].

2) Le théorème 2.3 est vrai quand nous supposons que Q est quasi-injectif. En effet si le contre-module de Q est noethérien alors Q est $R/\text{Ann } Q$ -module injectif.

Théorème 2.4. Q_i ($1 \leq i \leq n$) sont $\Sigma(\Delta)$ -injectifs $\Leftrightarrow \bigoplus_{i=1}^n Q_i$ est $\Sigma(\Delta)$ -injectif.

Démonstration. Si nous notons $Q = \bigoplus_{i=1}^n Q_i$ alors il est clair que $F_Q = \bigcap_{i=1}^n F_{Q_i}$. Ensuite on applique la proposition 1.1.

Remarque. Q est $\Sigma(\Delta)$ -injectif $\Leftrightarrow Q^{(I)}$ est $\Sigma(\Delta)$ -injectif $\Leftrightarrow Q^I$ est $\Sigma(\Delta)$ -injectif (I est un ensemble arbitraire). En effet $F_Q = F_{Q(I)} = F_{Q^I}$.

Théorème 2.5. Soit Q_i ($i \in I$) une famille de modules Σ -injectifs. Supposons que la famille Q_i ($i \in I$) a la propriété suivante:

(*) pour tout $a \in R$, $a \neq 0$ et pour tout $i \in I$ (sauf un nombre fini d'indexés) nous avons $ax \neq 0$, $\forall x \in Q_i$, $x \neq 0$.

Dans ces conditions $\bigoplus_{i \in I} Q_i$ est Σ -injectif.

Démonstration. La famille de topologies additives F_{Q_i} ($i \in I$) a la propriété que pour tout $a \in R$, $a \neq 0$, $\text{Hom}_R(R/aR, Q_i) = 0$ pour tout $i \in I$ sauf un nombre fini d'indexés. Donc d'après la proposition 1.2, R est $\bigcap_{i \in I} F_{Q_i}$ -noethérien. Comme pour tout $i \in I$,

Q_i est $\bigcap_{i \in I} F_{Q_i}$ -sans torsion alors d'après le théorème 1.6 [10]

$\bigoplus_{i \in I} Q_i$ est Σ -injectif.

Pour la topologie F_Q l'anneau de quotients R_{F_Q} est noté plus simple R_Q . Comme Q est F_Q -sans torsion et injectif, alors Q est F_Q -fermé ([7], ch.3) et donc Q est R_Q -module.

Proposition 2.6. Q_R est $\Sigma(\Delta)$ -injectif $\Leftrightarrow Q_{R_Q}$ est $\Sigma(\Delta)$ -injectif (dans la catégorie $\text{Mod } R_Q$).

Démonstration. Si $R \xrightarrow{\varphi} R_Q$ est le morphisme canonique alors d'après corollaire 0.4 [1] l'ensemble

$$\begin{aligned} \varphi(F_Q) &= \{ \underline{b} \mid \underline{b} \text{ idéal à droite de } R_Q \text{ tel que } \varphi^{-1}(\underline{b}) \in F_Q \} = \\ &= \{ \underline{b} \mid \underline{b} \text{ idéal à droite tel que } R_Q/\underline{b} \text{ est } F_Q\text{-de torsion} \} \end{aligned}$$

est une topologie additive sur l'anneau R_Q et de plus

$\varphi(F_Q) = F_{Q_{F_Q}}$. Comme $Q_{F_Q} \simeq Q$, alors d'après la proposition

0.7 [1], nous avons que $C_Q(R) \simeq C_Q(R_Q)$, d'où nous obtenons l'affirmation.

Lemme 2.7. Si Q est Δ -injectif alors $R_Q \simeq \text{Biend}(Q)$.

Démonstration. Nous avons $\text{Ann } Q = \bigcap_{x \in Q} \text{Ann } x$. Comme $C_Q(R)$ est un treillis artinien, il existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in Q$ tel que $\text{Ann } Q = \text{Ann } x_1 \cap \text{Ann } x_2 \cap \dots \cap \text{Ann } x_n$. D'ici on déduit que Q^n est "countercyclic" et par suite $R_Q \simeq \text{Biend}(Q^n)$ ([15], théorème 3.3, pag.206). D'autre part $\text{Biend}(Q^n) \simeq \text{Biend}(Q)$ et donc $R_Q \simeq \text{Biend}(Q)$.

Corollaire 2.8. Si Q est Δ -injectif alors l'anneau R_Q est semi-primaire, avec le socle (à droite) de type fini.

Démonstration. En effet le contre-module de Q est de longueur finie (théorème 2.3) et par suite l'anneau $\text{Biend}(Q)$ est semi-primaire. Donc R_Q est semi-primaire.

Proposition 2.9. Soit Q_R un module Σ -injectif. Alors Q est Δ -injectif si l'une des conditions suivantes est satisfaite:

- a) R est un anneau semi-artinien
- b) R est un anneau régulier au sens de von Neumann
- c) Le radical singulier de Q est zéro ($Z(Q) = 0$)

Démonstration. On applique la proposition 1.3.

