INSTITUTUL
DE
MATEMATICA

INSTITUTUL NATIONAL
PENTRU CREATIE
STIINTIFICA SI TEHNICA

ISSN 0250-3638

I. THEORÉME DE HOPKINS POUR LES CATÉGORIES DE GROTHENDIECK

II. MODULES Δ -INJECTIFS SUR LES ANNEAUX À DIMENSION DE KRULL

par
Constantin NASTASESCU

PREPRINT SERIES IN MATHEMATICS
No.26/1980

BUCURESTI

I. THÉORÈME DE HOPKINS POUR LES CATÉGORIES DE GROTHENDIECK

II. MODULES Δ-INJECTIFS SUR LES ANNEAUX À DIMENSION DE KRULL

par

Constantin NASTASESCU*)

May 1980

*) Université de Bucarest, 14, rue Academiei, Bucarest, ROMANIA
Faculté de Mathématiques.

<u>Théorème de Hopkins pour les catégories de Grothendieck</u>

par

Constantin Năstăsescu

<u>Introduction</u>

Il est bien connu le théorème de Hopkins [4] : tout anneau artinien à gauche est noethérien à gauche. Dans le travail [5] on a démontré ce théorème pour une catégorie de Grothendieck: <u>si $\mathcal{C}$ est une catégorie de Grothendieck avec le générateur artinien U, alors U est un objet noethérien.</u>

L'importance de ce théorème est grande; il s'applique pour l'étude des modules injectifs (projectifs) vérifiant certaines conditions de finitude (voir [1],[5],[6]).

Le but de ce travail est de donner une démonstration trés simple de ce théorème. La notion de base que nous utiliserons dans cette démonstration c'est la longueur d'une suite de Jordan-Hölder.

<u>La démonstration du théorème de Hopkins pour une catégorie de Grothendieck</u>

Nous désignons par $\mathcal{C}$ une catégorie de Grothendieck, c'est-à-dire une catégorie abélienne ayant un générateur et limites inductives exactes [2] . (Voir aussi [7].)

Soient U et M deux objets de la catégorie $\mathcal{C}$. Nous dirons que M est <u>U-engendré</u> si M est une image homomorphe d'une somme directe de copies de U. Si, de plus, M a la propriété que tout sous-objet M' de M est U-engendré, nous dirons que M est U-<u>fort engendré</u> .

On voit facilement que l'objet U est un générateur pour la catégorie $\mathcal{C}$ si et seulement si tout objet de $\mathcal{C}$ est U-engendré.

Si $M \in \mathcal{C}$ est un objet de longueur finie, on dénote par $l(M)$ la longueur de M (la longueur d'une suite de Jordan-Hölder de M). On sait que M est de longueur finie si et seulement si M est artinien et noethérien.

Pour l'objet M nous désignons par $s_o(M)$ le socle de M, c'est-à-dire la somme de tous sous-objets simples de M. Par récurrence nous définisons sur M une filtration:

$$(*) \qquad 0 = M_o \subset M_1 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$$

où $M_1 = s_o(M), \ldots, M_{n+1}/M_n = s_o(M/M_n), \ldots$.

<u>Théorème 1</u> Soient U un objet artinien de $\mathcal{C}$ et M un objet U-fort engendré. Alors il existe un nombre naturel n tel que

$$M_n = M_{n+1} = \ldots$$

<u>Démonstration</u> Supposons que la filtration $(*)$ est une chaîne strictement croissante. Soit $f: U \longrightarrow M$ un morphisme tel que $f(U) \subset M_n$ $(n \geq 1)$. Comme U est artinien, alors $f(U) \simeq M/\mathrm{Ker}\, f$ est un objet artinien. Nous avons la chaîne

$$0 = M_o \cap f(U) \subset M_1 \cap f(U) \subset \ldots \subset M_n \cap f(U) = f(U)$$

où $M_i \cap f(U) / M_{i-1} \cap f(U)$ est un objet semi-simple de longueur finie $(1 \leq i \leq n)$. En effet nous avons le monomorphisme canonique $0 \longrightarrow M_i \cap f(U) / M_{i-1} \cap f(U) \longrightarrow M_i/M_{i-1}$ et $M_i \cap f(U)$ est artinien. Par suite f(U) est un objet de longueur finie.

Maintenant nous démontrons par recurrence que pour tout morphisme $f: U \longrightarrow M$ tel que $f(U) \subset M_n$ et $f(U) \not\subset M_{n-1}$ nous avons $l(f(U)) \geqslant n$ $(n \geqslant 1)$. En effet si $n = 1$, alors $f(U) \subset M_1$ et $f(U) \neq 0$. Il est clair que $l(f(U)) \geqslant 1$. Soit $f: U \longrightarrow M$ tel que $f(U) \subset M_{n+1}$ et

$f(U)\not\subset M_n$. Soit $\pi : M \longrightarrow M/M_{n-1}$ le morphisme canonique ; alors $(\pi \circ f)(U) \subseteq M_{n+1}/M_{n-1}$. Comme M_{n+1}/M_{n-1} est une extension essentielle de M_n/M_{n-1}, alors $(\pi \circ f)(U) \cap M_n/M_{n-1} \neq 0$. Si on note $(\pi \circ f)(U) \cap M_n/M_{n-1} = K/M_{n-1}$, alors $M_{n-1} \subsetneqq K \subset M_n$ et $K \subseteq f(U)$. Comme M est U-fort engendré, alors K est U-engendré et donc il existe un morphisme $g : U \longrightarrow K$ tel que $g(U) \not\subset M_{n-1}$. Donc $g(U) \subseteq K \subseteq f(U)$. Comme $g(U) \subset M_n$ et $f(U) \not\subset M_n$, alors $g(U) \subsetneqq f(U)$ et par suite $l(f(U)) > l(g(U))$. D'après les hypothèses de recurrence, nous avons $l(g(U)) \geqslant n$ et donc $l(f(U)) \geqslant n+1$. Soit l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{U' \text{ sous objet de } U \ / \ U/U' \text{ est de longueur finie}\} .$$

Si $U_1, U_2 \in \mathcal{A}$, alors, comme il existe le monomorphisme

$$0 \longrightarrow U/_{U_1 \cap U_2} \longrightarrow U/U_1 \oplus U/U_2 ,$$

nous obtenons que $U_1 \cap U_2 \in \mathcal{A}$. Comme U est un objet artinien, alors $\mathcal{A}$ a un plus petit élément; soit U_o cet élément et notons $r = l(U/U_o)$. Comme $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$ est une chaîne strictement croissante et comme M est U-fort engendré, on peut trouver l'ensemble de morphismes $\{f_n\}_{n \geqslant 1}$, $f_n : U \longrightarrow M$ tel que $f_n(U) \subset M_n$ et $f_n(U) \not\subset M_{n-1}$ pour tout $n \geqslant 1$. Comme $f_n(U) \simeq U/\mathrm{Ker}\, f_n$ et $f_n(U)$ est un objet de longueur finie, alors $\mathrm{Ker}\, f_n \in \mathcal{A}$ et donc $U_o \subseteq \mathrm{Ker}\, f_n$.

Par suite $l(f_n(U)) = l(U/\mathrm{Ker}\, f_n) \leqslant l(U/U_o) = r$. Comme $l(f_n(U)) \geqslant n$, alors $n \leqslant r$ pour tout nombre naturel n, contradiction.

<u>Corollaire 1</u> [5] Soient $\mathcal{C}$ une catégorie de Grothendieck et U un objet artinien de $\mathcal{C}$. Si M est un objet artinien de $\mathcal{C}$, U-fort engendré, alors M est noethérien.

<u>Démonstration</u> D'après le théorème 1, il existe un nombre naturel n tel que $M_n = M_{n+1} = \ldots$. Si $M \neq M_n$, alors, comme M/M_n est un objet artinien, il existe un sous-objet minimal

$K/M_n \subset M/M_n$, $K/M_n \neq 0$. Donc K/M_n est simple et par suite $s_o(M/M_n) \neq 0$, c'est-à-dire $M_n \neq M_{n+1}$, contradiction. Donc $M = M_n$ d'où nous avons que M est un objet de longueur finie.

Corollaire 2 (Hopkins) [5] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie de Grothendieck avec le générateur artinien U. Si M est un objet artinien arbitraire de $\mathcal{C}$, alors M est noethérien.

Remarque D'après le théorème de Gabriel-Popescu [3] ,le corollaire 2 est equivalent avec le résultat suivant: si R est un anneau unitaire et F une topologie additive sur R [7] tel que R_R est F-artinien, alors R_R est F-noethérien.