Corollaire 2.10. Soit Q un R -module injectif. Les affirmations suivantes sont équivalentes:

- 1) Q est Δ -injectif
- 2) R_Q est semi-primaire et Q est R_Q -module Σ -injectif
- 3) $\text{Biend}(Q)$ est semi-primaire et Q est $\text{Biend}(Q)$ -module Σ -injectif.

Démonstration. On applique la proposition 2.6, lemme 2.7, corollaire 2.8 et proposition 2.9.

Corollaire 2.11. Si Q est Σ -injectif et de type fini alors l'anneau $A = \text{End}_R(Q)$ est semi-primaire,

Pour la démonstration s'applique la proposition 1.4.

Corollaire 2.12. Si Q est Δ -injectif et de type fini (resp. de dimension finie au sens de Goldie) alors l'anneau $A = \text{End}_R(Q)$ est artinien à gauche (resp. semi-primaire).

Démonstration. On applique la proposition 1.5 et 1.7.

Théorème 2.13. Soit Q_R un module Δ -injectif. Si Q_R est noethérien, alors :

- 1) L'anneau $R/\text{Ann}_R Q$ est artinien à droite
- 2) Q est un R -module artinien
- 3) L'anneau $\text{Biend}_R(Q)$ est artinien à droite
- 4) L'anneau $A = \text{End}_R(Q)$ est artinien à gauche.

Démonstration. 1) Comme Q est Δ -injectif alors Q est Δ -injectif sur les anneaux $\bar{R} = R/\text{Ann}_R Q$ et $S = \text{Biend}_R(Q)$ [6]. Alors il existe un monomorphisme $0 \rightarrow S \rightarrow Q^n$ et donc S est un anneau noethérien à droite. D'autre part S étant semi-primaire, alors S est artinien à droite (donc l'affirmation 3)).

Comme $\bar{R} \subset S \subset Q^n$, alors S est un $\bar{R}$ -module à droite noethérien et $\bar{R}$ est un anneau noethérien à droite. D'après le théorème 3.11 [3], on déduit que $\bar{R}$ est artinien à droite.

L'affirmation 2) en résulte de 1).

Pour l'affirmation 4) voir le corollaire 2.12.

Corollaire 2.14. Soit Q_R un module Δ -injectif noethérien. Si l'anneau R a la propriété qu'il existe un seul type de module simple (par exemple quand l'anneau R est local) alors R est artinien à droite.

Démonstration. D'après le théorème 2.13 et les hypothèses on déduit que Q est un cogénérateur. Comme Q est Δ -injectif, l'anneau R est artinien à droite.

Corollaire 2.15. Soit R un anneau avec la propriété que tout idéal à droite est bilatère. Si Q_R est un module injectif et noethérien, alors :

- 1) $R/\text{Ann}_R Q$ est un anneau artinien à droite
- 2) Q est un module artinien.

Démonstration. Parce que tout idéal à droite est bilatère et Q est noethérien, alors Q est Δ -injectif. Ensuite on applique le théorème 2.13.

Remarques. 1) Tout anneau commutatif et tout anneau fortement régulier (c'est-à-dire $\forall a \in R, \exists x \in R$ tel que $a = a^2 x$) vérifient les conditions du corollaire 2.15. Le théorème 2.13 et le corollaire 2.14 généralisent le théorème 4.2 et le corollaire 4.3 du [11].

2) Pour tout anneau fortement régulier R , nous avons un résultat plus général: tout R -module noethérien est semi-simple. En effet, si M_R est un R -module noethérien, alors M est engendré par les éléments $x_1, x_2, \dots, x_n$. Parce que tout idéal à droite est bilatère, alors $\text{Ann } M = \text{Ann } x_1 \cap \dots \cap \text{Ann } x_n$ et donc il existe un

monomorphisme $0 \rightarrow R/\text{Ann } M \rightarrow M^n$. Donc $R/\text{Ann } M$ est un anneau noethérien à droite et comme $R/\text{Ann } M$ est un anneau régulier, alors $R/\text{Ann } M$ est semi-simple. Donc M est un R -module semi-simple.

3) Si R est un anneau arbitraire et Q_R est un module Δ -injectif et artinien, alors il est très facile de voir que les affirmations suivantes sont vraies :

- a) $R/\text{Ann}_R Q$ est un anneau artinien à droite
- b) Q est un R -module noethérien
- c) L'anneau $\text{Biend}(Q)$ est artinien à droite
- d) L'anneau $\Lambda = \text{End}_R(Q)$ est artinien à gauche.

Un module projectif P_R s'appelle Π -projectif si pour tout ensemble Λ , le module P^Λ est aussi projectif.

Il est bien connu (voir par exemple [5]) que sur un anneau artinien R tout module projectif est Π -projectif.

Corollaire 2.16. Soit Q_R un module injectif et projectif. Si Q_R est Π -projectif, alors Q_R est Δ -injectif.

Démonstration. Si I est un injectif F_Q -sans torsion, alors il existe un ensemble Λ tel que I est isomorphe à un sous-module de Q^Λ . Comme Q^Λ est projectif alors I est projectif. Donc I est isomorphe avec un sous-module d'un module libre et par suite tout module F_Q -sans torsion est contenu dans une somme directe de modules de type fini. D'après le théorème 2.4 [13] nous obtenons que Q_R est un module Δ -injectif.

Pour démontrer le résultat suivant, nous utiliserons le lemme:

Lemme 2.17. Soit Q_R un module Δ -injectif. Alors il existe un module Q_0 , Δ -injectif, qu'il est une somme directe finie d'injectifs indécomposables tels que

$$F_Q = F_{Q_0}$$

Démonstration. Comme Q_R est Σ -injectif, alors d'après le théorème 1.6 [10], $Q_R = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ où Q_i sont des injectifs

indécomposables. Soit $T_Q : \text{Mod } R \longrightarrow \text{Mod } R/\mathcal{T}_Q$ le foncteur canonique. Alors $T_Q(Q) \simeq \bigoplus_{i \in I} T_Q(Q_i)$ et les objets $T_Q(Q_i)$ sont des injectifs indécomposables. Comme l'objet $T_Q(R_R)$ est un générateur de longueur finie, alors dans la catégorie $\text{Mod } R/\mathcal{T}_Q$ il existe un nombre fini d'objets simples non-isomorphes. Donc la famille $\{T_Q(Q_i)\}_{i \in I}$ contient un nombre fini d'objets non-isomorphes; soit $T_Q(Q_{i_1}), \dots, T_Q(Q_{i_n})$ ces objets. Il est clair que pour tout $i \in I$ Q_i est isomorphe à un objet de la famille $\{Q_{i_k}\}_{k=1, \dots, n}$. Si nous notons $Q_0 = \bigoplus_{k=1}^n Q_{i_k}$, alors Q_0 est -injectif et $F_Q = F_{Q_0}$.

Corollaire 2.18. Supposons que l'anneau R est noethérien à droite. Soit Q_R un module injectif et projectif. Si Q_R est Π -projectif, alors

1) $R/\text{Ann } Q$ et $\text{Biend } Q$ sont Q.F.3 -anneaux artiniens à droite (un anneau R est Q.F.3 si l'enveloppe injective $E(R_R)$ est un module projectif).

2) Q_R est une somme directe de modules de longueur finie.

Démonstration. D'après le corollaire 2.16, Q_R est Δ -injectif. D'après le lemme 2.17 il existe un module Q_0 , Δ -injectif, qu'il est une somme finie d'injectifs indécomposables, tels que $F_Q = F_{Q_0}$. Donc Q_0 est un module noethérien projectif.

Nous avons

$$\text{Ann } Q = \text{Ann } Q_0 \text{ et } \text{Biend}(Q) \simeq R_{F_Q} = R_{F_{Q_0}} = \text{Biend}(Q_0)$$

Ensuite on applique le théorème 2.13.

§3. MODULES $\sum^*(\Delta^*)$ -PROJECTIFS

Soit P_R un R -module à droite projectif. L'ensemble

$$F_P = \left\{ I \mid I \text{ idéal à droite tel que } \text{Hom}(P, R/I) = 0 \right\}$$

est une topologie additive sur R .

Si $\mathcal{C}(P) = \sum_{f \in P^*} \text{Im } f$, où $P = \text{Hom}_R(P, R)$, est la "trace idéale de P " alors

$$F_P = \left\{ I \subseteq R / I \text{ idéal à droite tel que } \mathcal{C}(P) \subseteq I \right\} \text{ (voir [11]).}$$

La théorie de torsion associée à F_P est la suivante:

$$\mathcal{T}_P = \left\{ M \in \text{Mod } R / \text{Hom}_R(P, M) = 0 \right\} = \left\{ M \in \text{Mod } R / M \mathcal{C}(P) = 0 \right\}$$

et $\mathcal{F}_P = \left\{ M \in \text{Mod } R / x \in M \text{ et } x \mathcal{C}(P) = 0 \Rightarrow x = 0 \right\}.$

Le treillis $C_{F_P}(R)$, noté plus simple $C_P(R)$, est le suivant:

$$C_P(R) = \left\{ I \subseteq R / R/I \text{ est } F_P\text{-sans torsion} \right\} = \\ = \left\{ I \subseteq R / \forall a \in R \text{ tel que } a \mathcal{C}(P) \subseteq I \text{ alors } a \in I \right\} \text{ (voir [11]).}$$

Nous dirons que P est $\sum^*(\Delta^*)$ -projectif si le treillis

$C_P(R)$ est noethérien (artinien).