Bibliographie

1. C. Faith, "Injective modules over Levitzki Rings" (à paraître, Lecture Notes, Marcel Dekker)
2. P. Gabriel, "Des catégories abeliennes",Bull.Soc.Math. France 90(1962),323-448.
3. P. Gabriel et N. Popescu, "Caracterisation de catégories abéliennes avec générateurs et limites exactes", C.R.Acad.Sci.Paris, 258(1964),4188-4190.
4. C. Hopkins, "Rings with minimal condition for left ideals", Ann.Math., 40(1939),712-730.
5. C. Năstăsescu, "Conditions de finitude pour les modules", Revue Roum.Math.Pures et Appl.tome XXIV,nr.5 (1979),745-758.
6. C. Năstăsescu, "Conditions de finitude pour les modules II" (à paraître,Revue Roum.Math.Pures et Appl.nr.4, (1980).
7. Bo Stenström, "Rings of Quotients. An introduction to Methods of Ring Theory",Springer Verlag,1975.

Constantin Năstăsescu

Universitatea Bucureşti
Facultatea de Matematică
Str. Academiei 14
70109 Bucharest 1,Romania

MODULES Δ-INJECTIFS SUR LES ANNEAUX À DIMENSION DE KRULL

Constantin Năstăsescu

Universitatea București
Facultatea de Matematică
Str. Academiei 14
70109 Bucharest 1, Romania

INTRODUCTION

Dans ce travail on met en évidence la liaison entre la notion de module Δ-injectif et celle d'"order" dans un anneau artinien. La notion de module Δ-injectif a été introduite par Faith dans [6], l'étude de ces modules étant ultérieurement développée dans les travaux [14], [16]. Dans ces travaux on met en évidence l'importance pour l'étude des modules Δ-injectifs du théorème de Hopkins donné pour les catégories de Grothendieck [15], [16] (une démonstration élémentaire de ce théorème est donné dans le travail [17]).

Ce travaill contient 4 paragraphes. Dans le premier paragraphe sont donnés les résultats les plus importantes concernant les modules Δ-injectifs. Le deuxième paragraphe contient l'étude des modules Δ-injectifs sur les anneaux avec la dimension de Krull. En particulier on obtient un théorème de Krause, Lenagan et Stafford (voir le corollaire 2.5).

Le paragraphe 3 contient dans la première partie des nouveaux résultats concernant les modules Δ-injectifs. Ces résultats seront appliqués pour donner des conditions suffisantes pour qu'un anneau soit un order dans un anneau artinien. En particulier on obtient un théorème de B. Müller (voir le corollaire 3.10).

Dans le dernier paragraphe on introduit la notion de dimension Δ-injective pour un module (noté par $\Delta.d_R M$) et on caractérise les anneaux R pour lesquels $\Delta.d_R R \geqslant 1$.

NOTATIONS : Tous les anneaux et modules considérés sont unitaires. Si R est un anneau, Mod R sera la catégorie des R-modules à droite.

Si $M \in \text{Mod } R$ et $X \subset M$ et $Y \subset R$ sont deux ensembles non-vides, nous posons :

$$\text{Ann}_R X = r_R(X) = \{ a \in R \ / \ Xa = 0 \} ;$$

$$\text{Ann}_M(Y) = l_M(Y) = \{ x \in M \ / \ xY = 0 \} .$$

On sait que: $\text{Ann}_R(X) = \text{Ann}_R(\text{Ann}_M(\text{Ann}_R(X)))$ et

$$\text{Ann}_M(Y) = \text{Ann}_M(\text{Ann}_R(\text{Ann}_M(Y))) .$$

Nous avons aussi les inclusions: $X \subset \text{Ann}_M(\text{Ann}_R(X))$ et $Y \subset \text{Ann}_R(\text{Ann}_M(Y))$.

On notera par $E(M) = E_R(M)$ l'enveloppe injective de M. On note par Spec(R) (resp. Min(R)) l'ensemble des idéaux premiers (resp. des idéaux premiers minimaux) de R. Si $p \in$ Spec R, alors nous dirons que p est associé à M s'il existe un sous-module non-nul $M' \subset M$ tel que $p = \mathrm{Ann}_R(M'')$ pour tout sous-module $M'' \subseteq M'$, $M'' \neq 0$. On note Ass(M) l'ensemble des idéaux premiers associés à M. Si M_R est un R-module à droite on désigne par $s_o(M)$ le socle de M, c'est-à-dire la somme des tous les sous-modules simples de M.

Dans ce travail nous utiliserons beaucoup le théorème de Johnson-Wong [9] : Si M_R est un module quasi-injectif et $\Lambda = \mathrm{End}(M)$ l'anneau des endomorphismes de M, alors pour tout Λ-sous-module de type fini X de Λ^M on a $X = \mathrm{Ann}_M(\mathrm{Ann}_R(X))$.

1. Δ-MODULES. RÉSULTATS PRÉLIMINAIRES.

Soit R un anneau et soit $M \in$ Mod R un module quelconque. Nous noterons par $A_r(M,R)$ l'ensemble des idéaux à droite de R qui sont de la forme $I = \mathrm{Ann}_R(X)$, où X décrit l'ensemble des parties non vides de M; $A_r(M,R)$ est stable par intersection quelconque.

Nous dirons que <u>M est un $\Sigma(\Delta)$-module</u> si $A_r(M,R)$ satisfait à la condition de chaîne ascendante (resp. descendante). Si de plus M est injectif, nous dirons simplement que M est un module $\sum(\Delta)$-injectif. Les notions de module $\sum(\Delta)$-injectif sont introduites par Faith dans [4], [6]. Dans le travail [4] on démontre que un module Q_R est $\sum$-injectif $\Longleftrightarrow Q^{(I)}$ est injectif pour tout ensemble $I \neq \emptyset$.

Soit $\Lambda = End_R(M)$ l'anneau d'endomorphismes de M. Alors M est un Λ-module à gauche; le module $_{\Lambda}M$ s'appelle le <u>contre-module</u> de M. On dénote par Biend(M) l'anneau des biendomorphismes de M, c'est-à-dire Biend(M) = $End_{\Lambda}(M)$.

Pour les Δ-modules nous avons les propriétés suivantes:

1) Si M_R est un module, alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

i) M est un Δ-module

ii) Pour tout ensemble non vide X de M il existe des éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ tel que

$$Ann_R(X) = \bigcap_{i=1}^{n} Ann_R(x_i)$$

iii) Toute famille d'éléments de $A_r(M,R)$ admet un élément minimal.

2) Si M est un Δ-module et $N \subset M$ est un sous-module, alors N est un Δ-module.

3) Si M est un Δ-module, alors pour tout ensemble $I \neq \emptyset$, $M^{(I)}$ et M^I sont des Δ-modules.

4) Si $(M_i)_{i=1,2,\ldots,n}$ sont des Λ-modules, alors $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ est un Δ-module.

5) Si $\mathfrak{a}$ est un idéal bilatère tel que $\mathfrak{a} \subset \mathrm{Ann}_R(M)$ et M est un Δ-module, alors M est un Δ-module sur l'anneau $R/\mathfrak{a}$.

6) M_R est un Δ-module $\Longleftrightarrow$ M est un Δ-module sur l'anneau Biend(M).

7) Si le contre-module ${}_\Lambda M$ est noethérien, alors M_R est un Δ-module.

8) Si M_R est un module quasi-injectif, alors M est un Δ-module $\Longleftrightarrow$ ${}_\Lambda M$ est Λ-module noethérien $\Longleftrightarrow$ M est un module Δ-injectif sur l'anneau R/Ann(M).

9) Si Q_R est un module injectif et $F_Q = \{ I$ idéal à droite de R / $\mathrm{Hom}(R/I,Q) = 0 \}$ est la topologie additive co-engendré de Q, alors Q est $\sum(\Delta)$-injectif $\Longleftrightarrow$ l'anneau R est noethérien (resp. artinien) par rapport à la topologie F_Q .

10) Si Q_R est un module Δ-injectif, alors Q_R est un module $\sum$-injectif.

11) Si Q_R est injectif (quasi-injectif) tel que le contre-module ${}_\Lambda Q$ de Q ($\Lambda = \mathrm{End}(Q)$) est noethérien, alors ${}_\Lambda Q$ est artinien.