Théorème 3.1. Si P est Δ^* -projectif alors P est $\sum^*$ -projectif.

Démonstration. Voir le corollaire 1.3 [11].

Lemme 3.2. Si P est $\sum^*(\Delta^*)$ -projectif alors l'idéal

bilatère $\mathcal{C}(P)$ est de type fini (à droite).

Démonstration. En effet $\mathcal{C}(P)$ est R -module à droite F_P -de type fini, donc il existe un idéal à droite $I \subseteq \mathcal{C}(P)$, de type fini tel que $\mathcal{C}(P)/I \in \mathcal{T}_P$. Par suite $\mathcal{C}(P)^2 \subseteq I$ et comme $\mathcal{C}(P) = \mathcal{C}(P)^2$ alors $\mathcal{C}(P) = I$. Donc $\mathcal{C}(P)$ est de type fini.

Un module M_R s'appelle $\mathcal{C}(P)$ -noethérien (resp. $\mathcal{C}(P)$ -artinien) si et seulement si M satisfait la condition pour les chaînes ascendantes (resp. descendantes) des sous-modules $\mathcal{C}(P)$ -accessibles [11].

Corollaire 3.3. Supposons que P_R est de type fini. Alors P est $\sum^*(\Delta^*)$ -projectif $\Leftrightarrow P$ est $\mathcal{C}(P)$ -noethérien (artinien) et $\mathcal{C}(P)$ est un idéal à droite de type fini.

Démonstration. Voir la proposition 2.10 [11].

Théorème 3.4. P_i ($1 \leq i \leq n$) sont $\sum^*(\Delta^*)$ -projectifs $\Leftrightarrow$

$$\bigoplus_{i=1}^n P_i \text{ est } \sum^*(\Delta^*)\text{-projectif.}$$

Démonstration. Si $P = \bigoplus_{i=1}^n P_i$ alors $F_P = \bigcap_{i=1}^n F_{P_i}$. Ensuite on applique la proposition 1.1.

Remarque. Si P est $\sum^*(\Delta^*)$ -projectif alors $P^{(I)}$ est $\sum^*(\Delta^*)$ -projectif pour tout ensemble I .

En effet $F_P = F_{P^{(I)}}$.

Théorème 3.5. Supposons que P_R est de type fini. Alors P est $\sum^*(\Delta^*)$ -projectif $\Leftrightarrow$ le contre-module associé à P^* (le dual de P) est noethérien (artinien).

Démonstration. D'après les propositions 2.5 et 2.5' [11] P est $\sum^*(\Delta^*)$ -projectif $\Leftrightarrow P^* = \text{Hom}_R(P, R)$ est un $\text{End}_R(P)$ -module noethérien (artinien). Comme $\text{End}(P) \cong \text{End}(P^*)^0$ alors on déduit l'affirmation.

D'après [15] (proposition 8.5, pag. 241) si P_R est de type fini alors l'anneau de quotients $R_{F_P} \simeq \text{Biend}(P^*)$.

Corollaire 3.6 Si P est Δ^* -projectif et de type fini alors $R_{F_P} = \text{Biend}(P^*)$ est un anneau semi-primaire.

Démonstration. En effet, d'après les théorèmes 3.1 et 3.5, P^* est un module de longueur finie sur l'anneau $\text{End}(P^*)$; donc $\text{Biend}(P^*)$ est semi-primaire.

§4 IDÉAUX PREMIERS ASSOCIÉS À MODULES $\sum(\Delta)$ -INJECTIFS

Soit F une topologie additive sur l'anneau R . Nous noterons par :

$$\text{Spec } R = \{p / p \text{ idéal premier bilatère de } R\}$$

$$\text{Spec}_F R = C_F R \cap \text{Spec } R =$$

$$= \{p \in \text{Spec } R / R/p \text{ est un } F\text{-module sans torsion}\}$$

$\text{Spec}(\text{Mod } R/\mathcal{T}_F) =$ l'ensemble des types d'injectifs indécomposables de la catégorie $\text{Mod } R/\mathcal{T}_F$.

Il est bien connu que $\text{Spec}(\text{Mod } R/\mathcal{T}_F)$ s'identifie avec.

l'ensemble des types d'injectifs indécomposables de la catégorie $\text{Mod } R$ qui sont F -sans torsion.

Si $M \in \text{Mod } R$, $M \neq 0$, alors un idéal $p \in \text{Spec } R$ est associé à M s'il existe un sous-module $N \subseteq M$, $N \neq 0$, tel que $p = \text{Ann } N = \text{Ann } N'$, pour tout sous-module $N' \subseteq N$, $N' \neq 0$.

Nous noterons par $\text{Ass } M$ l'ensemble d'idéaux premiers associés à M .

Lemme 4.1. Si R est un anneau F -noethérien (à droite) alors les affirmations suivantes sont vraies :

1) Si $M \neq 0$ est F -sans torsion, alors $\text{Ass } M \neq \emptyset$

Si de plus M est de type fini alors $\text{Ass } M$ est fini.

2) Si $\underline{a} \in C_F R$ est un idéal bilatère semi-premier, alors $R/\underline{a}$ est un anneau de Goldie (à droite).

En particulier si $p \in \text{Spec}_F R$ alors R/p est un anneau premier de Goldie et l'enveloppe injective $E(R/p) \simeq I_p^n$ où I_p est un injectif indécomposable.

3) On peut construire les applications :

$$\alpha : \text{Spec}_F R \longrightarrow \text{Spec}(\text{Mod } R/\mathcal{I}_F), \quad \alpha(p) = I_p$$

et $\beta : \text{Spec}(\text{Mod } R/\mathcal{I}_F) \longrightarrow \text{Spec}_F R, \quad \beta(I) = p \text{ où } \text{Ass } I = \{p\}$

On a : $\beta \circ \alpha = 1_{\text{Spec}_F R}$.

4) Si $\underline{a} \in C_F(R)$ est un idéal bilatère tel que $R/\underline{a}$ est un anneau semi-premier, alors $\underline{a} = \bigcap_{p \in \text{Ass } R/\underline{a}} p$. En particulier l'ensemble des idéaux premiers minimaux de $\text{Spec}_F R$ est fini.

Démonstration. Pour les affirmations 1), 2) et 3) voir [14].

Nous démontrons maintenant l'affirmation 4). Soit

$\varphi : R \longrightarrow R/\underline{a}$ le morphisme canonique. L'ensemble

$\varphi(F) = \{I/\underline{a} \mid I \in F\}$ est une topologie additive sur l'anneau

$R/\underline{a}$. De plus $R/\underline{a}$ est $\varphi(F)$ -noethérien et $R/\underline{a}$ est $\varphi(F)$ -sans

torsion (voir [1]). Donc on peut supposer $I = 0$, c'est-à-dire

R est un anneau semi-premier et R_R est F -sans torsion. Comme R_R a la dimension de Goldie finie alors il existe les idéaux à droite $\{ \underline{a}_i \}_{i=1,2,\dots,n}$ co-irréductibles tel que R_R est une extension essentielle de $\bigoplus_{i=1}^n \underline{a}_i$. Donc

$$\text{Ass} \left(\bigoplus_{i=1}^n \underline{a}_i \right) = \text{Ass } R_R \quad (\text{voir [16]}).$$

$$\text{Mais } \text{Ass} \left(\bigoplus_{i=1}^n \underline{a}_i \right) = \bigcup_{i=1}^n \text{Ass}(\underline{a}_i).$$

Si $\text{Ass } \underline{a}_i = \{ p_i \}$ alors $\text{Ass } R_R = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \}$. Comme $\text{Ass } \underline{a}_i = \{ p_i \}$ il existe un idéal à droite $\underline{a}'_i \subset \underline{a}_i$, $\underline{a}'_i \neq 0$ tel que $p_i = \text{Ann}(\underline{a}'_i)$. Si on note $I = \bigcap_{i=1}^n p_i$ on a $\underline{a}'_i I = 0$ et par suite $(\sum_{i=1}^n \underline{a}'_i) I = 0$. Comme $\underline{a}' = \sum_{i=1}^n \underline{a}'_i$ est un idéal à droite essentiel dans R alors $\underline{a}'$ contient un élément régulier $s \in \underline{a}'$ (l'anneau R est de Goldie à droite). Donc $sI = 0$ et par suite $I = 0$.

Si maintenant $\text{Min}_F(R)$ est l'ensemble de tous les idéaux minimaux de $\text{Spec}_F(R)$ alors $\underline{a} = \overline{\{ p \in C_F(R) \mid p \in \text{Min}_F(R) \}}$ et $R/\underline{a}$ est semi-premier. Donc $\underline{a} = \overline{\{ q \in \text{Ass } R/\underline{a} \}}$.

Nous notons $\text{Ass } R/\underline{a} = \{ p_1, p_2, \dots, p_n \}$. Si $p \in \text{Min}_F(R)$ alors $p_1 p_2 \dots p_n \subset \underline{a} \subset p$ et par suite il existe un nombre naturel $1 \leq i \leq n$ tel que $p_i = p$ et donc $\text{Min}_F(R) \subseteq \{ p_1, p_2, \dots, p_n \}$.

Lemme 4.2. Soit F une topologie additive à droite sur R . Si $p \in \text{Spec } R$ est un idéal tel que R/p est un anneau de Goldie (à droite) alors $p \in F$ ou $p \in \text{Spec}_F R$.