12) Si Q_R est Δ-injectif et on désigne par R_Q l'anneau de quotients R_{F_Q}, alors $R_Q = \mathrm{Biend}(Q)$ et R_Q est un anneau semi-primaire ayant le socle à droite un module de longueur finie.

13) (La structure des modules Δ-injectifs) Si Q_R est

un module Δ-injectif, alors

i) $Q = \bigoplus_{\alpha \in I} Q_\alpha$ où Q_α est un injectif indécomposable pour tout $\alpha \in I$.

ii) Il existe un nombre fini des idéaux premiers $p_1, p_2, \ldots, p_n$ tel que $\mathrm{Ass}\, Q = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$. De plus, R/p_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ sont des anneaux de Goldie (à droite).

iii) Si on note $E(R/p_i) = I_{p_i}^{n_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ où I_{p_i} est un injectif indécomposable, alors pour tout $\alpha \in I$, I_α est isomorphe à un injectif de la famille $\{I_{p_1}, I_{p_2}, \ldots, I_{p_n}\}$.

iv) Si de plus R/q est un anneau de Goldie pour tout $q \in \mathrm{Spec}\, R$ (en particulier lorsque R est un anneau noethérien à droite ou l'anneau R est à identité polynômiale), alors $\mathrm{Ass}\, Q \subseteq \mathrm{Min}(R)$.

14) Si $Q = \bigoplus_{i \in I} Q_i$ est un module injectif et Q_i est Δ-injectif pour tout $i \in I$, alors Q est Δ-injectif.

Les affirmations 1),2),5),6) sont évidentes. L'affirmation 7) est une conséquence directe de l'affirmation 1). L'affirmation 8) est une conséquence du théorème de Johnson-Wong. Les démonstrations des affirmations 9),10), 11),12),13) et 14) sont données dans le travail [16]. Les affirmations 9) et 10) sont une conséquence directe du théorème de Hopkins pour une catégorie de Grothendieck (voir [15], [17]).

Pour la démonstration des affirmations 7), 8) et 10) voir aussi [6]. Autres considérations sur les modules Δ-injectifs on peut trouver dans les travaux [6], [14], [16].

Nous terminons donnant la démonstration des affirmations 3) et 4).

Soit $X \subset M^I$ un ensemble non-vide. Si $\pi_i : M^I \longrightarrow M$ est le morphisme canonique, nous notons $X_i = \pi_i(X)$. On voit que $\mathrm{Ann}_R(X) = \mathrm{Ann}_R(\bigcup_{i\in I} X_i)$. Donc il existe des éléments $y_1, y_2, \dots, y_n \in \bigcup_{i\in I} X_i$ tel que $\mathrm{Ann}_R(\bigcup_{i\in I} X_i) = \mathrm{Ann}_R\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$. Nous supposons que $y_i \in X_{k_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$; alors il existe des éléments $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ tels que $y_i = \pi_{k_i}(x_i)$. On voit que $\mathrm{Ann}_R(X) = \mathrm{Ann}_R\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ et par suite M^I est un Δ-module. Comme $M^{(I)} \subset M^I$, alors $M^{(I)}$ est aussi un Δ-module.

Nous démontrons maintenant l'affirmation 4). Soit $X \subset M_1 \oplus \dots \oplus M_n$ un ensemble non-vide. Si $\pi_i : \bigoplus_{j=1}^{n} M_j \longrightarrow M_i$ est le morphisme canonique nous notons $X_i = \pi_i(X)$. On voit que $\mathrm{Ann}_R(X) = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}_R(X_i)$. Pour l'ensemble X_i il existe des éléments $y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{n_i}} \in X_i$ tels que $\mathrm{Ann}_R(X_i) = \mathrm{Ann}_R\{y_{i_1}, y_{i_2}, \dots, y_{i_{n_i}}\}$. Soient les éléments $x_{i_1}, \dots, x_{i_{n_i}} \in X$ tels que $y_{i_k} = \pi_i(x_{i_k})$ $(1 \leqslant k \leqslant n_i)$. On voit très facilement que $\mathrm{Ann}_R(X) = \mathrm{Ann}_R\{x_{i_k}\}_{\substack{i=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n_i}}$ et donc $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ est un Δ-module.

<u>Exemple</u> Soient R un anneau noethérien à droite

essentiellement borné à droite (en anglais: right fully bounded right Noetherian ring) et M_R un R-module de type fini. D'après Cauchon [3], M_R est un Δ-module. Supposons maintenant que Q_R est un module injectif de type fini. Alors Q est un Δ-injectif noethérien. D'après le théorème 2.13 [16], on en déduit que Q_R est un module de longueur finie et R/Ann(Q) est un anneau artinien. D'ici on en déduit que si Q_R est module quasi-injectif et de type fini, alors d'après la propriété 8), Q est module Δ-injectif sur l'anneau R/Ann(Q) et par suite Q_R est un module de longueur finie et R/Ann(Q) est un anneau artinien.

2. <u>MODULES Δ-INJECTIFS SUR LES ANNEAUX À DIMENSION DE KRULL</u>

Pour la notion de module à dimension de Krull voir le travail [8].

Si $M \in \text{Mod } R$, on dénote par K.dim M la dimension de Krull de M. Nous rappelons qu'un module M s'appelle <u>α-critique</u> si K.dim M $= \alpha$ et K.dim M/M' $< \alpha$ pour tout sous-module $M' \subset M$, $M' \neq 0$ [8].

Soit F une topologie additive sur l'anneau R [20]. Nous rappelons qu'un module $M \in \text{Mod } R$ est dit F-de torsion si pour tout $x \in M$, $\text{Ann}_R(x) \in F$; le module M s'appelle F-sans torsion si pour tout $x \in M$, $x \neq 0$, $\text{Ann}_R(x) \notin F$ [20].

On désigne par $\mathcal{T}_F$ la classe des modules F-de torsion. Un module $M_R \neq 0$ est dit <u>F-cocritique</u> si M est F-sans torsion et pour tout sous-module $M' \subset M, M' \neq 0, M/M' \in \mathcal{T}_F$. On sait que M est F-cocritique $\Longleftrightarrow T_F(M)$ est un objet simple dans la catégorie quotient Mod $R/\mathcal{T}_F$ (T_F est le foncteur canonique T_F: Mod $R \longrightarrow$ Mod $R/\mathcal{T}_F$).

Un idéal à droite I tel que R/I est F-cocritique s'appelle <u>F-critique</u> . Il est clair que si M est un module F-cocritique, alors pour tout $x \in M, x \neq 0$, $\mathrm{Ann}_R(x)$ est un idéal à droite F-critique.

Il est bien connu que si M est α-critique, alors il existe une topologie additive F tel que M est F-cocritique [8],[12]. Réciproquement n'est pas vraie en général.

<u>Exemple</u> Soit K un corps et soit R l'anneau artinien à droite $R = T_2(K) = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & K \end{pmatrix}$. Nous considérons les éléments idémpotents $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Nous obtenons que $S_2 = e_2R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K \end{pmatrix}$ est R-module simple projectif et $e_1R = \begin{pmatrix} K & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un module projectif de longueur 2. Si on désigne $V = \begin{pmatrix} 0 & K \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, K est un idéal bilatère et $V_R \simeq S_2$. On voit que $S_1 = e_1R/V$ est un module simple. Comme R est un anneau héréditaire, S_1 est un module injectif. Si F_1 est la topologie additive coengendré de module injectif $E(S_2)$, c'est-à-dire $F_1 = \{ I \ / \ \mathrm{Hom}(R/I, E(S_2)) = 0 \}$, le module e_1R est F_1-critique et n'est pas O-critique.

Un autre exemple est donné dans le travail [12].

Proposition 2.1 Soit R un anneau à dimension de Krull à droite.

a) Si $p \in \mathrm{Min}\, R$, alors $E(R/p)$ est un module Δ-injectif.

b) Si M est un module α-critique où $\alpha = \mathrm{K.dim}\, R$, alors $E(M)$ est un module Δ-injectif.

Démonstration Soient F_p la topologie additive co-engendré de $E(R/p)$ et $\mathcal{T}_p$ la classe des modules F_p-de torsion. Alors $\mathcal{T}_p = \{ M \in \mathrm{Mod}\, R \ / \ \mathrm{Hom}(M, E(R/p)) = 0 \}$.