Démonstration. Supposons que $p \notin \text{Spec}_F R$. Alors $t_F(R/p) = \underline{b}/p$ où $\underline{b}$ est un idéal bilatère. Comme R/p est un anneau premier alors $\underline{b}/p$ est un idéal essentiel et donc $\underline{b}/p$ contient un élément régulier x dans l'anneau R/p . Donc $\text{Ann } x \in F$. D'autre part $\text{Ann } x = p$ (x étant régulier) et par suite $p \in F$.

Théorème 4.3. Soit $p \in \text{Spec } R$ un idéal premier minimal.

Si $E(R/p)$ est Σ -injectif alors $E(R/p)$ est Δ -injectif.

Démonstration. Soit $(\mathcal{T}_p, \mathcal{F}_p)$ la théorie de torsion

co-engendrée de $E(R/p)$ et F_p est la topologie additive associée

à $\mathcal{T}_p$. Si I est un idéal bilatère tel que $I \in C_{F_p}(R)$, alors

$I \subseteq p$. En effet il existe un morphisme non-nul $f: R/I \rightarrow E(R/p)$;

donc $\text{Im } f \cap R/p \subseteq R/p$ et $\text{Im } f \cap R/p \neq 0$. Si $I \not\subseteq p$, alors l'idéal

bilatère $I+p/p \neq 0$ de R/p annule $\text{Im } f \cap R/p$, contradiction.

D'ici on déduit que $\text{Spec}_{F_p}(R) = \{p\}$

Soit $\varphi: R \rightarrow R/p = \bar{R}$ le morphisme canonique. L'ensemble

$\varphi(F_p) = \{I/p \mid I \supseteq p, I \in F_p\}$ est une topologie additive sur

l'anneau $\bar{R}$. Soit $E_{\bar{R}}(\bar{R})$ l'enveloppe injective de $\bar{R}$ (dans la

catégorie $\text{Mod } \bar{R}$); alors $E_{\bar{R}}(\bar{R}) = \{x \in E_R(R/p) \mid px = 0\}$.

Si $\bar{F}_p$ est la topologie additive associée à la théorie de torsion co-engendrée de $E_{\bar{R}}(\bar{R})$ (dans $\text{Mod } \bar{R}$), alors on voit que

$\bar{F}_p = \varphi(F_p)$. L'anneau $\bar{R}$ étant un anneau premier de Goldie

(voir lemme 4.1) alors si Q_p est l'anneau classique de fractions

(à droite) de R/p , nous avons $Q_p = E_{\bar{R}}(\bar{R})$. Donc $\bar{R}$ est $\bar{F}_p$ -ar-

tinien. Si $M \neq 0$ est F_p -sans torsion, alors $\text{Ass } M \neq \emptyset$ (lemme

4.1) et donc $\text{Ass } M = \{p\}$. Alors il existe un sous module $M' \subset M$,

$M' \neq 0$ tel que $p = \text{Ann}_R(M')$. Donc M' est un R/p -module et de

plus M' est $\varphi(F_p)$ -sans torsion. $\bar{R}$ étant $\bar{F}_p$ -artinien alors M'

contient un $\bar{R}$ -sous module $M'' \neq 0$, $\bar{F}_p$ -critique. Mais il est

très facile de voir que M'' est F_p -critique. Ensuite, appliquant

le lemme 1.2 [13] on déduit que R est F_p -artinien et donc

$E(R/p)$ est Δ -injectif.

Corollaire 4.4. Soit R un anneau noethérien à droite.

Si p est un idéal premier minimal de R alors $E(R/p)$ est module

Δ -injectif.

Proposition 4.5. Soient F une topologie additive sur R , tel que R est F -artinien (à droite). Alors :

- 1) $\text{Spec}_F R$ est un ensemble fini
- 2) Tout idéal $p \in \text{Spec}_F R$ est un élément minimal dans l'ensemble $\text{Spec}_F R$. De plus si R a la propriété que pour tout $p \in \text{Spec } R$, R/p est un anneau de Goldie, alors tout idéal $p \in \text{Spec}_F(R)$ est un idéal premier minimal dans R .

3) L'application $\alpha : \text{Spec}_F(R) \longrightarrow \text{Spec}(\text{Mod } R/\mathcal{I}_F)$ (voir lemme 4.1) est bijective.

Démonstration. Soit $p, q \in \text{Spec}_F R$ tel que $p \subseteq q$. Alors $E(R/q)$ est Δ -injectif. Comme R/p est un anneau de Goldie alors $p \in C_F(R)$ (lemme 4.2). Par suite il existe un nombre naturel n tel que $0 \longrightarrow R/p \longrightarrow E(R/q)^n$ d'où $\{p\} = \text{Ass } R/p \subseteq \text{Ass}(E(R/q)^n) = \{q\}$ et donc $p = q$.

D'après les lemmes 4.1 et 4.2 nous avons les affirmations 1) et 2).

Soit Q un injectif indécomposable F -sans torsion. Nous avons que $\text{Ass } Q = \{p\}$. Comme Q est Δ -injectif alors il existe un nombre naturel k tel que $0 \longrightarrow R/p \longrightarrow Q^k$ et donc $E(R/p) \subseteq Q^k$. D'autre part $E(R/p) \simeq I_p^n$ où I_p est un injectif indécomposable et donc $I_p \simeq Q$. Par suite l'application α est aussi surjective.

Corollaire 4.6. Si R est un anneau noethérien à droite, alors il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des idéaux premiers minimaux de R et l'ensemble de types de modules Δ -injectifs indécomposables.

Corollaire 4.7. Soit Q un module Δ -injectif. Alors il existe un nombre fini d'idéaux premiers $p_1, p_2, \dots, p_n$ avec les propriétés suivantes :

a) $\text{Ass } Q = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ et $E(R/p_i) \simeq I_{p_i}^{n_i}$ où I_{p_i} est un injectif indécomposable ($1 \leq i \leq n$).

b) $Q = \bigoplus_{\alpha \in \Lambda} I_\alpha$ et tout injectif I_α ($\alpha \in \Lambda$) est isomorphe à un injectif de la famille $\{I_{p_1}, I_{p_2}, \dots, I_{p_n}\}$.

Remarque. Le corollaire 4.7 est plus fort que le théorème 8.6 de [6].

Théorème 4.8. Soit Q un R -module injectif. Si $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ où Q_i est Δ -injectif pour tout $i \in I$, alors Q est Δ -injectif.

Démonstration. D'après la proposition 5 [4] Q est Σ -injectif et donc R est F_Q -noethérien. Il est clair que nous pouvons supposer que Q_i sont injectifs indécomposables. Soit $\text{Ass } Q_i = \{p_i\}$ ($i \in I$). Q_i étant Δ -injectif, alors p_i est un idéal minimal dans $\text{Spec}_{F_Q}(R)$ et $E(R/p_i) \simeq Q_i^{n_i}$ (proposition 4.5). On voit très facilement que p_i est un idéal minimal dans $\text{Spec}_F(R)$. D'après le lemme 4.1 l'ensemble $\{p_i\}_{i \in I}$ est fini et donc la famille $\{Q_i\}_{i \in I}$ a un nombre fini d'injectifs non-isomorphes. Ensuite on applique le théorème 2.4.

QUELQUES OBSERVATIONS SUR LES IDÉAUX PREMIERS

ASSOCIÉS À UN MODULE Δ^* -PROJECTIF

Soient P_R un module projectif arbitraire et F_P la topologie additive associé à la théorie de torsion $(\mathcal{T}_P, \mathcal{F}_P)$ (voir § 3). Alors :

1) Si $p \in \text{Spec } R$, $p \in F_P$ ou $p \in \text{Spec}_{F_P}(R)$. En particulier

$$\text{Spec}_{F_P}(R) = \{p \in \text{Spec } R / \mathcal{T}(P) \not\subseteq p\}$$

En effet si $p \notin \text{Spec}_{F_P}(R)$, soit b/p le plus grand sous-module de R/p qui appartient à $\mathcal{T}_P$. L'idéal b est bilatère et $p \subseteq b$. Comme $(b/p)\mathcal{T}(P) = 0$, alors $b\mathcal{T}(P) \subseteq p$ et par

suite $\mathcal{C}(P) \subseteq p$. Donc $p \in F_P$.

2) Si P_R est $\mathcal{C}(P)$ -artinien, alors pour tout module $M_R \neq 0$, F_P -sans torsion, le socle $so(M)$ est essentiel dans M .

En effet, tout module F_P -sans torsion contient un sous-module F_P -critique. D'après le lemme 3.2 [11], tout module F_P -critique contient un sous-module simple.

3) Si P_R est Δ^* -projectif alors pour tout $p \in \text{Spec}_{F_P}(R)$, p est minimal dans $\text{Spec } R$ et R/p est un anneau artinien simple.

En effet d'après l'assertion 1) et la proposition 4.5 on déduit que p est minimal dans $\text{Spec } R$. D'autre part, $p \in \text{Spec}_{F_P}(R)$ implique que R/p est F_P -sans torsion et donc $so(R/p) \neq 0$. Alors il existe un module simple S , F_P -sans torsion, tel que $p = \text{Ann } S$. Comme $C_{F_P}(R)$ est un treillis artinien il existe un nombre fini d'éléments $x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ tels qu'on ait $p = \text{Ann } x_1 \cap \dots \cap \text{Ann } x_n$ et donc nous pouvons trouver un monomorphisme $0 \rightarrow R/p \rightarrow S^n$. Donc R/p est un R -module semi-simple. Par suite R/p est un anneau simple.

4) Soit P_R un module Δ^* -projectif. Nous notons par $I = \bigcap_{p \in \text{Spec}_{F_P}(R)} p$ et $I^\omega = \bigcap_{n \geq 0} I^n$. Alors $I^\omega \in C_{F_P}(R)$ et R/I^ω est un anneau artinien à droite.