Soit $M \neq 0$ un module F_p-sans torsion. Il contient un sous-module N, β-critique. D'après le théorème 8.3 [8], il existe un sous-module non-nul $N' \subset N$ et un idéal $q \in \mathrm{Spec}\, R$ tel que $q = \mathrm{Ann}_R(N')$. Comme R/q est un anneau de Goldie à droite, d'après le lemme 4.2 [16] on en déduit que $q \subset p$ et donc $q = p$. Soit $0 \neq N'' \subset N'$, alors $\mathrm{K.dim}\, N'/N'' < \beta \leqslant \mathrm{K.dim}\, R/q = \mathrm{K.dim}\, R/p$. S'il existe un morphisme $f: N'/N'' \longrightarrow E(R/p)$, $f \neq 0$, alors $\mathrm{Im}\, f \cap R/p \neq 0$. Comme $\mathrm{K.dim}\, \mathrm{Im}\, f \leqslant \mathrm{K.dim}\, N'/N'' < \beta$, on en déduit que $\mathrm{K.dim}(\mathrm{Im}\, f \cap R/p) < \mathrm{K.dim}\, R/p$, contradiction. Donc $\mathrm{Hom}(N'/N'', E(R/p)) = 0$ et par suite N' est un module F_p-critique. Donc tout module F_p-sans torsion contient un sous-module F_p-critique. Par suite dans la catégorie quotient $\mathrm{Mod}\, R/\mathcal{T}_p$ l'objet $U = T_p(R_R)$ est semi-artinien [15] (ici T_p est le foncteur canonique : $T_p : \mathrm{Mod}\, R \longrightarrow \mathrm{Mod}\, R/\mathcal{T}_p$). Comme R a la dimension de Krull , alors pour tout idéal à droite I, R/I a la dimension de Goldie finie [8] et par suite l'objet U a la propriété suivante: pour tout sous-objet $U' \subset U$, le socle $s_o(U/U')$ de U/U' est un objet de longueur finie. L'objet U est artinien. En effet si $U_1 \supset U_2 \supset \ldots \supset U_n \supset \ldots$ est une chaîne descendante de sous-objets de U, nous notons $U' = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$. Comme $s_o(U/U')$ est de longueur finie, il existe un nombre naturel n_o tel que $U' = U_{n_o}$ et donc $U_n = U_{n+1}$ pour tout $n \geqslant n_o$. Donc R est un anneau F_p-artinien et par suite $E(R/p)$ est un module Δ-injectif (voir la propriété 9), §1).

b) On fait la même démonstration.

<u>Remarque</u> Une démonstration d'affirmation a) est donnée dans le travail [1] (la proposition 6). Ici est démontré un résultat équivalent avec l'affirmation a) : l'anneau R a la dimension de Krull zero par rapport à la topologie additive F_p.

Soit R un anneau à la dimension de Krull. Alors l'ensemble Min R est fini [8] . Si on désigne par $\mathrm{rad}\ R = \bigcap_{p \in \mathrm{Min}\ R} p$, alors $F_{\mathrm{rad}\ R}$ est la topologie additive coengendré de $E(R/\mathrm{rad}\ R)$.

<u>Corollaire 2.2</u> Si R est un anneau à la dimension de Krull à droite, alors les affirmations suivantes sont vraies:

i) $E(R/\mathrm{rad}\ R)$ est un module Δ-injectif.

ii) Si M_R est un R-module à la dimension de Krull, alors M est un module $F_{\mathrm{rad}\ R}$-noethérien [16] . En particulier il existe un sous-module $M' \subset M$, de type fini, tel que M/M' est $F_{\mathrm{rad}\,R}$-de torsion.

Démonstration Pour l'affirmation i) s'applique la proposition 2.1, a).

ii) On désigne par $\mathcal{T}_{\mathrm{rad}\,R}$ la classe des modules $F_{\mathrm{rad}\,R}$-de torsion et par $T: \mathrm{Mod}\, R \longrightarrow \mathrm{Mod}\, R/\mathcal{T}_{\mathrm{rad}\,R}$ le foncteur canonique. Exactement comme dans la proposition 2.1, a) on montre que $T(M)$ est un objet artinien. $E(R/\mathrm{rad}\, R)$ étant Δ-injectif, alors $T(R_R)$ est un générateur artinien dans la catégorie $\mathrm{Mod}\, R/\mathcal{T}_{\mathrm{rad}\,R}$. D'après le théorème de Hopkins [15], [17], on a que $T(M)$ est un objet noethérien, c'est-à-dire M est un module $F_{\mathrm{rad}\,R}$-noethérien.

Un module M_R à dimension de Krull s'appelle K-homogène [11] si pour tout sous-module $N \subset M$, $N \neq 0$, $K.\dim N = K.\dim M$.

Corollaire 2.3 Soient R un anneau à dimension de Krull et M_R un module K-homogène tel que $K.\dim M = K.\dim R$. Alors $E(M)$ est un module Δ-injectif.

Démonstration Comme M a la dimension de Goldie finie, alors M est une extension essentielle d'une somme directe finie, $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i \subset M$, tel que M_i est α-critique ($\alpha = K.\dim R$) pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Ensuite on applique la proposition 2.1,b).

Un anneau R s'appelle Δ-anneau si $E(R_R)$ est un module Δ-injectif.

Corollaire 2.4 Si R est un anneau à dimension de Krull (à droite) K-homogène, alors R est un Δ-anneau.

Corollaire 2.5 ([11], le théorème 7) Si R est un anneau à dimension de Krull K-homogène, alors R est un anneau de Goldie à droite.

Démonstration Comme E(R) est un module Δ-injectif, alors E(R) est un module Σ-injectif (voir la propriété 10), §1). Donc $A_r(E(R), R)$ satisfait à la condition de chaîne ascendante. En particulier on déduit que R est un anneau de Goldie.

Corollaire 2.6 Si R est un anneau à dimension de Krull à droite, alors il existe une correspondance bijective entre l'ensemble Min R et l'ensemble de types de modules Δ-injectifs indécomposables.

Démonstration Soit $p \in$ Min R. Comme R/p est un anneau de Goldie, alors $E(R/p) = I_p^n$ où I_p est un injectif indécomposable. D'après la proposition 2.1, I_p est un module Δ-injectif. D'après la proposition 4.5 [16], Ass $I_p = \{p\}$. En conclusion l'application $p \longrightarrow I_p$ est une bijection.

Corollaire 2.7 Soit R un anneau à dimension de Krull à droite. Si $\{Q_i\}_{i\in I}$ est une famille de modules Δ-injectifs, alors $\bigoplus_{i\in I} Q_i$ et $\prod_{i\in I} Q_i$ sont modules Δ-injectifs.

Démonstration $Q_i (i\in I)$ étant Δ-injectif, alors Q_i est un module Σ-injectif et donc $Q_i = \bigoplus_{\alpha\in A_i} Q_{\alpha,i}$ où

$Q_{\alpha,i}$ est un injectif indécomposable pour tout $\alpha \in A_i$ (voir [16], [18]). Donc $\bigoplus_{i\in I} Q_i = \bigoplus_{i\in I}\bigoplus_{\alpha\in A_i} Q_{\alpha,i}$. Donc on peut supposer que Q_i sont indécomposables. Comme l'ensemble Min R est fini [8], alors la famille $\{Q_i\}_{i\in I}$ contient un nombre fini d'injectifs indécomposables non-isomorphes. D'après le théorème 2.4 [16] et les propriétés 3) et 4) (§1), il en résulte que $\bigoplus_{i\in I} Q_i$ est un module Δ-injectif. Pour le module $\prod_{i\in I} Q_i$ on fait la même démonstration.

Maintenant nous donnerons une caractérisation des anneaux artiniens à droite qui généralise le théorème II.5 (de [3],pag.48).

Corollaire 2.8 Pour un anneau R quelconque, les propriétés suivantes sont équivalentes:

1) R est un anneau artinien à droite.

2) R est un anneau à dimension de Krull à droite et pour tout R-module injectif indécomposable E, si on pose $H = \mathrm{End}_R(E)$, le contre-module $_H E$ est noethérien.

Démonstration 1) $\Longrightarrow$ 2). Si E est un injectif, E est un module Δ-injectif et par suite $_H E$ est noethérien (voir la propriété 8),§1).

2) $\Longrightarrow$ 1). Soit $p \in \mathrm{Spec}\, R$; alors $E(R/p) = I_p^n$ où I_p est un injectif indécomposable. D'après les hypothèses, I_p est Δ-injectif et par suite $E(R/p)$ est Δ-injectif. Tenant compte de la propriété 13),§1, p est un idéal

minimal et par suite Min R = Spec R. Si $(S_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$ est la famille des types de modules simples de Mod R, alors Λ est un ensemble fini et $Q = \bigoplus_{\alpha\in\Lambda} E(S_\alpha)$ est un module Δ-injectif. Comme Q est un cogénérateur de Mod R, nous obtenons que $A_r(Q,R)$ est égal avec l'ensemble des tous idéaux à droite de R. Donc R est un anneau artinien à droite.