En effet R/I est un R -module à droite semi-simple et F_P -sans torsion. Nous considérons la chaîne décroissante

$$I \supset I^2 \supset \dots \supset I^n \supset I^{n+1} \supset \dots$$

On voit que I^n/I^{n+1} est R/I -module, donc I^n/I^{n+1} est R -module semi-simple et F_P -sans torsion pour tout $n \geq 0$. Comme $C_{F_P}(R)$ est un treillis artinien alors il existe un nombre naturel k tel que $I^i/I^{i+1} \in \mathcal{F}_F$ pour tout $i \geq k$ (voit le lemme 1.2 [1]). Mais I^i/I^{i+1} étant F_P -sans torsion alors $I^i/I^{i+1} = 0$ pour tout $i \geq k$. Donc $I^k = I^{k+1} = \dots$ et par suite $I^\omega = I^k$. Comme I^i/I^{i+1} est F_P -sans torsion et semi-simple pour tout $i \geq 0$, alors nous

avons aussi que R/I^ω est F_p -sans torsion. Puisque R est F_p -artinien alors pour tout $i \geq 0$, I^i/I^{i+1} est un R -module F_p -artinien, d'où on déduit que I^i/I^{i+1} ($i \geq 0$) est un module semi-simple de longueur finie. Donc R/I^ω est un anneau artinien à droite.

5) Soit P_R un module Δ^* -projectif. Si R a un seul idéal premier minimal ou R a la propriété qu'il existe un seul type de module simple (par exemple quand R est local) alors R est artinien à droite.

Si p est le seul idéal premier minimal alors $\text{Spec}_{F_p}(R) = \{p\}$ et donc $p \subseteq J(R)$ où $J(R)$ est le radical de Jacobson. Comme R/p est un anneau simple alors $p = J(R)$. D'autre part $\mathcal{C}(P) \not\subseteq p$ et donc $p + \mathcal{C}(P) = J(R) + \mathcal{C}(P) = R$ d'où nous obtenons que $R = \mathcal{C}(P)$, c'est-à-dire P_R est un générateur pour la catégorie $\text{Mod } R$. D'ici on déduit que $F_p = 0$ et donc tout idéal à droite est un élément du treillis $C_{F_p}(R)$. Donc R est artinien à droite. Dans le cas que R a un seul type de module simple S alors $\text{Spec}_{F_p}(R) = \{p\}$ où $p = J(R) = \text{Ann } S$. Ensuite nous trouvons que $\mathcal{C}(P) = R$ et donc R est un anneau artinien à droite.

Université de Bucarest

Faculté de Mathématiques

BIBLIOGRAPHIE

1. T.ALBU and C.NASTASESCU, "Décompositions primaires dans les catégories de Grothendieck commutatives I", Journal für die Reine und Angew.Math.280(1976),172-194.
2. T.ALBU and C.NASTASESCU, "Décompositions primaires dans les catégories de Grothendieck commutatives II", Journal für die Reine und Angew.Math,282(1976),172-185.
3. J.E.BJÖRK, "Conditions which imply that subrings of semi-primary rings are semi-primary", J.of Algebra vol.19(1971) pag.384-395.
4. A.CAILLEAU, "Une caractérisation des modules Σ -injectifs", C.R.Acad.Sci.Paris,269(1969),997-999.
5. C.FAITH, "Algebra II Ring Theory", Springer Verlag,1976.
6. C.FAITH, "Injective modules over Levitzki Rings", (à paraître Lecture Notes, Springer Verlag)
7. P.GABRIEL, "Des catégories abéliennes", Bull.Soc.Math.France,90 (1962),323-448.
8. M.HARADA and T.ISHII, "On endomorphism rings of Noetherien quasi-injective modules", Osaka J.Math.9(1972), 217-223.
9. R.E.JOHNSON and E.T.WONG, "Quasi-injective modules and irreducible rings", J.Lond.Math.Soc.36 (1971), 260-268.
10. C.NASTASESCU, "La structure des modules par rapport à une topologie additive", Tôhoku Math.J,26(1974),173-201.
11. C.NASTASESCU, "Conditions de finitude pour les modules", Rev. Roum.Math.Pures et Appl.,tome XXIV,Nr.5(1979), 745-758.
12. C.NASTASESCU, and N.POPESCU, "Anneaux semi-artiniens", Bull.Soc. Math.France,96 (1968),357-368.
13. C.NASTASESCU, "Modules injectifs de type fini par rapport à une topologie additive" (à paraître).
14. C.NASTASESCU, "Décomposition tertiaire et primaire dans un anneau", Bull.Math.Soc.Sci.Roumanie,Tome 18(66), nr.3-4 (1974),339-354.

15. BO STENSTROM, "Rings of Quotients", Springer Verlag (1975).
16. M. TEPLY and R. MILLER, "The descending chain condition relative to a torsion theory", (preprint).