<u>Remarques</u> 1) Les corollaires 2.7 et 2.8 peuvent être donnés pour un anneau ayant les propriétés suivantes:

i) Min R est un ensemble fini

ii) Pour tout $p\in$ Spec R, R/p est un anneau de Goldie à droite (par exemple quand l'anneau R est à identité polynômiale).

2) Soit R un anneau commutatif régulier au sens de von Neumann qui n'est pas noethérien. Comme tout idéal irréductible est maximal et comme tout module simple est injectif, alors tout module injectif indécomposable est un module simple et par suite est un module Δ-injectif. Donc il est nécessaire de supposer que Min R est un ensemble fini.

3. MODULES Δ-INJECTIFS ET ANNEAUX DE QUOTIENTS ARTINIENS

Soit $Q\in$ Mod R un module injectif et F_Q la topologie additive co-engendré de Q, c'est-à-dire $I\in F_Q \iff \mathrm{Hom}(R/I,Q) = 0$.

On sait que si I est un idéal à droite, R/I est F_Q-sans torsion $\Longleftrightarrow$ il existe un ensemble non-vide $X \subset Q$ tel que $I = \mathrm{Ann}_R(X)$. Nous notons

$$J_Q = J_Q(R) = \bigcap_{\substack{I \text{ idéal à droite} \\ I \text{ est } F_Q\text{-critique}}} I$$

On voit que $J_Q(R) = \bigcap_{M \text{ module } F_Q\text{-cocritique}} \mathrm{Ann}\ M$ et par suite $J_Q(R)$ est un idéal bilatère.

Si I et J sont deux idéaux F_Q-critiques nous dirons qu'ils sont <u>équivalents</u> (en anglais "related" [12]) si $E(R/I)$ et $E(R/J)$ sont isomorphes. D'après [12] les idéaux F_Q-critiques I et J sont équivalents si et seulement s'il existe les éléments $a \notin I$ et $b \notin J$ tel que $(I:a) = (J:b)$ ($(I:a) = \{\lambda \in R \ / \ a\lambda \in I\}$).

<u>Proposition 3.1</u> Soient R un anneau quelconque et Q_R un module injectif. Nous notons $\Lambda = \mathrm{End}_R(Q)$.

Les propriétés suivantes sont vraies:

1) L'idéal à droite I est F_Q-critique $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Ann}_Q(I)$ est un Λ-sous-module simple de ${}_{\Lambda}Q$ et R/I est F_Q-sans torsion.

2) Si $A \subset {}_{\Lambda}Q$ est un Λ-sous-module simple de ${}_{\Lambda}Q$, alors $\mathrm{Ann}_R(A)$ est un idéal à droite F_Q-critique.

3) Si I,J sont des idéaux F_Q-critiques équivalents, alors $\mathrm{Ann}_Q(I)$ et $\mathrm{Ann}_Q(J)$ sont Λ-modules isomorphes.

4) $J_Q(R) = \mathrm{Ann}_R(s_o({}_{\Lambda}Q))$

<u>Démonstration</u> 1) Supposons que I est F_Q-critique et

notons $A = \mathrm{Ann}_Q(I)$. Si $x \in A, x \neq 0$, alors $\mathrm{Ann}_R(x) \supset \mathrm{Ann}_R(\mathrm{Ann}_Q(I)) = I$ (R/I étant F_Q-sans torsion). Si $I \neq \mathrm{Ann}_R(x)$, alors $Rx \simeq R/\mathrm{Ann}_R(x)$ est F_Q-de torsion, contradiction. Donc $I = \mathrm{Ann}_R(x)$ et d'après le théorème de Johnson-Wong, $\Lambda x = \mathrm{Ann}_Q(\mathrm{Ann}_R(x)) = \mathrm{Ann}_Q(I) = A$ d'où il en résulte que A est un Λ-module simple.

Réciproquement, supposons que $A = \mathrm{Ann}_Q(I)$ est simple et soit $I \subsetneq J$. Alors $\mathrm{Ann}_Q(J) \subseteq \mathrm{Ann}_Q(I) = A$ et donc $\mathrm{Ann}_Q(J) = 0$ ou $\mathrm{Ann}_Q(J) = A$. Si $\mathrm{Ann}_Q(J) = A$, alors $J \subseteq \mathrm{Ann}_R(\mathrm{Ann}_Q(J)) = \mathrm{Ann}_R(A) = I$, contradiction. Par suite $\mathrm{Ann}_Q(J) = 0$ et donc $\mathrm{Hom}_R(R/J,Q) = 0$, c'est-à-dire R/J est F_Q-de torsion. Donc I est F_Q-critique.

2) Comme A est Λ-module simple, $A = \Lambda x$ pour tout $x \in A$, $x \neq 0$. D'après le théorème de Johnson-Wong, $A = \mathrm{Ann}_Q(\mathrm{Ann}_R(A))$, et utilisant l'affirmation 1) il en résulte que $\mathrm{Ann}_R(A)$ est un idéal F_Q-critique.

3) Si I et J sont équivalents, il existe des éléments $a \notin I$ et $b \notin J$ tels que $(I:a) = (J:b)$. Notons $A = \mathrm{Ann}_Q(I)$ et $A' = \mathrm{Ann}_Q(I:a)$; A et A' sont Λ-modules simples. Considérons le Λ-morphisme $\varphi_a : {}_\Lambda Q \longrightarrow {}_\Lambda Q$, où $\varphi_a(x) = xa$ pour tout $x \in Q$. On voit que $\varphi_a(A) = Aa \subseteq A'$. Comme $a \notin I$, alors $Aa \neq 0$ et par suite $Aa = A'$, d'où il en résulte que $A \simeq A'$. De même façon, si on note $B = \mathrm{Ann}_Q(J)$ et $B' = \mathrm{Ann}_Q(J:b)$ on obtient $B \simeq B'$. Comme $A' = B'$, on a $A \simeq B$.

4) On applique 1) et 2).

Corollaire 3.2 Supposons que Q_R est un module Δ-injectif. Alors:

1) Le module ${}_\Lambda Q$ est de longueur finie et tout Λ-module quotient Q/Q'' contient un sous-module simple isomorphe avec un sous-module simple de $s_o({}_\Lambda Q)$.

2) Il existe un nombre naturel n tel que $J_Q(R)^n \subseteq \mathrm{Ann}_R(Q)$.

Démonstration 1) On sait que ${}_\Lambda Q$ est un module de longueur finie (voir les propriétés 8) et 11), §1). Soit $Q_1 \subset Q_2$ deux sous-modules de ${}_\Lambda Q$ tel que Q_2/Q_1 est un Λ-module simple. Nous notons $I_1 = \mathrm{Ann}_R(Q_1)$ et $I_2 = \mathrm{Ann}_R(Q_2)$. D'après le théorème de Johnson-Wong, $Q_1 = \mathrm{Ann}_Q(I_1)$ et $Q_2 = \mathrm{Ann}_Q(I_2)$. Comme $Q_1 \neq Q_2$, il en résulte que $I_2 \subsetneqq I_1$. Le module I_1/I_2 est F_Q-cocritique. En effet, soit J un idéal à droite tel que $I_2 \subsetneqq J \subset I_1$. Alors $Q_1 = \mathrm{Ann}_Q(I_1) \subset \mathrm{Ann}_Q(J) \subset \mathrm{Ann}_Q(I_2) = Q_2$. Comme Q_2/Q_1 est un module simple, alors $\mathrm{Ann}_Q(J) = Q_2$ ou $\mathrm{Ann}_Q(J) = Q_1$. Si $\mathrm{Ann}_Q(J) = Q_2$, nous obtenons que $J \subset \mathrm{Ann}_R(\mathrm{Ann}_Q(J)) = \mathrm{Ann}_R(Q_2) = I_2$ et donc $J = I_2$, contradiction. Par suite il est nécessaire que $\mathrm{Ann}_Q(J) = Q_1$. Soit $f: I_1/J \longrightarrow Q$ un R-morphisme quelconque. Si $\pi: I_1 \longrightarrow I_1/J$ est le morphisme canonique, on note $g = f \circ \pi$. Comme Q est injectif, il existe un élément $x_o \in Q$ tel que $g(\lambda) = x_o\lambda$ pour tout $\lambda \in I_1$. Comme $g(J) = 0$, il en résulte que $x_oJ = 0$, c'est-à-dire $x_o \in \mathrm{Ann}_Q(J) = Q_1 = \mathrm{Ann}_Q(I_1)$. Donc $x_oI_1 = 0$, d'où $g = 0$ et $f = 0$. Donc

$Hom_R(I_1/J,Q) = 0$ et comme I_1/I_2 est F_Q-sans torsion, I_1/I_2 est F_Q-cocritique. Soit maintenant $a \in I_1$, $a \notin I_2$; alors $I = (I_2:a)$ est un idéal F_Q-critique et donc $Ann_Q(I) \subset s_o({}_\Lambda Q)$ et $Ann_Q(I)$ est un Λ-module simple. Nous considérons le Λ-morphisme

$$\varphi_a : Q_2 = Ann_Q(I_2) \longrightarrow Ann_Q(I) \ , \quad \varphi_a(x) = xa \ .$$

Comme $a \notin I_2$, $\varphi_a \neq 0$. Puisque $a \in I_1$, $Q_1 a = 0$ et par suite $Q_1 \subset Ker\ \varphi_a$. Comme Q_2/Q_1 est un Λ-module simple et $\varphi_a \neq 0$, on en déduit que $Ann_Q(I) \simeq Q_2/Q_1$.

2) Supposons que la longueur de ${}_\Lambda Q$ est égale à n. D'après la proposition 3.1 et l'affirmation 1) on a $Q \cdot J_Q^n = 0$, d'où $J_Q^n \subseteq Ann_R(Q)$.

Pour la topologie additive F_Q on désigne par R_Q l'anneau de quotients R_{F_Q}. Lorsque Q_R est un module Δ-injectif, on a $R_Q \simeq Biend(Q)$.

Un anneau R s'appelle Kasch à droite [20] si tout R-module simple est isomorphe à un idéal minimal de R.

<u>Corollaire 3.3</u> Soit Q_R un module Δ-injectif. Si Q_R est un générateur pour la catégorie Mod (R/Ann Q), alors $R_Q = Biend(Q)$ est un anneau de Kasch artinien à gauche.

<u>Démonstration</u> D'après les hypothèses ${}_\Lambda Q$ est un Λ-module projectif. Soit $0 = A_o \subset A_1 \subset \ldots \subset A_n = {}_\Lambda Q$ une suite tel que A_i/A_{i-1} est Λ-module simple pour tout $i=1,2,\ldots,n$. Si nous notons $B_i = Hom_\Lambda(Q,A_i)$, nous obtenons la suite:

$$0 = B_o \subset B_1 \subset \ldots \subset B_n = Biend(Q)$$

Comme ${}_{\Lambda}Q$ est projectif, alors B_i/B_{i-1} est nul ou B_i/B_{i-1} est module simple sur l'anneau Biend(Q). Donc Biend(Q) est artinien à droite. Tenant compte de corollaire 3.2, 1), il en résulte que Biend (Q) est un anneau de Kasch.

<u>Proposition 3.4</u> Soit Q_R un module Δ-injectif. Soit $c \in R$ tel que $\hat{c} = c + J_Q$ est un élément régulier dans l'anneau R/J_Q. Si $\varphi : R \longrightarrow \text{Biend}(Q)$ est le morphisme canonique, alors $\varphi(c)$ est inversible dans l'anneau Biend(Q).

<u>Démonstration</u> Nous considérons le morphisme

$$\alpha_c : R/J_Q \longrightarrow R/J_Q \quad ; \quad \alpha_c(\hat{x}) = \hat{cx} \quad .$$

D'après l'hypothèse , α_c est injectif, Comme Q est Δ-injectif, alors il existe les idéaux $I_1, I_2, \ldots, I_n$, F_Q-critiques, tels que $J_Q = I_1 \cap I_2 \cap \ldots \cap I_n$. Soit $T_Q : \text{Mod } R \longrightarrow \text{Mod } R/\mathcal{T}_Q$ le foncteur canonique ($\mathcal{T}_Q$ est la classe des modules F_Q-de torsion). On a $T_Q(R/J_Q) \subseteq T_Q(R/I_1) \oplus \ldots \oplus T_Q(R/I_n)$ et comme $T_Q(R/I_k)$ est objet simple, pour tout $1 \leq k \leq n$, nous obtenons que $T_Q(R/J_Q)$ est un objet semi-simple de longueur finie.

Comme $T_Q(\alpha_c)$ est un monomorphisme, il en résulte que $T_Q(\alpha_c)$ est un isomorphisme. Donc coker α_c est un module F_Q-de torsion. Soit le Λ-morphisme $\theta_c : {}_{\Lambda}Q \longrightarrow {}_{\Lambda}Q$, $\theta_c(x) = xc$. Si Ker $\theta_c \neq 0$, il existe un Λ-module simple A tel que $A \subset \text{Ker } \theta_c$. Donc $Ac = 0$ et par suite

$c \in \mathrm{Ann}_R(A)$. Si on note $I = \mathrm{Ann}_R(A)$, I est un idéal F_Q-critique et donc $J_Q \subset I$. On voit que $\mathrm{Im}\,\alpha_c \subseteq I/J_Q$. Comme $R/J_Q \big/ \mathrm{Im}\,\alpha_c \in \mathcal{T}_Q$, il en résulte que $R/I \in \mathcal{T}_Q$, contradiction. Par suite $\mathrm{Ker}\ \theta_c = 0$ et donc θ_c est un isomorphisme. Comme $\varphi(c) = \theta_c \in \mathrm{Biend}(Q)$, on obtient que $\varphi(c)$ est un élément inversible.

Si Q_R est un module Δ-injectif, on sait ([16] , corollaire 4.7) que $\mathrm{Ass}\ Q \neq \emptyset$ et $\mathrm{Ass}\ Q$ est un ensemble fini. Supposons que $\mathrm{Ass}\ Q = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ et notons par $N_Q = \bigcap_{i=1}^{n} p_i$. Comme $\mathrm{Ann}\ Q \subset N_Q$, d'après le corollaire 3.2 on a $J_Q \subseteq N_Q$.

<u>Corollaire 3.5</u> Soit Q_R un module Δ-injectif. Si $J_Q = N_Q$, alors $R_Q = Q_{cl}(R/\mathrm{Ann}\ Q)$ ($Q_{cl}(R/\mathrm{Ann}\ Q)$ est l'anneau classique de fractions). De plus, R_Q est un anneau artinien à droite.

<u>Démonstration</u> On applique le théorème 2.3 [14] .

<u>Remarques</u> 1) Réciproquement, si $R_Q = Q_{cl}(R/\mathrm{Ann}\ Q)$ on obtient que $J_Q = N_Q$.

2) Si l'idéal J_Q est semi-premier, alors $J_Q = N_Q$. En effet, d'après le lemme 4.1 [16] , $J_Q = \bigcap_{q \in \mathrm{Ass}\ R/J_Q} q$. Comme $\mathrm{Ass}\ R/J_Q \subseteq \mathrm{Ass}\ Q$, on obtient que $N_Q \subset J_Q$ et donc $J_Q = N_Q$.

En particulier, lorsque R est un anneau régulier au sens de von Neumann ou R est un V-anneau à droite (à gauche), nous avons $J_Q = N_Q$.

Corollaire 3.6 Soit R un anneau régulier au sens de von Neumann. Si Q_R est un module Δ-injectif, alors :

1) $R_Q = Q_{cl}(R/\mathrm{Ann}\ Q) = R/\mathrm{Ann}\ Q$

2) $R/\mathrm{Ann}\ Q$ est un anneau semi-simple artinien

3) Q_R est un module semi-simple.

Démonstration On applique le corollaire 3.5 et le fait que R_Q est un anneau semi-primaire.

Supposons que R est un anneau à dimension de Krull à droite et soit $K.\dim R = \alpha$. On désigne

$$U_\alpha = \{ p \in \mathrm{Spec}\ R \ / \ K.\dim R/p = \alpha \}$$

On a $U_\alpha \subseteq \mathrm{Min}\ R$. Nous notons $N_\alpha = \bigcap_{p \in U_\alpha} p$ et soit la topologie additive $F_{N_\alpha} = F_{E(R/N_\alpha)}$.

Proposition 3.7 Soient R un anneau à dimension de Krull à droite et M_R un module de type fini F_{N_α}-critique. Supposons qu'une des affirmations suivantes soit vérifiée:

i) Le nombre ordinal $\alpha = K.\dim R$ a un prédécesseur

ii) R est un anneau noethérien à droite.

Alors M est α-critique.

Démonstration Comme $E(R/N_\alpha)$ est un module Δ-injectif (voir la proposition 2.1), $\mathrm{Ass}\ M \neq \emptyset$ et $\mathrm{Ass}\ M \subseteq \mathrm{Ass}\ E(R/N_\alpha) = U_\alpha$. Soit $p \in \mathrm{Ass}\ M$; il existe un sous-module $M' \subset M$ tel que $p = \mathrm{Ann}_R M'$. Donc $K.\dim M' \leq K.\dim R/p = \alpha$. D'autre part, il existe un nombre naturel r tel que $0 \longrightarrow R/p \longrightarrow M'^r$. D'ici on en déduit que $\alpha \leq K.\dim M'$ et donc $K.\dim M' = \alpha$. Par suite $K.\dim M = \alpha$.

Supposons que l'affirmation i) est vérifiée. Soit $M' \subset M$ un sous-module non-nul. Notons $X = M/M'$ et soit $X' \subset X$ un sous-module arbitraire. Le module X/X' contient un module Y, β-critique. Comme $\mathrm{Hom}(X, E(R/N_{\alpha})) = 0$, on en déduit que $\mathrm{Hom}(Y, E(R/N_{\alpha})) = 0$. Si $\beta = \alpha$, alors $E(Y)$ est un module Δ-injectif (voir la proposition 2.1). Soit $q \in \mathrm{Ass}\, Y$; comme $E(Y)$ est Δ-injectif, il existe des éléments $y_1, y_2, \ldots, y_n \in Y$ tels que $q = \bigcap_{i=1}^{n} \mathrm{Ann}(y_i)$ et donc il existe le morphisme injectif $0 \longrightarrow R/q \longrightarrow Y^n$, d'où on obtient que $K.\dim R/q = \alpha$. Comme $\mathrm{Hom}(Y, E(R/N_{\alpha})) = 0$, alors $\mathrm{Hom}(R/q, E(R/N_{\alpha})) = 0$, contradiction. Donc $\beta < \alpha$. D'après le corollaire 4.3 [8] on obtient $K.\dim M/M' < \alpha$ et par suite M est α-critique.
Supposons maintenant que R est noethérien à droite. Comme $X = M/M'$ est de type fini, il existe une chaîne finie $0 = X_0 \subset X_1 \subset \ldots \subset X_n = X$ tel que X_i/X_{i-1} est α_i-critique $(1 \leqslant i \leqslant n)$. Donc $K.\dim X = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \{\alpha_i\}$.
Comme $\mathrm{Hom}(X, E(R/N_{\alpha})) = 0$, alors $\mathrm{Hom}(X_i/X_{i-1}, E(R/N_{\alpha})) = 0$. Exactement comme dans le cas i), on obtient que $\alpha_i < \alpha$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Donc $K.\dim X < \alpha$ et donc M est α-critique.

<u>Corollaire 3.8</u> Soit R un anneau à dimension de Krull à droite. Supposons qu'une des affirmations suivantes soit vérifiée:

i) Le nombre ordinal $\alpha = K.\dim R$ a un prédécesseur

ii) R est noethérien à droite.

Si pour tout module M_R , α-critique, $\mathrm{Ann}_R(M)$ est un idéal premier, alors l'anneau $R/\mathrm{Ann}_R E(R/N_\alpha)$ est un order dans un anneau artinien à droite. De plus, l'anneau de quotients $R_{E(R/N_\alpha)} = Q_{cl}(R/\mathrm{Ann}\, E(R/N_\alpha))$.

<u>Démonstration</u> Si X_R est un module F_{N_α}-critique, tout sous-module de type fini de X_R est F_{N_α}-critique. D'après les hypothèses et la proposition 3.7 , $\mathrm{Ann}_R X$ est un idéal semi-premier. Donc $J_{E(R/N_\alpha)} = N_{E(R/N_\alpha)}$. En utilisant le corollaire 3.5 on obtient le résultat.

<u>Corollaire 3.9</u> Soit R un anneau à dimension de Krull à droite. Supposons que l'ordinal $\alpha = \mathrm{K.dim}\, R$ a un prédécesseur (en particulier, lorsque α est fini) et R est un anneau K-homogène. Si pour tout module M, α-critique, $\mathrm{Ann}_R(M)$ est un idéal premier, alors R est un order dans un anneau artinien à droite.

<u>Démonstration</u> D'après le corollaire 3.8 il suffit de montrer que $\mathrm{Ann}_R(E(R/N_\alpha)) = 0$. Comme R est K-homogène, $E(R_R)$ est un module Δ-injectif (voir le corollaire 2.4). On peut écrire $E(R_R) = I_1 \oplus I_2 \oplus \ldots \oplus I_r$ où I_k est un injectif indécomposable pour tout $k=1,2,\ldots,r$. Soit $p \in \mathrm{Ass}(I_k)$; alors $p \in \mathrm{Ass}(R_R)$ d'où on obtient que $\mathrm{K.dim}\, R/p = \alpha$. D'ici on en déduit que I_k est isomorphe avec un sous-module de $E(R/N_\alpha)$. Par suite

$$\mathrm{Ann}_R(E(R/N_\alpha)) \subset \bigcap_{k=1}^{r} \mathrm{Ann}_R\, I_k = \mathrm{Ann}_R\, E(R) = 0 .$$

Corollaire 3.10 ([13], théorème 10) Soit R un anneau noethérien à droite. Si R est un anneau K-homogène et si pour tout module M, α-critique (α = K.dim R), $\mathrm{Ann}_R(M)$ est un idéal premier, alors R est un order dans un anneau artinien à droite.

Démonstration Ce corollaire est une conséquence du corollaire 3.8, ii).

Nous terminons par faire quelques observations sur les modules Δ-injectifs indécomposables sur les anneaux noethériens essentiellement bornés des deux côtes (en Anglais: fully bounded Noetherian ring or short F.B.N-ring):

Soient R un anneau noethérien essentiellement borné des deux côtes et Q_R un module Δ-injectif indécomposable. Alors l'anneau $R/\mathrm{Ann}_R(Q)$ est un order dans un anneau artinien A_Q. De plus, Q est un A_Q-module injectif indécomposable.

Démonstration Si on note $\Lambda = \mathrm{End}(Q)$, alors ${}_\Lambda Q$ est un Λ-module de longueur finie. Donc ${}_\Lambda Q$ est un Λ-module de type fini. Soient les éléments $x_1, x_2, \ldots, x_n \in Q$ tels que $Q = \Lambda x_1 + \Lambda x_2 + \ldots + \Lambda x_n$. Si on note $M = x_1R + x_2R + \ldots + x_nR$, alors $\mathrm{Ann}_R(M) = \mathrm{Ann}_R(Q)$.

Donc $\mathrm{Ann}_Q(\mathrm{Ann}_R(M)) = Q$. Ensuite on applique le théorème 5.3 [10] .

4. LA DIMENSION Δ-INJECTIVE D'UN MODULE

Soit $M \in$ Mod R et $0 \to M \to E_o \to E_1 \to \dots \to E_i \to \dots$ la résolution injective minimale du module M. Nous définissons la dimension Δ-injective de M, noté par $\Delta.d_R M$, comme:

$$\Delta.d_R M = \sup\{ i \ / \ E_k \text{ est } \Delta\text{-injectif pour tout } k \leqslant i \}$$

Si E_o n'est pas Δ-injectif, nous écrivons $\Delta.d_R M = -1$ et si E_i est Δ-injectif pour tout i = o,1,2,..., nous écrivons $\Delta.d_R M = \infty$.

Donc R est un Δ-anneau (à droite) $\Longleftrightarrow$ $\Delta.d_R R \geqslant 0$.

<u>Proposition 4.1</u> Si $\Delta.d_R R \geqslant 1$, alors R est un anneau semi-primaire.

<u>Démonstration</u> Soit $0 \to R_R \to E_o \to E_1 \to \dots$ la résolution minimale de R_R. Le module $Q = E_o \oplus E_1$ est Δ-injectif. Soient F_Q la topolgie additive co-engendré de Q_R et $\mathcal{T}_Q$ la classe des modules F_Q-de torsion.

Soient T_Q : Mod R $\to$ Mod R/$\mathcal{T}_Q$ le foncteur canonique et S_Q : Mod R/$\mathcal{T}_Q \to$ Mod R le foncteur adjoint à droite de T_Q (voir [20]). Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & R & \longrightarrow & E_o & \longrightarrow & E_1 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & S_Q T_Q(R) & \longrightarrow & S_Q T_Q(E_o) & \longrightarrow & S_Q T_Q(E_1)
\end{array}$$

Comme E_o et E_1 sont F_Q-fermés ([20],pag.198), alors les morphismes canoniques $E_o \longrightarrow S_Q T_Q(E_o)$ et $E_1 \longrightarrow S_Q T_Q(E_1)$ sont isomorphismes. Donc le morphisme $R \longrightarrow S_Q T_Q(R)$ est un isomorphisme. Comme $R_Q = S_Q T_Q(R)$, alors le morphisme canonique $R \longrightarrow R_Q$ est un isomorphisme. Comme R_Q est un anneau semi-primaire, alors R est semi-primaire.

<u>Corollaire 4.2</u> Les affirmations suivantes sont équivalentes :

1) R est artinien à droite

2) R est un anneau à dimension de Krull (à droite) et $\Delta.d_R R \geqslant 1$.

<u>Démonstration</u> $1) \Longrightarrow 2)$ est évidente.

$2) \Longrightarrow 1)$ Comme $\Delta.d_R R \geq 1$, alors d'après la proposition 4.1, R est un anneau semi-primaire. Comme R est un anneau à dimension de Krull, alors R est artinien à droite.

<u>Corollaire 4.3</u> Soit R un anneau tel que $\mathrm{rad}(R)^2 = 0$ ($\mathrm{rad}\, R = \bigcap_{p \in \mathrm{Spec}\, R} p$). Si $\Delta.d_R R \geqslant 1$, alors R est artinien à droite.

<u>Démonstration</u> D'après la proposition 4.1, R est semi-primaire. Comme $\mathrm{rad}(R)^2 = 0$, alors rad R est un R-module semi-simple. D'autre part, le socle $s_o(R_R)$ est un module de longueur finie (voir la propriété 12), §1). Donc R est artinien à droite.

<u>Corollaire 4.4</u> Supposons que R est un anneau commutatif.

Alors les affirmations suivantes sont équivalentes:

1) R est artinien

2) $\Delta.d_R R \geq 1$.

Démonstration 1) $\Longrightarrow$ 2) est claire.

2) $\Longrightarrow$ 1) D'après la proposition 4.1, R est semi-primaire. Comme R est commutatif, R est un produit fini des anneaux locaux et par suite $E_o = E(R)$ est un co-générateur injectif. Comme E_o est Δ-injectif, alors R est un anneau artinien.

Remarques 1) On peut poser le problème suivant: est ce qu'il est vrai que $\Delta.d_R R = \infty \Longrightarrow$ R est artinien à droite?

2) Utilisant la notion de module Σ-injectif, nous pouvons définir la dimension Σ-injective de M, noté par $\Sigma.d_R M$, comme

$$\Sigma.d_R M = \sup\{ i \ / \ E_k \text{ est } \Sigma\text{-injectif pour tout } k \leq i \}$$

($0 \longrightarrow M \longrightarrow E_o \longrightarrow E_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow E_n \longrightarrow \cdots$ est la résolution minimale injective de M). Si E_o n'est pas Σ-injectif, nous écrivons $\Sigma.d_R M = -1$ et si E_i est Σ-injectif pour tout $i = o,1,2,\ldots$ nous écrivons $\Sigma.d_R M = \infty$. Nous avons toujours $\Delta.d_R M \leq \Sigma.d_R M$. Il existe des exemples d'anneaux R pour lesquels $\Sigma.d_R R = \infty$; par exemple l'anneau de polynômes $R = k[X_1,X_2,\ldots,X_n,\ldots]$ où k est un corps (voir [2], [18]).

Exemple Nous considérons l'anneau $A = \begin{pmatrix} \mathbb{Q} & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ où $\mathbb{Q}$

(resp. $\mathbb{R}$) est le corps des nombres rationnels (resp. le corps des nombres réels). A est un anneau à droite artinien.

Soient les éléments idempotents: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. On a $S_1 = Ae_1 = \begin{pmatrix} Q & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est A-module simple projectif et $Ae_2 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & \mathbb{R} \end{pmatrix}$ est un module projectif.

Si on note $V = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{R} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, V est un idéal bilatère et $S_2 = Ae_2/V$ est A-module simple. Le module ${}_AV$ est semi-simple et est une somme directe (infinie) de copies isomorphes à S_1. Donc ${}_AV$ est projectif et comme $A/V \simeq Q \times \mathbb{R}$, alors d'après le théorème 2.1 [19], on obtient que A est un anneau héréditaire à gauche. D'ici on en déduit que S_2 est un module injectif. Si $X \subset S_2$ est un ensemble non-vide, on voit que $V \subset \mathrm{Ann}_A(X)$ et par suite il résulte que S_2 est un module Δ-injectif.

Comme le socle $s_o({}_AA) = V \oplus Ae_1$ est de dimension de Goldie infinie, il en résulte que A est un Δ-anneau à droite (étant artinien) et n'est pas un Δ-anneau à gauche.

Soit $0 \longrightarrow {}_AA \longrightarrow E_o \longrightarrow E_1 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \dots$ la résolution minimale injective du A-module à gauche A.

Le module $E_1 \simeq E_o/A$ est semi-simple et est une somme directe de copies isomorphes à S_2. Donc E_1 est un module Δ-injectif (le module E_o n'est pas Δ-injectif).

BIBLIOGRAPHIE

1. J.A. BEACHY, "Injective Modules with Both Ascending and Descending Condition on Annihilators", Communications in Algebra, vol.6, nr.17(1978), 1777-1788.

2. I. BECK, " $\sum$-Injective Modules", Journal of Algebra, vol.21, nr.2(1972), 232-249.

3. G. CAUCHON, "Les T-Anneaux, la Condition (H) de Gabriel et ses Consequences", Communications in Algebra, vol.4, nr.1(1976), 11-50.

4. C. FAITH, "Rings with ascending condition on annihilators", Nagoya Math.J.27(1966), 179-191.

5. C. FAITH, "Algebra II Ring Theory", Springer Verlag, 1976.

6. C. FAITH, "Injective modules over Levitzki Rings", (à paraître, Lecture Notes, Marcel-Dekker).

7. A.W. GOLDIE, "A Survey of Progress in Non-commutative Noetherian Rings", Ring Theory, proceedings of the 1978 Antwerp Conference, vol.51, (Marcel-Dekker).

8. R. GORDON and J.C.ROBSON, "Krull dimension", Mem.Amer. Math.Soc.133(1973).

9. R.E. JOHNSON and E.T.WONG, "Quasi-injective modules and irreducible rings", J.Lond.Math.Soc. 36(1971), 260-268.

10. A.V. JATEGOANKAR, "Jacobson conjecture and modules over fully bounded noetherian rings", J. Algebra, 30(1974), 103-121.

11. G.KRAUSE,T.H.LENAGAN and J.T.STAFFORD, "Ideal invariance and artinian quotient rings",J. Algebra,vol.55,nr.1(1978),145-154.

12. J. LAMBEK and G.O. MICHLER, "The torsion theory at a prime ideal in a right Noetherian ring",J. Algebra 25(1973),364-389.

13. B.J. MÜLLER, "Ideal Invariance and Localization",Communications in Algebra,vol.7,nr.4(1979), 415-441.

14. C. NASTASESCU, "Anneaux de quotients et modules $\sum(\Delta)$-injectifs"(à paraître,Communications in Algebra).

15. C. NASTASESCU, "Conditions de finitude pour les modules",Revue Roum.Math.Pures et Appl. tome XXIV,nr.5 (1979),745-758.

16. C. NASTASESCU, "Conditions de finitude pour les modules II"(à paraître Revue Roum.Math. nr.4 (1980)).

17. C. NASTASESCU, "Théorème de Hopkins pour les catégories de Grothendieck" (à paraître).

18. C. NASTASESCU, "Modules $\sum$-injectifs",Ring Theory, Proceedings of the 1978 Antwerp Conference, vol.51 (Marcel-Dekker).

19. C. NASTASESCU, "Quelques remarques sur la dimension homologique des anneaux.Éléments réguliers" J.Algebra,vol.19,nr.4(1971),470-485.

20. BO STENSTRÖM, "Rings of Quotients",Springer Verlag, (1975).